Approximation de lois de conservation paramétrées

Nicolas Seguin
IMAG, Antenne Inria de l'Université de Montpellier

2e journée de l'ANR COSS, vendredi 22 mars 2024

Collaboration avec

- Clément Cardoën (LMJL, Nantes Université)
- Swann Marx (LS2N, CNRS Nantes)
- Anthony Nouy (LMJL, Centrale Nantes)

Contenu approximatif de l'exposé

- Lois de conservation paramétrées : cadre
- Problème des moments pour des fonctions discontinues
- Solutions à valeurs mesures et moments
- Problème des moments généralisé et hiérarchie de Lasserre
- Quelques exemples numériques
- La suite. . .

Lois de conservation avec paramètres : définitions

Le but est d'approcher les solutions du problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x,\xi) + \mathrm{div}_x f(u(t,x,\xi),\xi) = 0 & (t,x,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \Xi \\ u(0,x,\xi) = u_0(x,\xi) & (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi \end{cases}$$

où $\Xi \subset \mathbb{R}^p$ est l'**espace des paramètres** avec **mesure de probabilité** ρ.

Cadre

- $u_0 \in L^\infty(\Xi, L^\infty(\mathbb{R}^n))$
- f est localement bornée et de classe C^1 par rapport à u et ρ-ps

Definition (Solution entropique paramétrique)

ρ-ps : fonction $u(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ tq pour tout couple entropique $(\eta, q(\xi))$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\eta(u)\partial_t \varphi + q(u,\xi) \cdot \nabla_x \varphi\right) dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(0,x)\eta(u_0(\xi))\, dx \geqslant 0$$

for all $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)^+$.

Lois de conservation avec paramètres : définitions

Définition “affaiblie” :

Definition (Solution entropique paramétrique faible)

Fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \Xi)$ tq pour tout couple entropique $(\eta, q(\xi))$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Xi} \left(\eta(u)\partial_t\varphi + q(u,\xi) \cdot \nabla_x\varphi\right) d\rho(\xi)\, dx\, dt \\ + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Xi} \varphi(0,x)\eta(u_0(\xi))\, d\rho(\xi)\, dx \geqslant 0$$

for all $\varphi \in C(\Xi, C_0^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n))^+$.

- Si on suppose de plus que $u \in L^\infty(\Xi, L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n))$, alors on a l’équivalence entre les deux notions. [Mishra, Schwab, 2012]...
- Dans ce cas, existence et unicité standard.

Approximation numérique

Difficultés

- Problème non linéaire
- Les discontinuités en x se propagent en ξ
- Minimiser les évaluations par rapport à ξ
- Échec des méthodes d'approximation "classiques"
- Méthodes de type Monte-Carlo : convergence lente
- Extension de méthodes spatiales : lourd...

Ici : tentative exploratoire trèèèès différente issue de

S. Marx, T. Weisser, D. Henrion, J.B. Lasserre
A moment approach for entropy solutions to nonlinear hyperbolic PDEs
Mathematical Control and Related Fields, Vol. 10, 2020

Problème des moments classique

Soit la fonction f à déterminer

$$\begin{aligned} f\colon X \text{ compact de } \mathbb{R}^{p-1} &\longrightarrow Y \text{ compact de } \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_{p-1}) &\longmapsto y = f(x_1, \dots, x_{p-1}) \end{aligned}$$

Soit $b_\alpha(x, y) = (xy)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}^p$, $|\alpha| \leqslant d$ (d'autres polynômes sont possibles) et la matrice des moments associée :

$$M_{f,d} := \int_X b(x, f(x)) b(x, f(x))^\top \, dx.$$

Problème. Connaissant uniquement la matrice des moments $M_{f,d}$, calculer une approximation convergente f_d de f quand $d \to \infty$.

Formulation faible du problème des moments

Idée. Au lieu de la fonction, on cherche à déterminer son graphe

$$G_f := \{(x,y), x \in X, y = f(x)\} \subset X \times Y$$

et correspond au support de la mesure (mesure d'occupation)

$$d\mu(x,y) = \mathbf{1}_X(x)dx\ \delta_{f(x)}(dy)$$

Alors la matrice des moments devient

$$M_{f,d} = M_{\mu,d} := \int_X b(x,y)b(x,y)^\top\ d\mu(x,y)$$

$\longrightarrow$ Problème d'optimisation linéaire sur la mesure d'occupation μ

Rq. Si on désintègre la mesure μ, on obtient la mesure de Young $x \mapsto \delta_{f(x)}$.

Approximation du graphe

Jean-Bernard Lasserre, Didier Henrion, Édouard Pauwels, Swann Marx...

- Données :

$$M_{\mu,d} := \int_X b(x,y)b(x,y)^\top \, d\mu(x,y)$$

- Noyau de Christoffel–Darboux étendu :

$$q_{\mu,d}(x,y) = b(x,y)^\top M_{\mu,d}^\dagger b(x,y)$$

  - C'est une somme de carrés de polynômes (SOS)
  - Ses courbes de niveau approchent le support de μ quand $d \to \infty$

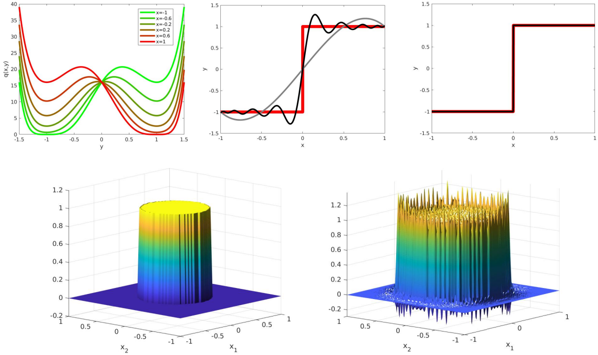
- Construction de l'approximation :

$$f_d(x) := \min\left\{\arg\min_{y \in Y} q_{\mu,d}(x,y)\right\}$$

Résultat et exemples

S. Marx, E. Pauwels, T. Weisser, D. Henrion,J.-B. Lasserre
Semi-algebraic approximation using Christoffel-Darboux kernel
Constructive Approximation, Vol. 54, 2021

Convergence en norme L^1 et ponctuelle aux points de continuité de f



Retour aux lois de conservation

Stratégie :

- Application de la méthode, a priori adaptée aux solutions discontinues
- Reformulation du problème initial comme un problème aux moments
  - X et Y doivent être des compacts
  - Passage aux mesures de Young (à la DiPerna)
  - Problème polynomial : flux, entropie, fonctions test...
- Noyau de Christoffel–Darboux et extraction :
  solution approchée $u_d(t, x, \xi)$ pour tout $(t, x, \xi) \in \mathbf{T} \times \mathbf{X} \times \Xi$

Et maintenant, les détails...

Formulation sur des compacts

Les compacts :

- $\mathbf{T} \times \mathbf{X} \times \Xi = [0, T] \times [-1, 1]^n \times [0, 1]^p$
- $\mathbf{U} = [-\|u_0\|_\infty, \|u_0\|_\infty]$

On se restreint à des données initiales u_0 pour éviter toute interaction avec $\partial\mathbf{X}$:

- Soit $\bar{u}_0 \in L^\infty(\Xi, L^\infty(\mathbb{R}^n))$
- Soit $\bar{u} \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \Xi)$ la solution entropique paramétrique faible

[H] $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall (t, \xi) \in \mathbf{T} \times \Xi$, $\bar{u}(t, \cdot, \xi) = \bar{u}_0(\cdot, \xi)$ sur $(\partial\mathbf{X} + B(0, \varepsilon)) \cap \mathbf{X}$

Le problème mixte

- Solution entropique paramétrique faible
- Données initiales : $u_0 = \bar{u}_{0|X}$ où $\bar{u}_0$ vérifie **[H]**.
- Condition de Dirichlet au bord $\partial\mathbf{X}$:
  - On suppose que la trace $\gamma(u_0)$ sur $\partial\mathbf{X}$ existe
  - On impose $u = \gamma(u_0)$ sur $\mathbf{T} \times \partial\mathbf{X} \times \Xi$

Solutions à valeur mesure entropique paramétrique

On cherche

$$\mu\colon \mathbf{T} \times \mathbf{X} \times \Xi \longrightarrow \mathcal{M}_+(\mathbf{U})$$
$$(t,x,\xi) \longmapsto \mu_{(t,x,\xi)}$$

tel que pour tout couple entropique $(\eta, q(\xi))$ et $\varphi \in C(\Xi, C^1(\mathbf{T} \times \mathbf{X}))^+$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{X}} \int_{\Xi} \left[\partial_t \varphi \left\langle \mu_{(t,x,\xi)} \mid \eta \right\rangle + \nabla_x \varphi \cdot \left\langle \mu_{(t,x,\xi)} \mid q(\xi) \right\rangle \right] d\rho(\xi)\, dx\, dt \\
&\quad + \int_{\mathbf{X}} \int_{\Xi} \varphi_{|t=0} \left\langle \delta_{u_0} \mid \eta \right\rangle d\rho(\xi)\, dx - \int_{\mathbf{X}} \int_{\Xi} \varphi_{|t=T} \left\langle \mu_{(T,x,\xi)} \mid \eta \right\rangle d\rho(\xi)\, dx \\
&\qquad - \int_{\mathbf{T}} \int_{\partial \mathbf{X}} \int_{\Xi} \varphi \left\langle \delta_{\gamma u_0} \mid q(\xi) \right\rangle \cdot n_{\partial \mathbf{X}}\, d\rho(\xi)\, d\sigma(x)\, dt \geqslant 0.
\end{aligned}$$

“Extension” de la définition de [DiPerna 1985] (+ [Otto 1996], [Panov 2011]. . .)

Vers un problème sur les moments : une mesure globale

Soit $\mathbf{K} = \mathbf{T} \times \mathbf{X} \times \Xi \times \mathbf{U}$.
On définit $\nu \in \mathcal{M}_+(\mathbf{K})$ par

$$d\nu(t, x, \xi, y) = dt\ dx\ d\rho(\xi)\ \mu_{(t,x,\xi)}(dy)$$

On peut alors réécrire les inégalités précédentes sur ν comme :
Pour tout couple entropique $(\eta, q(\xi))$ et $\varphi \in C(\Xi, C^1(\mathbf{T} \times \mathbf{X}))^+$,

$$\mathscr{G}(\varphi, \nu, (\eta, q)) \geqslant 0$$

(On omet la dépendance aux données initiale et au bord)

Rq. On peut en déduire la loi de conservation : pour tout $\psi \in C(\Xi, C^1(\mathbf{T} \times \mathbf{X}))$,

$$\mathscr{G}(\psi, \nu, \mathrm{id}, f) = 0.$$

Problème. Comment en déduire la matrice des moments de ν ?

Le problème des moments généralisé (GMP)

Moments de ν : $\mathrm{m}_\alpha = \int_K X^\alpha \, d\nu, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n$

GMP : problème d'optimisation linéaire de dimension infinie

- $K := \{X \in \mathbb{R}^n ; k_1(X) \geqslant 0, \dots, k_m(X) \geqslant 0\}$ $\quad k_i \in \mathbb{R}[X]$
- **Inconnue(s)** : mesure(s) de Borel $\nu \in \mathscr{M}(K)_+$
- **Fonctionnelle** dépendant des moments de ν : $\quad p_0 \in \mathbb{R}[X]$

$$\inf_{\nu \in \mathscr{M}(K)_+} \int_K p_0 \, d\nu$$

- Sous contrainte sur les moments de ν : $\quad k = 1, 2, \dots, \; p_k \in \mathbb{R}[X]$

$$\int_K p_k \, d\nu \leqslant b_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Reformulation sur les moments

Moments de ν : $\mathrm{m}_\alpha = \int_K X^\alpha \, d\nu, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n$

Soit $p \in \mathbb{R}[X]$. On note $p = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} p_\alpha X^\alpha$. Alors

$$\int_K p \, d\nu = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} p_\alpha \mathrm{m}_\alpha =: \ell_{\mathrm{m}}(p)$$

Théorème de Riesz–Haviland (1923-36)

Le **GMP** est équivalent au problème linéaire sur les moments $(\mathrm{m}_\alpha)_\alpha$

$$\inf_{\mathrm{m} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}} \quad \ell_{\mathrm{m}}(p_0)$$

$$\text{tel que } \ell_{\mathrm{m}}(p_k) \leqslant b_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\ell_{\mathrm{m}}(p) \geqslant 0 \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}[X] \text{ positif sur } K$$

Hiérarchie de Lasserre

Jean-Bernard Lasserre
Moments, Positive Polynomials and Their Applications.
Imperial College Press, Covent Garden, London, UK (2009)

Troncature convergente du GMP

- Putinar's Positivstellensatz & sommes de carrés
  Reformulation de la contrainte $\ell_{\mathrm{m}}(p)$, $p_{|K} > 0$
- Matrice de localisation (moments d'ordre d pondérée par (k_j))
  Troncature de la contrainte $\ell_{\mathrm{m}}(p)$, $p_{|K} > 0$
- $d \to +\infty$: **Convergence vers un minimiseur du GMP**
- Fonction de Christoffel-Darboux
  Si $\nu = \delta_{f(X)}$, reconstruction de f possible

[Marx, Weisser, Henrion, Lasserre 2020] Application à l'Équation de Burgers

Retour sur les lois de conservation paramétrées

On cherche $\nu \in \mathcal{M}_+(\mathbf{K})$ qui vérifie $\mathscr{G}(\varphi, \nu, (\eta, q)) \geqslant 0$.

Problème des moments généralisé

- $\mathbf{T} = \{t(T-t) \geqslant 0\}$, idem pour $\mathbf{X}$ et $\mathbf{U}$
- Famille de polynômes positifs $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{F}}$, $\mathscr{F} \subset \mathbb{N}^{n+p+1}$
- Flux polynomial en y (Burgers, LWR…)
- Couples entropiques, au choix :
  - Entropies de Kruzhkov $\eta(y) = |y - \kappa| = \begin{cases} y - \kappa & \text{si } y \geqslant \kappa \\ \kappa - y & \text{si } y \leqslant \kappa \end{cases}$
  - Une seule entropie convexe $\eta(y) = y^2$…???
- On ajoute $\mathscr{G}(\psi^\alpha, \nu, \mathrm{id}, f) = 0$, où $\{\psi^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+p+1}}$ est une base de polynômes
- **Fonctionnelle à minimiser** "quelconque" : trace de la matrice des moments

$\longrightarrow$ Application de la hiérarchie de Lasserre !

Reconstruction des quantités d'intérêt

Hiérarchie de Lasserre

$\longrightarrow$ Approximation des moments de la mesure ν

$\longrightarrow$ Mesure ν dont le support est le graphe de $(t, x, \xi) \mapsto u(t, x, \xi)$

Application du noyau de Christoffel–Darboux

- Récupération d'une approximation de $u(t, x, \xi)$ pour tout $(t, x, \xi) \in \mathbf{K}$

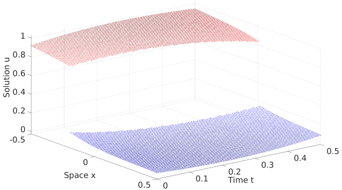
Moments statistiques de la solution

- Estimation à partir de l'approximation de u
- Calcul direct possible via une hiérarchie de Lasserre alternative

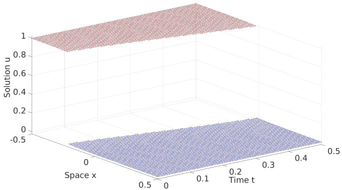
Résultats numériques

- Équation de Burgers + position du pb de Riemann dépendant de ξ
- Équation de Burgers avec $f(u, \xi) = (\xi + 1)u^2/4$, $\xi \in [0, 1]$.
- `Gloptipoly 3` [Henrion, Lasserre, Lofberg 2007]

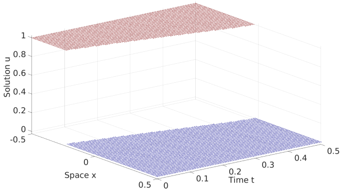
Cas à paramètre fixé



(a) $d = 2$

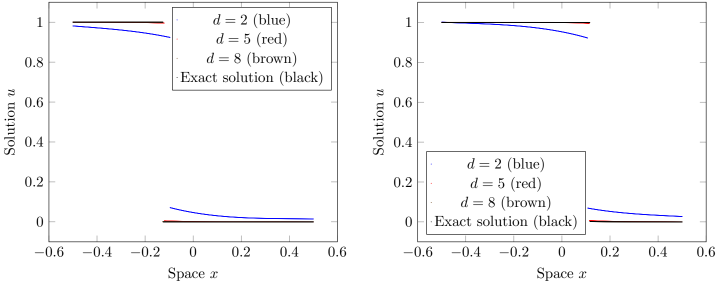


(b) $d = 5$



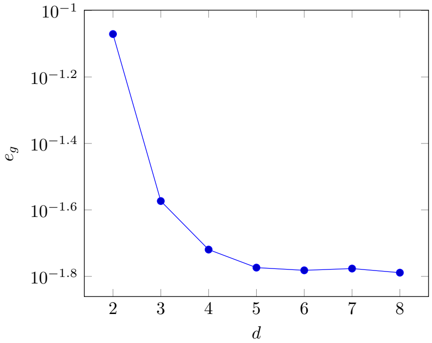
(c) $d = 8$

Cas à temps fixé

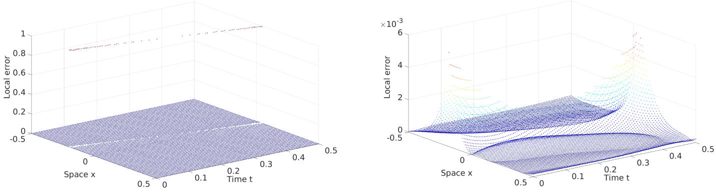


(a) $\xi = 0$ (b) $\xi = 1$

Erreur globale en fonction du degré



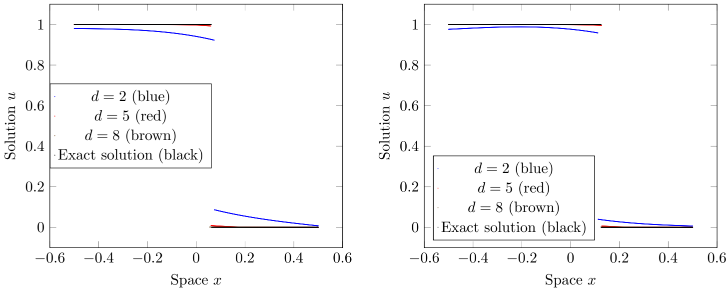
Répartition de l'erreur



(a) z axis from 0 to 1 (b) z axis from 0 to 6×10^{-3}

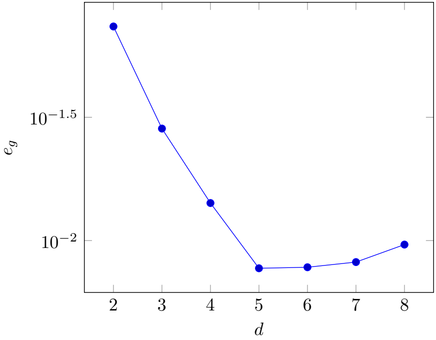
Fig. 4: Graph of the error $\varepsilon(t,x) = |\widetilde{u_5}(t,x,0.2) - u(t,x,0.2)|$

Flux paramétré

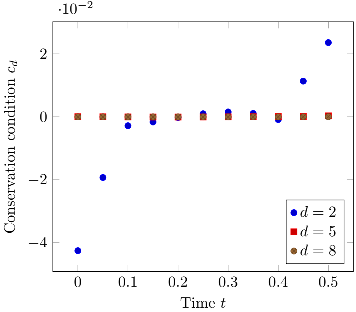


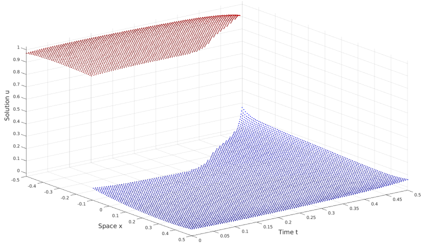
(a) $\xi = 0$ (b) $\xi = 1$

Flux paramétré : convergence



Conservation imposée ou pas





Conclusion

- Méthode numérique sans maillage
- Approximation des solutions à valeurs mesure (avec unicité)
- Problème d'optimisation linéaire
- Résolution globale sur $\mathbf{T} \times \mathbf{X} \times \Xi$

- Algorithme lent et sensible (malédiction de la dimension)
  - Autres algorithmes...
- Structure de la matrice des moments ?
  - [Mula, Nouy 2022], travail en cours pour le transport...
- Autre chose que le problème de Cauchy ?
  - Autres EDP plus faciles...