

Sur les elements finis rationnels de Wachspres.

Apprato, D; Arcangeli, R.; Gout, J.L.

pp. 247 - 270



Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes.

Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek

Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen

Germany

Email: gdz@www.sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen, Germany, Email: gdz@www.sub.uni-goettingen.de

Sur les éléments finis rationnels de Wachspress

D. Apprato, R. Arcangeli et J.L. Gout

Faculté des Sciences Exactes, Département de Mathématique, Avenue Philippon, F-64000 Pau, France

On Wachspress' Rational Finite Elements

Summary. This paper is devoted to the study of Wachspress's rational finite elements (cf. [15]) over a quadrilateral.

After studying construction and properties of these finite elements, we get an estimate of the corresponding interpolation error.

Subject classifications: AMS(MOS): 65D05, 65N30, 41A20, CR: 5.17.

Résumé. Ce travail est consacré à l'étude d'éléments finis rationnels de Wachspress (cf. [15]) sur un quadrilatère.

Après avoir étudié la construction et les propriétés de ces éléments finis, on obtient une évaluation de l'erreur d'interpolation correspondante.

1. Introduction – Notations

L'introduction des éléments finis de Wachspress (cf. [12–15]) soulève plusieurs problèmes nouveaux, résultant autant de la géométrie des éléments que de la nature des fonctions de base, les deux aspects étant évidemment intimement liés dans la théorie de Wachspress: les éléments peuvent être des quadrilatères, des éléments courbes convenables, mais jamais des triangles ou des parallélogrammes; quant aux fonctions de base, ce sont toujours des fonctions rationnelles, et non des polynômes, d'où la terminologie d'«éléments finis rationnels» que nous avons adoptée.

Nous abordons ici le problème de l'estimation de l'erreur d'interpolation correspondant à ces éléments finis. En fait nous limitons notre étude au cas de trois d'entre eux, construits sur un quadrilatère convexe non dégénéré en trapèze ou en parallélogramme, que nous avons appelés «éléments finis rationnels de Serendip» du fait de l'analogie étroite existant entre ces éléments et les éléments finis polynomiaux de Serendip usuels (cf. [17]): les deux premiers sont dûs à

Wachspress, le troisième a été construit par nous en suivant ses idées. Le cas de certains éléments courbes est envisagé dans [1].

La méthode que nous avons suivie est essentiellement basée sur un résultat de [2]. Précisons que la théorie de Ciarlet-Raviart (cf. [6, 7]) ne s'applique pas ici, car les éléments finis rationnels de Wachspress ne constituent pas des «familles affines» ou des «familles isoparamétriques» (au sens de Ciarlet [5]). Signalons également le rôle important joué par une inégalité inverse due à Wilhelmsen [16]. Mais l'aspect le plus surprenant de notre étude réside dans la constatation suivante: les résultats que nous avons obtenus sont fondamentalement conditionnés par le fait que les espaces vectoriels engendrés par les fonctions de base des éléments finis rationnels considérés sont en fait des sur-espaces de fonctions polynômes. D'ailleurs les ordres asymptotiques des estimations de l'erreur d'interpolation obtenues dans le cas des éléments finis rationnels de Serendip sont exactement les mêmes que dans le cas d'éléments finis usuels de même «degré» (voir plus loin la définition de cette notion).

1.1. Rappels

Soient Ω un ouvert borné non vide de \mathbb{R}^2 , de frontière Γ , et p un nombre tel que $1 \leq p \leq +\infty$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on désigne par $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev des (classes de) fonctions v qui appartiennent à $L^p(\Omega)$ ainsi que toutes leurs dérivées partielles

$$\partial^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \quad \text{avec } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2,$$

d'ordre $|\alpha| \leq m$, muni de la norme

$$\|v\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

On utilisera également les semi-normes

$$|v|_{l,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=l} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad l=0, 1, \dots, m,$$

et

$$[v]_{l,p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \|D^l v(x)\|^p dx \right)^{1/p}, \quad l=0, 1, \dots, m,$$

lorsque $p < +\infty$, avec la modification habituelle lorsque $p = +\infty$. (Pour tout $v \in W^{m,p}(\Omega)$, pour tout $l=0, 1, \dots, m$ et pour presque tout $x \in \Omega$ on note $D^l v(x)$ la $l^{\text{ème}}$ dérivée de v au point x avec par convention $D^l u(x)$ pour $l=0$.)

Pour tout compact K de \mathbb{R}^2 on notera $W^{m,p}(K)$ au lieu de $W^{m,p}(\overset{\circ}{K})$ et on écrira $\|v\|_{m,p,K}$, $|v|_{l,p,K}$ et $[v]_{l,p,K}$ au lieu de $\|v\|_{m,p,\overset{\circ}{K}}$, $|v|_{l,p,\overset{\circ}{K}}$ et $[v]_{l,p,\overset{\circ}{K}}$.

Enfin, pour tout entier $k \geq 0$ et pour tout sous-ensemble non vide A de \mathbb{R}^2 , on désigne par $P_k(A)$ l'espace vectoriel des restrictions à A des (fonctions) polynômes à deux variables de degré $\leq k$ par rapport à l'ensemble des deux variables.

1.2. Notations

Dans tout ce qui suit, les éléments finis étudiés sont construits à partir d'un quadrilatère K convexe, fermé de \mathbb{R}^2 , non dégénéré en trapèze ou en parallélogramme, de sommets $a_i, i \in I = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, numérotés de telle manière que les sommets a_i et a_{i+1} soient consécutifs et que a_4 soit le sommet de K le plus éloigné de la diagonale extérieure d du quadrilatère K .

On note h_K (respectivement ρ_K) le diamètre de K (respectivement le maximum des diamètres des cercles contenus dans K), \mathbb{R}^2 étant muni de la distance euclidienne δ .

Pour tout $i \in I$, on désigne par d_i la droite passant par les points a_{i-1} et a_i et par l_i un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $l_i(x) = 0$ soit une équation de d_i . On note α_1 le point d'intersection de diagonales intérieures de K , α_2 (respectivement α_3) le point d'intersection des droites d_1 et d_3 (respectivement d_2 et d_4).

Enfin on désigne par l un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $l(x) = 0$ soit une équation de d et, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on note $\delta(x, d)$ la distance euclidienne de x à la droite d .

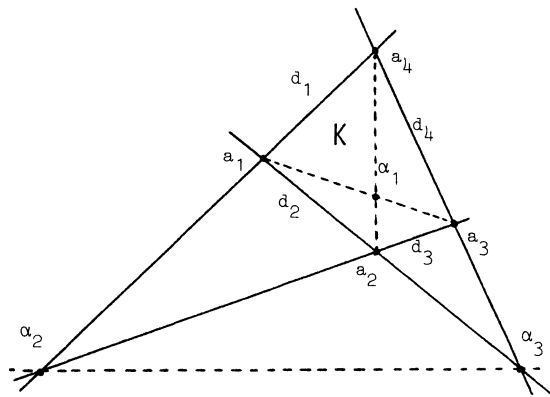


Fig. 1-1

D'autre part, soient Ω un ouvert polygonal borné de \mathbb{R}^2 , \mathcal{H} un ensemble de réels strictement positifs et $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in \mathcal{H}}$ une famille de triangulations de $\bar{\Omega}$ par des quadrilatères K , non dégénérés en trapèzes ou en parallélogrammes, de diamètre $\leq h$. Dans les paragraphes suivants, on utilisera les hypothèses

$$\exists \nu > 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \inf_{x \in K} d(x, d) \geq \nu h_K \tag{1-1}$$

(non dégénérescence en triangles) et

$$\exists \sigma > 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma \tag{1-2}$$

(famille régulière de triangulations au sens de Ciarlet-Raviart [6]).

1.3. Eléments finis

Soit (K, P_K, Σ_K) un élément fini (au sens de Ciarlet [5]). On note $\{a_{i,K}\}$ (respectivement $\{w_{i,K}\}$) l'ensemble des noeuds (respectivement des fonctions de base) de l'élément fini.

On convient de dire que (K, P_K, Σ_K) est de degré k (cf. Wachspress [15]) si l'espace d'interpolation P_K vérifie

$$P_K \supset P_k(K) \quad \text{et} \quad P_K \not\supset P_{k+1}(K). \quad (1-3)$$

Pour la définition des éléments finis polynomiaux «de Serendip» on renvoie à Zienkiewicz [17].

Pour la notion de classe C^0 d'un élément fini et pour toute autre définition concernant les éléments finis on renvoie à Ciarlet [5], Raviart [9].

Dans toute la suite lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, on écrira (K, P, Σ) au lieu de (K, P_K, Σ_K) et on notera a_i au lieu de $a_{i,K}$ les noeuds de l'élément fini et w_i au lieu de $w_{i,K}$ les fonctions de base correspondantes.

2. Eléments finis rationnels de serendip de degrés 1 et 2

Dans tout ce paragraphe K est un quadrilatère convexe, fermé, de \mathbb{R}^2 .

2.1. Élément fini rationnel de Serendip de degré 1 (cf. Wachspress [15])

Lorsque K est un quadrilatère non dégénéré en trapèze ou en parallélogramme on définit P comme l'espace vectoriel engendré par les fonctions $w_i, i \in I$, définies pour tout $x \in K$, par:

$$w_i(x) = \frac{l(a_i)}{l_{i+2}(a_i)l_{i+3}(a_i)} \frac{l_{i+2}(x)l_{i+3}(x)}{l(x)}, \quad (2-1)$$

et

$$\Sigma = \{v \mapsto v(a_i), i \in I\}. \quad (2-2)$$

Lorsque K est un trapèze on prend pour l un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $l(x)=0$ soit une équation de la droite menée parallèlement aux deux côtés parallèles par le point de rencontre des côtés non parallèles.

Lorsque K est un parallélogramme, on convient de prendre, dans (2-1), $l(x) = 1$ pour tout $x \in K$.

On vérifie que les $w_i, i \in I$, sont les fonctions de base de P relativement à Σ , donc que le triplet (K, P, Σ) défini par (2-1) et (2-2) est un élément fini (au sens de Ciarlet [5]).

Théorème 2-1. *Élément fini (K, P, Σ) défini par (2-1) et (2-2) est de degré 1.*

Démonstration. Cf. Wachspress [15]. \square

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (2-1) et (2-2) est appelé *élément fini rationnel de Serendip de degré 1*. \square

Proposition 2-1. *Élément fini rationnel de Serendip de degré 1 est de classe C^0 .*

Démonstration. La propriété résulte du fait que les restrictions à chaque côté K' de K des fonctions de base w_i appartiennent à $P_1(K')$ (propriété des faisceaux de droites). \square

2.2. *Élément fini rationnel de Serendip de degré 2* (cf. Wachspress [15])

Pour tout $i \in I$ on note $a_{i-1,i}$ le milieu du côté d'extrémités a_{i-1} et a_i et $l_{i-1,i,i+1}$ un polynôme de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $l_{i-1,i,i+1}(x)=0$ représente une équation de la droite joignant les points $a_{i-1,i}$ et $a_{i,i+1}$.

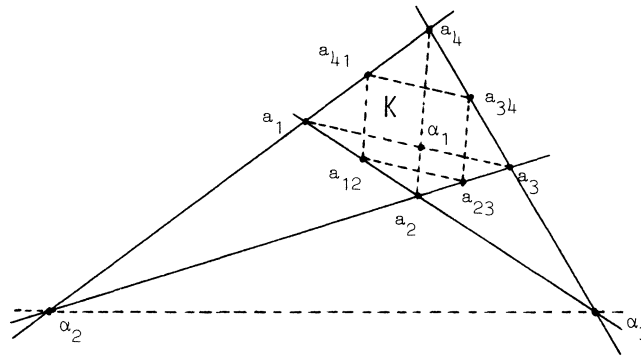


Fig. 2-1

Lorsque K est un quadrilatère non dégénéré en trapèze ou en parallélogramme on définit P comme l'espace vectoriel engendré par les fonctions w_i et $w_{i-1,i} (i \in I)$ définies, pour tout $x \in K$, par

$$w_i(x) = \frac{l(a_i)}{l_{i+2}(a_i)l_{i+3}(a_i)l_{i-1,i,i+1}(a_i)} \frac{l_{i+2}(x)l_{i+3}(x)l_{i-1,i,i+1}(x)}{l(x)} \tag{2-3}$$

$$w_{i-1,i} = \frac{l(a_{i-1,i})}{l_{i+1}(a_{i-1,i})l_{i+2}(a_{i-1,i})l_{i+3}(a_{i-1,i})} \frac{l_{i+1}(x)l_{i+2}(x)l_{i+3}(x)}{l(x)},$$

et

$$\Sigma = \bigcup_{i \in I} \{v \mapsto v(a_i), v \mapsto v(a_{i-1,i})\}. \tag{2-4}$$

Lorsque K est un trapèze ou un parallélogramme on procède comme dans le paragraphe 2.1.

On vérifie que les w_i et $w_{i-1,i}, i \in I$, sont les fonctions de base de P relativement à Σ , donc que le triplet (K, P, Σ) défini par (2-3) et (2-4) est un élément fini.

Théorème 2. L'élément fini (K, P, Σ) défini par (2-3) et (2-4) est de degré 2.

Démonstration (cf. Wachspress [15]). \square

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (2-3) et (2-4) est appelé *élément fini rationnel de Serendip de degré 2*. \square

Proposition 2-2. L'élément fini rationnel de Serendip de degré 2 est de classe C^0 .

Démonstration. La propriété résulte du fait que les restrictions à chaque côté de K des fonctions de base w_i et $w_{i-1}, i \in I$ définies dans (2-3) appartiennent à $P_2(K')$ (propriété des faisceaux de droites). \square

Remarque 2-1. Pour construire des éléments finis de degré strictement supérieur à 2, Wachspress suggère (cf. [15]) l'utilisation de noeuds d'interpolation intérieurs. Effectivement l'introduction de noeuds intérieurs est indispensable à partir du degré 4.

Mais, dans le cas du degré 3, il n'en est rien: nous allons construire un élément fini de degré 3 sans noeud intérieur, en utilisant une *transformation géométrique* qui fait correspondre un quadrilatère convexe à un carré et qui n'est pas de type «polynomial par composantes».

3. Transformation de Coxeter-Wachspress

3.1. *Définition* (cf. Wachspress [15]).

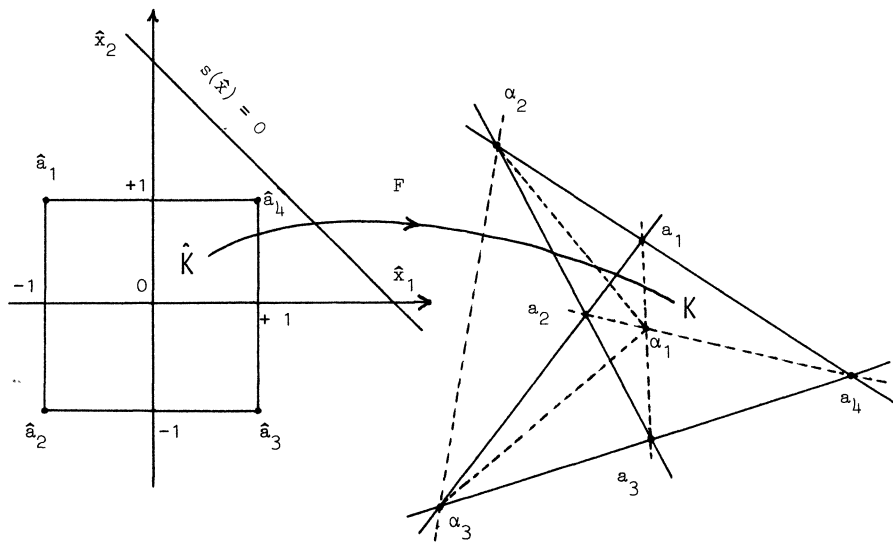


Fig. 3-1

Soit K un quadrilatère convexe non vide de \mathbb{R}^2 non dégénéré en trapèze ou parallélogramme défini comme dans le paragraphe 1.2. Soit \hat{K} le carré de \mathbb{R}^2 de

sommets $\hat{a}_1 = (-1, 1)$, $\hat{a}_2 = (-1, -1)$, $\hat{a}_3 = (1, -1)$ et $\hat{a}_4 = (1, 1)$. On note \hat{d}_i , $i \in I$, la droite passant par les sommets \hat{a}_{i-1} et \hat{a}_i .

A tout point $x \in K$ de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) on fait correspondre le triplet (k, m, n) représentant les coordonnées barycentriques de x par rapport aux trois points α_1, α_2 et α_3 de K . Ensuite au triplet (k, m, n) on associe le triplet (p, q, r) représentant les coordonnées projectives du vecteur (k, m, n) par rapport au repère projectif $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a_4)$, où, rappelons-le, a_4 est le point de K le plus éloigné de d , et l'on a :

$$(k_4 p, m_4 q, n_4 r) = (k, m, n),$$

(k_4, m_4, n_4) désignant les coordonnées barycentriques de a_4 par rapport à α_1, α_2 et α_3 .

Enfin, au triplet (p, q, r) on associe le triplet $(1, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$ en prenant $p = 1$. On vérifie alors que l'application qui à $x = (x_1, x_2)$ associe $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ est une bijection de K sur \hat{K} ; on note F_K sa bijection réciproque de \hat{K} sur K . Si $(x_1, x_2) = F_K(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, on a

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\alpha_{1,1} k_4 + \alpha_{1,2} m_4 \hat{x}_1 + \alpha_{1,3} n_4 \hat{x}_2}{s(\hat{x}_1, \hat{x}_2)} \\ x_2 &= \frac{\alpha_{2,1} k_4 + \alpha_{2,2} m_4 \hat{x}_1 + \alpha_{2,3} n_4 \hat{x}_2}{s(\hat{x}_1, \hat{x}_2)} \end{aligned} \tag{3-1}$$

où $\alpha_i = (\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i})$ pour $i = 1, 2, 3$ et où

$$s(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = k_4 + m_4 \hat{x}_1 + n_4 \hat{x}_2. \tag{3-2}$$

3.2. Propriétés

Utilisant les notations du paragraphe 3.1., il vient la

Proposition 3-1. *L'application F_K définie par (3-1) et (3-2) vérifie les propriétés suivantes :*

- $F_K(0) = \alpha_1$,
- $\forall i \in E, F_K(\hat{a}_i) = \alpha_i$,
- *Image par F_K d'une droite distincte de la droite d'équation $s(\hat{x}) = 0$ (privée éventuellement de son intersection avec cette droite) est une droite (privée éventuellement de son intersection avec la droite d).* (3-3)
- F_K conserve le birapport de quatre points alignés.
- F_K est un C^∞ -difféomorphisme de \hat{K} sur K .

Démonstration. Ces propriétés se déduisent des formules (3-1) et (3-2) et du fait que F_K est une «homographie». □

Proposition 3-2. *s étant défini par (3-2), on a*

$$k_4 > 1, \quad m_4 < 0 \quad \text{et} \quad n_4 < 0,$$

et

$$\forall \hat{x} \in \hat{K}, \quad s(\hat{x}) = \frac{l(a_4)}{l(x)}, \quad \text{avec } x = F_K(\hat{x}), \quad \text{et } s(\hat{x}) \geq 1. \quad (3-4)$$

Démonstration. On vérifié géométriquement que

$$k_4 > 1, \quad m_4 < 0 \quad \text{et} \quad n_4 < 0.$$

D'autre part, pour tout $x = (x_1, x_2) \in K$ on peut prendre

$$l(x_1, x_2) = x_1(\alpha_{2,3} - \alpha_{2,2}) - x_2(\alpha_{1,3} - \alpha_{1,2}) - \alpha_{1,2}\alpha_{2,3} + \alpha_{2,2}\alpha_{1,3}.$$

On déduit alors de (3-1) que

$$\begin{aligned} l(x_1, x_2) &= \frac{k_4[\alpha_{1,1}(\alpha_{2,3} - \alpha_{2,2}) - \alpha_{2,1}(\alpha_{1,3} - \alpha_{1,2}) - \alpha_{1,2}\alpha_{2,3} + \alpha_{2,2}\alpha_{1,3}]}{s(\hat{x}_1, \hat{x}_2)} \\ &= \frac{k_4 l(\alpha_1)}{s(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}. \end{aligned}$$

Or, puisque $k_4 + m_4 + n_4 = 1$,

$$k_4 l(\alpha_1) = l(a_4),$$

ce qui entraîne

$$s(\hat{x}) = \frac{l(a_4)}{l(x)},$$

et donc, vu l'hypothèse sur a_4 , que $s(\hat{x}) \geq 1$ sur \hat{K} . \square

Proposition 3-3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\{\hat{v}: \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}, \exists v \in P_k(K), \hat{v} = v \circ F_K\} = \left\{ \hat{v}: \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}, \exists \hat{p} \in P_k(\hat{K}), \hat{v} = \frac{\hat{p}}{s^k} \right\}$$

et

$$\{v: K \rightarrow \mathbb{R}, \exists \hat{v} \in P_k(\hat{K}), v = \hat{v} \circ F_K^{-1}\} = \left\{ v: K \rightarrow \mathbb{R}, \exists p \in P_k(K), v = \frac{p}{\hat{k}} \right\} \quad (3-5)$$

où F_K , s et l sont mis pour $F_{K|\hat{K}}$, $s|_{\hat{K}}$ et $l|_K$.

Démonstration. Il est clair que l'on a les deux inclusions suivantes

$$\begin{aligned} \{\hat{v}: \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}, \exists v \in P_k(K), \hat{v} = v \circ F_K\} &\subset \left\{ \hat{v}: \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}, \exists \hat{p} \in P_k(\hat{K}), \hat{v} = \frac{\hat{p}}{s^k} \right\} \\ \{v: K \rightarrow \mathbb{R}, \exists \hat{v} \in P_k(\hat{K}), v = \hat{v} \circ F_K^{-1}\} &\subset \left\{ v: K \rightarrow \mathbb{R}, \exists p \in P_k(K), v = \frac{p}{\hat{k}} \right\}, \end{aligned}$$

et compte tenu du fait que $\frac{1}{s} \circ F_K^{-1} = Cte \times l$, le résultat suit. \square

Des formules (3-1) on déduit la valeur du Jacobien de F_K en un point \hat{x} de \hat{K} , noté $J_K(\hat{x})$:

$$J_K(\hat{x}) = \frac{2(\text{aire du triangle } \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) k_4 m_4 n_4}{s^3(\hat{x})} \quad (3-6)$$

Il résulte de (3-4) que $J_K(\hat{x})$ est >0 pour tout $\hat{x} \in \hat{K}$. \square

On suppose maintenant que K est un élément de \mathcal{T}_h , $h \in \mathcal{H}_h$.

Proposition 3-4. *Sous l'hypothèse (1-1), on a, pour tout $\hat{x} \in \hat{K}$,*

$$s(\hat{x}) \leq \frac{\sup_{x \in \hat{K}} |l(x)|}{\inf_{x \in \hat{K}} |l(x)|} \leq 1 + \frac{1}{\nu} \quad (3-7)$$

et

$$\frac{\text{mes } K}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^3} \leq J_K(\hat{x}) \leq \frac{\text{mes } K}{4} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^3. \quad (3-8)$$

Démonstration. D'après (3-4) on a

$$\forall \hat{x} \in \hat{K}, \quad s(\hat{x}) \leq \frac{\sup_{x \in \hat{K}} |l(x)|}{\inf_{x \in \hat{K}} |l(x)|} = \frac{\delta(a_4, d)}{\inf_{x \in \hat{K}} d(x, d)}.$$

Or, par construction de K (paragraphe 1.2),

$$\delta(a_4, d) \leq h_K + \inf_{x \in \hat{K}} \delta(x, d)$$

D'où (3-7), d'après (1-1).

D'autre part

$$\text{mes } K = \int_{\hat{K}} J_K(\hat{x}) d\hat{x},$$

et, d'après (3-6),

$$2(\text{Aire du triangle } \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) k_4 m_4 n_4 = \frac{\text{mes } K}{\int_{\hat{K}} \frac{d\hat{x}}{s^3(\hat{x})}}.$$

Il vient alors, d'après (3-4) et (3-7), avec $\text{mes } \hat{K} = 4$:

$$\frac{\text{mes } K}{4} \leq 2(\text{Aire du triangle } \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) k_4 m_4 n_4 \leq \text{mes } K \frac{\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^3}{4},$$

et le résultat, en utilisant à nouveau (3-4), (3-6) et (3-7). \square

Remarque 3-1. Sous l'hypothèse (1-2), on déduit de (3-8) que, pour tout $\hat{x} \in \hat{K}$,

$$\frac{\Pi}{16\sigma^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^3} h_K^2 \leq J_K(\hat{x}) \leq \frac{\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^3}{4} h_K^2. \quad \square \quad (3-9)$$

Proposition 3-5. *Sous les hypothèses (1-1), (1-2) il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de K telle que*

$$\sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \|DF_K(\hat{x})\| \leq C h_K, \quad (3-10)$$

$$\sup_{x \in K} \|DF_K^{-1}(x)\| \leq \frac{C}{h_K}. \quad (3-11)$$

Démonstration. D'après (3-1), F_K est défini par

$$\forall (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \hat{K}, \quad x_i = \frac{\hat{\Psi}_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{s(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}, \quad i = 1, 2,$$

où $\hat{\Psi}_i \in P_1(\hat{K})$. Pour $j = 1, 2$, on a évidemment

$$\frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_j} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} \left(\frac{\hat{\Psi}_i - \alpha_{i,1} s}{s} \right),$$

où $\alpha = (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}) \in K$ a été défini au §1-2. On en déduit, en utilisant la proposition 3-2, que

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_j} \right|_{0, \infty, \hat{K}} \leq \left| \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} (\hat{\Psi}_i - \alpha_{i,1} s) \right|_{0, \infty, \hat{K}} + |s|_{1, \infty, \hat{K}} |\hat{\Psi}_i - \alpha_{i,1} s|_{0, \infty, \hat{K}}.$$

D'après un résultat dû à Wilhelmsen [16] on a

$$\left| \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} (\hat{\Psi}_i - \alpha_{i,1} s) \right|_{0, \infty, \hat{K}} \leq 2 |\hat{\Psi}_i - \alpha_{i,1} s|_{0, \infty, \hat{K}}$$

et

$$|s|_{1, \infty, \hat{K}} \leq 2 |s|_{0, \infty, \hat{K}}.$$

D'où, compte tenu de (3-7).

$$|\hat{\Psi}_i - \alpha_{i,1} s|_{0, \infty, \hat{K}} = |s(x_i - \alpha_{i,1})|_{0, \infty, \hat{K}} \leq \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) h_K$$

et

$$|s|_{1, \infty, \hat{K}} \leq 2 \left(1 + \frac{1}{\nu}\right).$$

On en déduit que pour $i, j = 1, 2$,

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_j} \right|_{0, \infty, \hat{K}} \leq 2 \left(1 + \frac{1}{\nu} \right) \left(2 + \frac{1}{\nu} \right) h_K,$$

d'où l'inégalité (3-10).

Il résulte également de (3-1) que F_K^{-1} est définie par

$$\forall (x_1, x_2) \in K, \quad \hat{x}_i = \frac{\Psi_i(x_1, x_2)}{l(x_1, x_2)}, \quad i = 1, 2,$$

où $\Psi_i \in P_1(K)$. On obtient comme précédemment, pour $j = 1, 2$,

$$\left| \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_j} \right|_{0, \infty, K} \leq \frac{1}{\inf_{x \in K} |l(x)|} \left| \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} \right|_{0, \infty, K} + \frac{\|Dl\|}{(\inf_{x \in K} |l(x)|)^2} |\Psi_i|_{0, \infty, K}.$$

Or

$$|\Psi_i|_{0, \infty, K} \leq \sup_{x \in K} |l(x)|$$

et, toujours d'après l'inégalité de Wilhelmsen.

$$\left| \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} \right|_{0, \infty, K} \leq \frac{4}{\rho_K} \sup_{x \in K} |l(x)|.$$

Alors

$$\left| \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_j} \right|_{0, \infty, K} \leq \frac{4}{\rho_K} \frac{\sup_{x \in K} |l(x)|}{\inf_{x \in K} |l(x)|} + \frac{\sup_{x \in K} |l(x)|}{\inf_{x \in K} |l(x)|} \frac{\|Dl\|}{\inf_{x \in K} |l(x)|}$$

soit, d'après (1-2), (3-7) et (1-1),

$$\left| \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_j} \right|_{0, \infty, K} \leq \left(1 + \frac{1}{\nu} \right) \left(4\sigma + \frac{1}{\nu} \right) \frac{1}{h_K}.$$

D'où l'inégalité (3-11). \square

Remarque 3-2. Sous l'hypothèse supplémentaire de *non-dégénérescence en parallélogrammes*

$$\exists \mu > 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \inf_{x \in K} \delta(x, d) \leq \mu h_K \tag{3-12}$$

[hypothèse nullement irréaliste, car il est facile de construire des familles de triangulations satisfaisant à (3-12)], on peut montrer le résultat suivant:

$$\exists C > 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h: \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \|D^2 F_K(\hat{x})\| \geq C h_K. \tag{3-13}$$

On en déduit que la situation des éléments finis rationnels de Wachspress est essentiellement *différente* de celle des éléments finis isoparamétriques usuels. En effet, dans le cas des «triangles ou des quadrilatères isoparamétriques de type (k)» (cf. [5]) par exemple, si on note \hat{K} l'élément de référence, K l'élément

isoparamétrique courant, \tilde{K} l'élément droit dont les sommets sont ceux de K , h le diamètre de \tilde{K} et F l'application isoparamétrique telle que $K = F(\tilde{K})$, on a (cf. [7]) des inégalités de la forme

$$\sup_{\hat{x} \in \tilde{K}} \|D^l F(\hat{x})\| \leq C_l h^l, \quad 1 < l \leq k + 1,$$

où les C_l sont des constantes indépendantes de h , relations qui sont manifestement contradictoires avec une inégalité du type (3-13).

4. Élément fini rationnel de serendip de degré 3

Soit K un quadrilatère convexe défini comme au paragraphe 1-2. Nous allons construire un élément fini de degré 3 sur K à partir d'un élément fini polynomial de degré 3 de type Serendip sur le carré de référence \hat{K} .

4.1. Construction d'un élément fini polynomial de serendip sur \hat{K} (à noeuds irrégulièrement répartis) de degré 3

Pour tout $i \in I$, soient $\hat{a}_{i,i,i+1}$ et $\hat{a}_{i+1,i+1,i}$ deux points quelconques du côté d'extrémités \hat{a}_i et \hat{a}_{i+1} , différents de \hat{a}_i et de \hat{a}_{i+1} et distincts ($\hat{a}_{i,i,i+1}$ désignant le point le plus proche du sommet a_i). Pour tout $i \in I$, on désigne par \hat{l}_i un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $\hat{l}_i(\hat{x}) = 0$ soit une équation de la droite \hat{d}_i et par $\hat{l}_{i,i,i+1}$ (resp. $\hat{l}_{i+1,i+1,i}$) un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $\hat{l}_{i,i,i+1}(\hat{x}) = 0$ (resp. $\hat{l}_{i+1,i+1,i}(\hat{x}) = 0$) soit une équation de la droite passant par le point $\hat{a}_{i,i,i+1}$ (resp. $\hat{a}_{i+1,i+1,i}$) et parallèle à \hat{d}_i (cf. Fig. 4-1).

Pour tout $i \in I$, soit d'autre part $\hat{\gamma}_i$ un élément de $P_2(\mathbb{R}^2)$ tel que $\hat{\gamma}_i(\hat{x}) = 0$ soit une équation de l'ellipse passant par les points $\hat{a}_{i-1,i-1,i}$, $\hat{a}_{i,i,i-1}$, $\hat{a}_{i,i,i+1}$, $\hat{a}_{i+1,i+1,i}$ et d'axes de symétrie parallèles aux axes de coordonnées (on vérifie sans difficulté l'existence et l'unicité d'une telle conique).

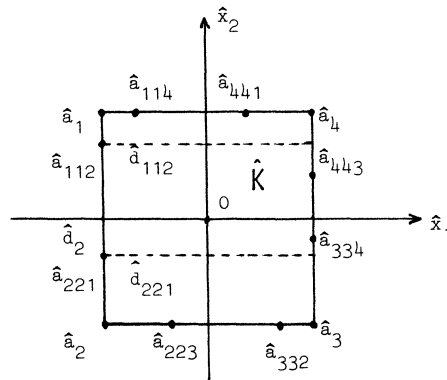


Fig. 4-1

Notons que, pour tout $i \in I$,

$$(\hat{\gamma}_i(\hat{x})) \text{ ne comporte pas de termes en } \hat{x}_1 \hat{x}_2. \quad (4-1)$$

Soient \hat{P} l'espace vectoriel engendré par les fonctions $\hat{w}_i, \hat{w}_{i,i,i+1}, \hat{w}_{i+1,i+1,i}, i \in I$, définies pour tout $\hat{x} \in \hat{K}$ par:

$$\begin{aligned} \hat{w}_i(\hat{x}) &= \frac{\hat{l}_{i+2}(\hat{x}) \hat{l}_{i+3}(\hat{x}) \hat{\gamma}_i(\hat{x})}{\hat{l}_{i+2}(\hat{a}_i) \hat{l}_{i+3}(\hat{a}_i) \hat{\gamma}_i(\hat{a}_i)}, \\ \hat{w}_{i,i,i+1}(\hat{x}) &= \frac{\hat{l}_i(\hat{x}) \hat{l}_{i+2}(\hat{x}) \hat{l}_{i+3}(\hat{x}) \hat{l}_{i+1,i+1,i}(\hat{x})}{\hat{l}_i(\hat{a}_{i,i,i+1}) \hat{l}_{i+2}(\hat{a}_{i,i,i+1}) \hat{l}_{i+3}(\hat{a}_{i,i,i+1}) \hat{l}_{i+1,i+1,i}(\hat{a}_{i,i,i+1})}, \\ \hat{w}_{i+1,i+1,i}(\hat{x}) &= \frac{\hat{l}_i(\hat{x}) \hat{l}_{i+2}(\hat{x}) \hat{l}_{i+3}(\hat{x}) \hat{l}_{i,i,i+1}(\hat{x})}{\hat{l}_i(\hat{a}_{i+1,i+1,i}) \hat{l}_{i+2}(\hat{a}_{i+1,i+1,i}) \hat{l}_{i+3}(\hat{a}_{i+1,i+1,i}) \hat{l}_{i,i,i+1}(\hat{a}_{i+1,i+1,i})}, \end{aligned} \quad (4-2)$$

et $\hat{\Sigma}$ l'ensemble.

$$\hat{\Sigma} = \bigcup_{i \in I} \{ \hat{v} \rightarrow \hat{v}(\hat{a}), \hat{v} \rightarrow \hat{v}(\hat{a}_{i,i,i+1}), \hat{v} \rightarrow \hat{v}(\hat{a}_{i+1,i+1,i}) \}. \quad \square \quad (4-3)$$

On vérifie que les $\hat{w}_i, \hat{w}_{i,i,i+1}$ et $\hat{w}_{i+1,i+1,i}, i \in I$, sont les fonctions de base de \hat{P} relativement à $\hat{\Sigma}$, donc que le triplet $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ défini par (4-2) et (4-3) est un élément fini. \square

Proposition 4-1. *L'élément fini $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ défini par (4-2) et (4-3) est de degré 3.*

Démonstration. Il est clair que $\hat{P} \ni P_4(\hat{K})$, puisque $\dim \hat{P} = 12, \dim P_4(\hat{K}) = 15$. D'autre part, soit $\hat{\Psi} \in P_3(\hat{K})$, quelconque. On considère la fonction \hat{v} définie sur \hat{K} par

$$\hat{v} = \hat{\Psi} - \sum_{i \in I} \{ \hat{\Psi}(\hat{a}_i) \hat{w}_i + \hat{\Psi}(\hat{a}_{i,i,i+1}) \hat{w}_{i,i,i+1} + \hat{\Psi}(\hat{a}_{i+1,i+1,i}) \hat{w}_{i+1,i+1,i} \}.$$

Il résulte de (4-2) que \hat{v} appartient à $P_4(\hat{K})$ et que la restriction de \hat{v} à chaque côté \hat{K}' de \hat{K} appartient à $P_3(\hat{K}')$.

On en déduit qu'il existe une constante C telle que

$$\forall (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \hat{K}, \quad \hat{v}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{C}(1 - \hat{x}_1^2)(1 - \hat{x}_2^2).$$

L'identification des mon mes en $\hat{x}_1^2 \hat{x}_2^2$ montre alors, compte tenu de (4-1), que $\hat{C} = 0$, d'où le résultat. \square

4-2.  l ment fini rationnel de Serendip sur K de degré 3

Soit K un quadrilatère convexe défini comme au paragraphe 1-2. Pour tout $i \in I$, soient $a_{i,i,i+1}, a_{i+1,i+1,i}$ les points de K (cf. Fig. (4-2)) définis par

$$a_{i,i,i+1} = \frac{1}{3}(2a_i + a_{i+1}), \quad a_{i+1,i+1,i} = \frac{1}{3}(a_i + 2a_{i+1}) \quad (4-4)$$

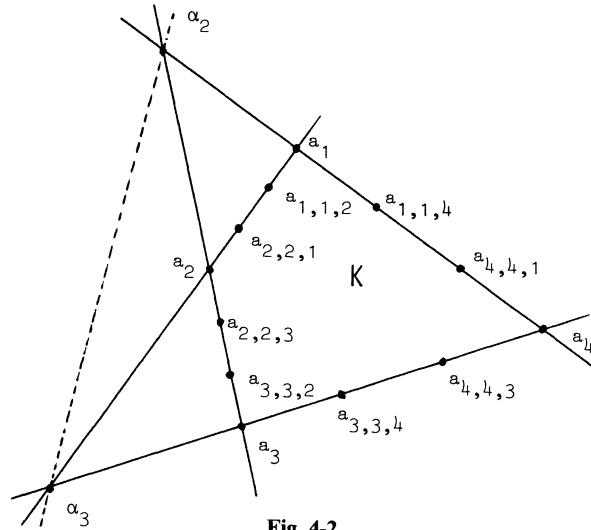


Fig. 4-2

et soient maintenant $\hat{a}_{i,i,i+1}^K, \hat{a}_{i+1,i+1,i}^K$ les points de \hat{K} définis par

$$\hat{a}_{i,i,i+1}^K = F_K^{-1}(a_{i,i,i+1}), \quad \hat{a}_{i+1,i+1,i}^K = F_K^{-1}(a_{i+1,i+1,i}). \tag{4-5}$$

Par la méthode du paragraphe 4-1, on construit alors un élément fini polynomial de Serendip $(\hat{K}, \hat{P}^K, \Sigma^K)$ à noeuds $\hat{a}_i^K, \hat{a}_{i,i,i+1}^K, \hat{a}_{i+1,i+1,i}^K, i \in I$, irrégulièrement répartis [où, pour tout $i \in I, \hat{a}_i^K = \hat{a}_i$ et où $\hat{a}_{i,i,i+1}^K$ et $\hat{a}_{i+1,i+1,i}^K$ sont définis par (4-4) et (4-5)]. Pour éviter toute ambiguïté, on note $\hat{l}_{i,i,i+1}^K, \hat{l}_{i+1,i+1,i}^K, \hat{\gamma}_i^K$ les polynômes introduits au paragraphe 4-1 et $\hat{w}_i^K, \hat{w}_{i,i,i+1}^K, \hat{w}_{i+1,i+1,i}^K$ les fonctions de base de $(\hat{K}, \hat{P}^K, \Sigma^K)$.

On désigne par P l'espace vectoriel engendré par les fonctions $w_i, w_{i,i,i+1}, w_{i+1,i+1,i}, i \in I$, définies pour tout $x \in K$ par

$$\begin{aligned} w_i(x) &= s^3(\hat{a}_i^K) \left[\left(\frac{\hat{w}_i^K}{s^3} \right) \circ F_K^{-1} \right] (x) \\ w_{i,i,i+1}(x) &= s^3(\hat{a}_{i,i,i+1}^K) \left[\left(\frac{\hat{w}_{i,i,i+1}^K}{s^3} \right) \circ F_K^{-1} \right] (x) \\ \dots \\ w_{i+1,i+1,i}(x) &= s^3(\hat{a}_{i+1,i+1,i}^K) \left[\left(\frac{\hat{w}_{i+1,i+1,i}^K}{s^3} \right) \circ F_K^{-1} \right] (x) \end{aligned} \tag{4-6}$$

et on note Σ l'ensemble

$$\Sigma = \bigcup_{i \in I} \{v \mapsto v(a_i), v \mapsto v(a_{i,i,i+1}), v \mapsto v(a_{i+1,i+1,i})\}. \quad \square \tag{4-7}$$

On vérifie que les $w_i, w_{i,i,i+1}, w_{i+1,i+1,i}$ sont les fonctions de base de P relativement à Σ , donc que le triplet (K, P, Σ) défini par (4-6) et (4-7) est un élément fini. \square

Remarquons que l'on peut obtenir, à partir de (4-6), une définition *locale* des fonctions de base de l'élément fini (K, P, Σ) , i.e. en fonction de la géométrie de K .

Pour tout $i \in I$, désignons par γ_i l'élément de $P_2(\mathbb{R}^2)$ défini pour tout $x \in K$ par

$$\gamma_i(x) = l^2(x) (\hat{\gamma}_i^K \circ F_K^{-1})(x)$$

et par $l_{i,i,i+1}, l_{i+1,i+1,i}$ les éléments de $P_1(\mathbb{R}^2)$ définis pour tout $x \in K$ par

$$\begin{aligned} l_{i,i,i+1}(x) &= l(x) (\hat{l}_{i,i,i+1}^K \circ F_K^{-1})(x), \\ l_{i+1,i+1,i}(x) &= l(x) (\hat{l}_{i+1,i+1,i}^K \circ F_K^{-1})(x). \end{aligned}$$

Il est clair que $\gamma_i(x) = 0$ est une équation d'une conique passant par les points $a_{i-1,i-1,i}, a_{i,i,i-1}, a_{i,i,i+1}, a_{i+1,i+1,i}$ (il est d'ailleurs aisé de déterminer un cinquième point de cette conique, qui se trouve alors entièrement déterminée par cinq de ses points). De même, $l_{i,i,i+1}$ (resp. $l_{i+1,i+1,i}$) est une équation de la droite joignant le point $a_{i,i,i+1}$ (resp. le point $a_{i+1,i+1,i}$) au point $F_K(\hat{b}_{i,i,i+1}^K)$ [resp. au point $F_K(\hat{b}_{i+1,i+1,i}^K)$] où $\hat{b}_{i,i,i+1}^K$ (resp. $\hat{b}_{i+1,i+1,i}^K$) désigne l'intersection de \hat{d}_{i+3} et de la droite d'équation $\hat{l}_{i,i,i+1}^K(\hat{x}) = 0$ [resp. d'équation $\hat{l}_{i+1,i+1,i}^K(\hat{x}) = 0$].

On en déduit que, pour tout $i \in I$, les fonctions de base de l'élément fini (K, P, Σ) s'écrivent encore, pour tout $x \in K$,

$$\begin{aligned} w_i(x) &= \frac{l_{i+2}(x) l_{i+3}(x) \gamma_i(x)}{l_{i+2}(a_i) l_{i+3}(a_i) \gamma_i(a_i)} \frac{l(a_i)}{l(x)} \\ w_{i,i,i+1}(x) &= \frac{l_i(x) l_{i+2}(x) l_{i+3}(x) l_{i+1,i+1,i}(x)}{l_i(a_{i,i,i+1}) l_{i+2}(a_{i,i,i+1}) l_{i+3}(a_{i,i,i+1}) l_{i+1,i+1,i}(a_{i,i,i+1})} \\ &\quad \cdot \frac{l(a_{i,i,i+1})}{l(x)} \tag{4-8} \\ w_{i+1,i+1,i}(x) &= \frac{l_i(x) l_{i+2}(x) l_{i+3}(x) l_{i,i,i+1}(x)}{l_i(a_{i+1,i+1,i}) l_{i+2}(a_{i+1,i+1,i}) l_{i+3}(a_{i+1,i+1,i}) l_{i,i,i+1}(a_{i+1,i+1,i})} \\ &\quad \cdot \frac{l(a_{i+1,i+1,i})}{l(x)}. \quad \square \end{aligned}$$

Théorème 4-1. *L'élément fini (K, P, Σ) défini par (4-6) et (4-7) est de degré 3.*

Démonstration. Il est clair que $P \ni P_4(K)$, puisque $\dim P = 12$, $\dim P_4(K) = 15$. Soit d'autre part $\Psi \in P_3(K)$. On considère la fonction v définie sur K par

$$v = \Psi - \sum_{i \in I} \{ \Psi(a_i) w_i + \Psi(a_{i,i,i+1}) w_{i,i,i+1} + \Psi(a_{i+1,i+1,i}) w_{i+1,i+1,i} \}.$$

Alors, compte tenu des relations (4-4) et (4-5), (4-6) et du fait que, d'après (3-5),

$$\exists \hat{\Psi} \in P_3(\hat{K}), \quad \Psi \circ F_K = \frac{\hat{\Psi}}{S^3},$$

on obtient

$$v \circ F_K = \frac{1}{S^3} (\hat{\Psi} - \sum_{i \in I} \{ \hat{\Psi}(\hat{a}_i^K) \hat{w}_i^K + \hat{\Psi}(\hat{a}_{i,i+1}^K) \hat{w}_{i,i+1}^K + \hat{\Psi}(\hat{a}_{i+1,i+1,i}^K) \hat{w}_{i+1,i+1,i}^K \}).$$

Comme (proposition 4-1) $\hat{P}^K \supset P_3(\hat{K})$, le résultat suit. \square

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (4-6) et (4-7) est appelé *élément fini rationnel de Serendip de degré 3*. \square

Proposition 4-2. *L'élément fini rationnel de Serendip de degré 3 est de classe C^0 .*

Démonstration. Considérant les expressions (4-8) des fonctions de base de l'élément fini (K, P, Σ) on constate que les restrictions des fonctions de base à chaque côté K' de K appartiennent à $P_3(K')$ [propriété des faisceaux de droites]. D'où le résultat. \square

Remarque 4-1. C'est parce que l'on ne connaît pas de méthode générale de construction d'éléments finis de Serendip sur \hat{K} de degré k quelconque (et à noeuds irrégulièrement répartis!) que l'on s'est borné à étudier les éléments finis rationnels de Serendip sur K de degré $k \leq 3$, qui ne font intervenir que des noeuds situés sur la frontière de K . Il est cependant possible de construire un élément fini rationnel de Serendip sur K de degré 4 (qui, lui, fait intervenir un noeud intérieur).

5. Estimation de l'erreur d'interpolation

Montrons un résultat préliminaire.

Lemme 5-1. *On suppose que la famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ vérifie (1-1). Soient $r \in \mathbb{N}$ un entier donné et w la fonction définie pour tout $x \in K$ par*

$$w(x) = \frac{\Psi(x)}{l(x)}, \quad (5-1)$$

où $\Psi \in P_r(\mathbb{R}^2)$ et où l est l'élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ introduit dans le paragraphe 1.2.

Alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $\mathcal{C}(m, r, v) > 0$ telle que

$$\forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad |w|_{m, \infty, K} \leq \frac{\mathcal{C}(m, r, v)}{\rho_K^m} \|w\|_{0, \infty, K}. \quad (5-2)$$

Démonstration. Soient $h \in \mathcal{H}$ et $K \in \mathcal{T}_h$ fixés.

D'après un résultat dû à Wilhelmsen [16], on a:

$$|\Psi|_{1, \infty, K} \leq \frac{4r^2}{\rho_K} \|\Psi\|_{0, \infty, K}. \quad (5-3)$$

De (5-3) on déduit par itération que

$$|\Psi|_{m, \infty, K} \leq \frac{C(m, r)}{\rho_K^m} \|\Psi\|_{0, \infty, K}, \tag{5-4}$$

où

$$C(m, r) = 4^m \left(\frac{r!}{(r-m)!} \right)^2$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, pour tout $x \in K$, on a, d'après la formule de Leibnitz,

$$\partial^\alpha w(x) = \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \alpha \\ \beta \in \mathbb{N}^2}} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \Psi(x) \partial^{\alpha-\beta} \left(\frac{1}{l} \right) (x),$$

où, pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, pour tout $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2$, $\beta \leq \alpha$ est mis pour

$$\forall i = 1, 2, \quad \beta_i \leq \alpha_i,$$

et où

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \binom{\alpha_2}{\beta_2}.$$

Par conséquent, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$|w|_{m, \infty, K} \leq \sup_{|\alpha|=m} \left(\sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\Psi|_{|\beta|, \infty, K} \left| \frac{1}{l} \right|_{|\alpha|-|\beta|, \infty, K} \right).$$

Utilisant (5-4) et l'inégalité

$$\|\Psi\|_{0, \infty, K} \leq \|l\|_{0, \infty, K} \|w\|_{0, \infty, K},$$

il vient

$$\begin{aligned} & |w|_{m, \infty, K} \\ & \leq \sup_{|\alpha|=m} \left(\sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{C(|\beta|, r)}{\rho_K^{|\beta|}} \frac{\|l\|_{0, \infty, K} \|Dl\|^{|\alpha|-|\beta|}}{(\inf_{x \in K} |l(x)|)^{1+|\alpha|-|\beta|}} (|\alpha|-|\beta|)! \|w\|_{0, \infty, K} \right). \end{aligned}$$

Compte tenu de l'hypothèse (1-1) et de la relation (3-7), on obtient

$$|w|_{m, \infty, K} \leq \left(1 + \frac{1}{v}\right) (m!) \sup_{|\alpha|=m} \left(\sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} C(|\beta|, r) \frac{1}{v^{|\alpha|-|\beta|}} \frac{\|w\|_{0, \infty, K}}{\rho_K^m} \right),$$

soit encore

$$|w|_{m, \infty, K} \leq \left(1 + \frac{1}{v}\right) (m!) \left(\frac{r!}{(r-m)!} \right)^2 \sup_{|\alpha|=m} \left(\sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{4^{|\beta|}}{v^{|\alpha|-|\beta|}} \right) \frac{\|w\|_{0, \infty, K}}{\rho_K^m}.$$

On vérifie que

$$\sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{4^{|\beta|}}{v^{|\alpha|-|\beta|}} = \left(4 + \frac{1}{v}\right)^{|\alpha|}$$

et donc le résultat, avec pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{E}(m, r, v) = \left(\frac{r!}{(r-m)!}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{v}\right) \left(4 + \frac{1}{v}\right)^m (m!). \quad \square \quad (5-5)$$

Le résultat fondamental utilisé dans ce paragraphe est le suivant:

Théorème 5-1. Soient $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre, avec $1 \leq p \leq +\infty$, tels que $k+1 > \frac{n}{p}$. Soient Ω un ouvert borné non vide de \mathbb{R}^n à frontière lipschitzienne, P un espace de dimension finie N de fonctions définies sur $\bar{\Omega}$, tel que $P_k(\bar{\Omega}) \subset P \subset C^{k+1}(\bar{\Omega})$ et $\Sigma = \{a_i\}_{i=1, \dots, N}$ un ensemble P -unisolvant de points de $\bar{\Omega}$. On suppose que $\bar{\Omega}$ est étoilé par rapport à chacun des points de Σ . Alors si Π désigne l'opérateur de P -interpolation relativement à Σ , $\{p_i\}_{i=1, \dots, N}$ l'ensemble des fonctions de base correspondantes et h le diamètre de Ω , on a, pour tout $v \in W^{k+1, p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} [v - \Pi v]_{m, p, \Omega} &\leq \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1 - \frac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^N [p_i]_{m, \infty, \Omega} \right) [v]_{k+1, p, \Omega} h^{k+1}, \quad 0 \leq m \leq k, \\ [v - \Pi v]_{k+1, p, \Omega} &\leq \frac{1}{k!} \left\{ \frac{1}{k+1 - \frac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^N [p_i]_{k+1, \infty, \Omega} \right) h^{k+1} + \left(\sum_{i=1}^N [p_i]_{k, \infty, \Omega} \right) h^k \right\} [v]_{k+1, p, \Omega}. \end{aligned} \quad (5-6)$$

Démonstration. Pour $m=0, 1, \dots, k$, cf. Arcangéli-Gout [2].

Soit $m=k+1$. Il suffit de montrer le résultat pour $v \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$. En dérivant l'identité (cf. [2], p.9).

$$\forall x \in \Omega, \quad D^k(\Pi v)(x) - D^k v(x) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^N J(v, a_i)(x) D^k p_i(x),$$

on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} D^{k+1}(\Pi v - v)(x) \cdot \xi &= \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^N J(v, a_i)(x) D^{k+1} p_i(x) \cdot \xi + DJ(v, a_i)(x) \cdot \xi D^k p_i(x). \end{aligned}$$

Mais en dérivant la relation (1-5) de [2], on obtient

$$\forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad DJ(v, a_i)(x) \cdot \xi = -D^{k+1} v(x) \cdot ((a_i - x)^k, \xi),$$

d'où le résultat, compte tenu de la proposition (1-1) de [2]. \square

Remarque 5-1. On obtient de façon analogue, pour tout $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$, les majorations

$$\begin{aligned}
 & |v - \Pi v|_{m,p,\Omega} \\
 & \leq \binom{n+m-1}{m}^{1/p} \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^N |p_i|_{m,\infty,\Omega} \right) [v]_{k+1,p,\Omega} h^{k+1}, \quad 0 \leq m \leq k, \\
 & |v - \Pi v|_{k+1,p,\Omega} \\
 & \leq \binom{n+k}{k+1}^{1/p} \frac{1}{k!} \left\{ \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^N |p_i|_{k+1,\infty,\Omega} \right) h^{k+1} \right. \\
 & \quad \left. + \left(\sum_{i=1}^N |p_i|_{k,\infty,\Omega} \right) h^k \right\} [v]_{k+1,p,\Omega}. \quad \square
 \end{aligned} \tag{5-7}$$

Donnons maintenant deux résultats permettant d'obtenir des majorations, indépendantes de h et de K , des normes $\|\cdot\|_{0,\infty,K}$ des fonctions de base des éléments finis rationnels de Serendip construits aux paragraphes 2 et 4.

Lemme 5-2. On suppose que la famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ vérifie (1-1). Pour tout $h \in \mathcal{H}$ et pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, on désigne par $d_{1,3}$ (resp. $d_{2,4}$) la diagonale intérieure de K passant par les points a_1 et a_3 (resp. par les points a_2 et a_4). Alors

$$\forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \inf_{i \in I} \delta(a_i, d_{i+1,i+3}) \geq \frac{\nu}{2+\nu} \rho_K. \tag{5-8}$$

Démonstration. Pour tout $i \in I$, soit $l_{i+1,i+3}$ un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $l_{i+1,i+3}(x) = 0$ soit une équation de $d_{i+1,i+3}$. On a évidemment

$$l_{i+1,i+3}(a_i) = \frac{l_{i+1,i+3} \circ F_K(\hat{a}_i)}{l_{i+1,i+3} \circ F_K(\hat{a}_{i+2})} l_{i+1,i+3}(a_{i+2}).$$

Or, d'après (3-5), il existe $\hat{l}_{i+1,i+3} \in P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que

$$l_{i+1,i+3} \circ F_K = \frac{\hat{l}_{i+1,i+3}}{s}.$$

Il vient alors

$$|l_{i+1,i+3}(a_i)| = \frac{|\hat{l}_{i+1,i+3}(\hat{a}_i)|}{s(\hat{a}_i)} \frac{s(\hat{a}_{i+2})}{|\hat{l}_{i+1,i+3}(\hat{a}_{i+2})|} |l_{i+1,i+3}(a_{i+2})|.$$

Etant donné que

$$\frac{|\hat{l}_{i+1,i+3}(\hat{a}_i)|}{|\hat{l}_{i+1,i+3}(\hat{a}_{i+2})|} = 1,$$

et que, d'après (3-4) et (3-7),

$$s(\hat{a}_{i+2}) \geq 1; \quad s(a_i) \leq 1 + \frac{1}{\nu}.$$

on obtient

$$\delta(a_i, d_{i+1, i+3}) \geq \frac{\nu}{1+\nu} \delta(a_{i+2}, d_{i+1, i+3}).$$

On vérifie géométriquement que

$$\forall i \in I, \quad \delta(a_i, d_{i+1, i+3}) + \delta(a_{i+2}, d_{i+1, i+3}) \geq \rho_K,$$

d'où le résultat. \square

Proposition 5-1. *On suppose que la famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ vérifie (1-1) et (1-2). Soient $h \in \mathcal{H}$ et $K \in \mathcal{T}_h$ fixés, et (K, P, Σ) un élément fini rationnel de Serendip de degré $k \leq 3$. Alors, pour toute fonction de base w d'un élément fini rationnel de Serendip de degré 1, 2 ou 3, il existe une constante $\mathcal{B}_w(\nu, \sigma) > 0$, indépendante de h et de K , telle que*

$$\|w\|_{0, \infty, K} \leq \mathcal{B}_w(\nu, \sigma). \quad (5-9)$$

Démonstration. 1) Le résultat est immédiat lorsque $k = 1$: $\|w\|_{0, \infty, K} = 1$ (cf. [3]). 2) Etudions maintenant le cas $k = 2$. Considérons les expressions (2-3) des fonctions de base. Pour tout $i \in I$, on a:

$$\forall x \in K, \quad |w_i(x)| \leq \left| \frac{l(a_i)}{l_{i+2}(a_i) l_{i+3}(a_i)} \frac{l_{i+2}(x) l_{i+3}(x)}{l(x)} \right| \left| \frac{l_{i-1, i, i+1}(x)}{l_{i-1, i, i+1}(a_i)} \right|$$

Il résulte du cas $k = 1$ que

$$\sup_{x \in K} \left| \frac{l(a_i)}{l_{i+2}(a_i) l_{i+3}(a_i)} \frac{l_{i+2}(x) l_{i+3}(x)}{l(x)} \right| = 1.$$

Par conséquent

$$\forall x \in K, \quad |w_i(x)| \leq \frac{|l_{i-1, i, i+1}(x)|}{|l_{i-1, i, i+1}(a_i)|} \leq \frac{2h_K}{\delta(a_i, d_{i+1, i+3})}.$$

Utilisant alors (5-8) et (1-2), on obtient

$$\forall i \in I, \quad \|w_i\|_{0, \infty, K} \leq \frac{2\sigma(2+\nu)}{\nu}.$$

On vérifie d'autre part que, pour tout $i \in I$, on a, d'après (3-5),

$$\begin{aligned} \forall x \in K, \quad w_{i-1, i}(x) &= \frac{s^2(\hat{a}_{i-1, i}^K)}{s^2(\hat{x})} \frac{\hat{l}_{i+1}(\hat{x}) \hat{l}_{i+2}(\hat{x}) \hat{l}_{i+3}(\hat{x})}{\hat{l}_{i+1}(\hat{a}_{i-1, i}^K) \hat{l}_{i+2}(\hat{a}_{i-1, i}^K) \hat{l}_{i+3}(\hat{a}_{i-1, i}^K)} \end{aligned}$$

où $\hat{a}_{i-1, i}^K = F_K^{-1}(a_{i-1, i})$ et $\hat{x} = F_K^{-1}(x)$. Avec (3-4) et (3-7), il vient

$$\|w_{i-1,i}\|_{0,\infty,K} \leq \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^2 \frac{1}{\delta(\hat{a}_{i-1,i}^K, \hat{a}_{i+1}) \delta(\hat{a}_{i-1,i}^K, \hat{a}_{i+3})}.$$

Il est clair que

$$\delta(\hat{a}_{i-1,i}^K, \hat{a}_{i+1}) = \delta(\hat{a}_{i-1,i}^K, \hat{a}_i).$$

D'après le théorème des accroissements finis,

$$\delta(a_{i-1,i}, a_i) \leq \delta(\hat{a}_{i-1,i}^K, \hat{a}_i) \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \|DF_K(\hat{x})\|,$$

d'où, d'après la proposition 3-5 et la relation (5-8),

$$\delta(\hat{a}_{i-1,i}^K, \hat{a}_{i+1}) \geq \frac{\nu^3}{8\sigma(2+\nu)(1+\nu)(1+2\nu)}.$$

On obtient la même minoration pour $\delta(\hat{a}_{i-1,i}^K, \hat{a}_{i+3})$. En conclusion,

$$\forall i \in I, \quad \|w_{i-1,i}\|_{0,\infty,K} \leq \frac{64\sigma^2(2+\nu)^2(1+\nu)^4(1+2\nu)^2}{\nu^8}.$$

3) Etudions enfin le cas $k=3$.

Considérons, par exemple, la fonction de base w_2 . D'après (4-6), (3-4) et (3-7) on a

$$\forall x \in K, \quad |w_2(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^3 |\hat{w}_2^K(\hat{x})|, \tag{5-10}$$

où $\hat{x} = F_K^{-1}(x)$. Compte tenu de (4-2), il vient

$$\sup_{\hat{x} \in \hat{K}} |\hat{w}_2^K(\hat{x})| \leq \frac{1}{|\hat{\gamma}_2^K(\hat{a}_2)|} \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} |\hat{\gamma}_2^K(\hat{x})|.$$

Soient \tilde{K} le carré $[0, 2] \times [0, 2]$ et τ la translation telle que

$$\hat{K} = \tau(\tilde{K}).$$

Posons alors $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tau^{-1}(\hat{x})$,

$$(\alpha, 0) = \tau^{-1}(\hat{a}_{223}^K),$$

$$(\beta, 0) = \tau^{-1}(\hat{a}_{332}^K),$$

$$(0, \gamma) = \tau^{-1}(\hat{a}_{221}^K),$$

$$(0, \delta) = \tau^{-1}(\hat{a}_{112}^K).$$

On vérifie que l'on peut définir $\hat{\gamma}_2^K$ par

$$(\hat{\gamma}_2^K \circ \tau)(\tilde{x}) = \frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta} \{ \gamma\delta\tilde{x}_1^2 + \alpha\beta\tilde{x}_2^2 - (\alpha+\beta)\gamma\delta\tilde{x}_1 - (\gamma+\delta)\alpha\beta\tilde{x}_2 + \alpha\beta\gamma\delta \},$$

et que, par conséquent,

$$\sup_{\hat{x} \in \hat{K}} |\hat{w}_2^K(\hat{x})| \leq \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} |(\hat{\gamma}_2^K \circ \tau)(\hat{x})|. \quad (5-11)$$

Or, il résulte du théorème des accroissements finis que

$$\delta(a_{223}, a_2) \leq \delta(\hat{a}_{223}^K, \hat{a}_2) \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \|DF_K(\hat{x})\|,$$

d'où, compte tenu de la proposition (3-5),

$$|\alpha| = \delta(\hat{a}_{223}^K, \hat{a}_2) \geq \frac{v^3}{12\sigma(v+1)(2v+1)(2+v)}. \quad (5-2)$$

On obtient des minoration analogues pour $|\beta|$, $|\gamma|$, $|\delta|$. On déduit alors de (5-10), (5-11), (5-12) qu'il existe une constante $\mathcal{B}_w(v, \sigma) > 0$ indépendante de h et de K telle que

$$\|w_2\|_{0, \infty, K} \leq \mathcal{B}_w(v, \sigma).$$

Il est clair que le résultat vaut pour les fonctions de base relatives aux autres sommets.

Le cas des fonctions de base relatives à des noeuds intermédiaires se traite de la même manière. Il suffit de remarquer que, pour $w_{2,2,3}$ par exemple, on a

$$\|w_{223}\|_{0, \infty, K} \leq \left(1 + \frac{1}{v}\right)^3 \frac{2}{\delta(\hat{a}_{223}^K, \hat{a}_2) \delta(\hat{a}_{223}^K, \hat{a}_3) \delta(\hat{a}_{332}^K)}$$

d'où la proposition 5-1. \square

Finalement, on obtient le

Théorème 5-2. *On suppose que la famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ vérifie (1-1) et (1-2). Soient $h \in \mathcal{H}$ et $K \in \mathcal{T}_h$ fixés, (K, P, Σ) un élément fini rationnel de Serendip de degré $k \leq 3$ et Π l'opérateur de P -interpolation relativement à Σ . Alors, pour tout $m = 0, 1, \dots, k+1$, il existe une constante $C(m, k, p, v, \sigma)$, indépendante de h et de K , telle que, pour tout $v \in W^{k+1, p}(K)$, avec $k+1 > \frac{2}{p}$,*

$$|v - \Pi v|_{m, p, K} \leq C(m, k, p, v, \sigma) [v]_{k+1, p, K} h_K^{k+1-m}. \quad (5-13)$$

Démonstration. On applique successivement les relations (5-7), (5-2) et (5-9). \square

Remarque 5-2. Désignons par $\{w_i\}_{1 \leq i \leq N_k}$ l'ensemble des fonctions de base de l'élément fini rationnel de Serendip de degré k (K, P, Σ) . Il résulte de la proposition 5-1 qu'il existe une constante $\mathcal{B}(v, \sigma)$, indépendante de h et de K telle que

$$\sum_{i=1}^{N_k} \|w_i\|_{0, \infty, K} \leq \mathcal{B}(v, \sigma).$$

Alors si $\mathcal{C}(m, r, v)$ est la constante introduite dans le lemme 5-1 la constante $C(m, k, p, v, \sigma)$ du théorème 5-2 peut s'écrire:

$$C(m, k, p, v, \sigma) = \frac{(m+1)^{1/p}}{k!} \frac{\left(1 + \frac{1}{v}\right)^k}{k+1 - \frac{2}{p}} \sigma^m \mathcal{B}(v, \sigma) \mathcal{C}(m, k+1, v),$$

lorsque $0 \leq m \leq k$, et

$$C(k+1, k, p, v, \sigma) = \frac{(k+2)^{1/p}}{k!} \left(1 + \frac{1}{v}\right)^k \mathcal{B}(v, \sigma) \left[\frac{\sigma^{k+1}}{k+1 - \frac{2}{p}} \mathcal{C}(k+1, k+1, v) + \sigma^k \mathcal{C}(k, k+1, v) \right]$$

lorsque $m = k+1$. \square

Notons que les relations (5-13) s'écrivent encore, pour $m = 0, 1, \dots, k+1$,

$$|v - \Pi v|_{m, p, K} \leq C_1(m, k, p, v, \sigma) |v|_{k+1, p, K} h^{k+1-m}, \tag{5-14}$$

où $C_1(m, k, p, v, \sigma)$ ne dépend pas de h et de K . \square

On obtient donc, pour les éléments finis rationnels de Serendip de degré $k \leq 3$, les mêmes ordres asymptotiques d'erreur que pour les éléments finis usuels de même degré. \square

Remarque 5-3. Reprenant la démonstration du théorème 3-3 de [3], on montre le résultat suivant pour les éléments finis rationnels de Serendip de degré $k \leq 3$:

il existe un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 , une suite $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ de triangulations (au sens du paragraphe 1-2) de $\bar{\Omega}$ et un élément $\Psi \in P_{k+1}(\bar{\Omega})$, tels que

$$\forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad |\Psi - \Pi \Psi|_{k+1, p, K} \geq C(\Psi) (\text{mes } K)^{1/p},$$

où $C(\Psi)$ est une constante > 0 indépendante de h et de K .

Il résulte alors du lemme 5-1 que l'ordre asymptotique d'erreur $k+1-m$ dans les formules (5-13) est *optimal*.

Bibliographie

1. Apprato, D.: Thèse 3ème cycle. Pau (1978)
2. Arcangeli, R., Gout, J.L.: Sur l'évaluation de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert de \mathbb{R}^n . R.A.I.R.O. Analyse Numérique **10**, 5-27 (1976)
3. Arcangeli, R., Gout, J.L., Royer, R.: Étude de l'erreur d'interpolation rationnelle de Wachspress sur un polygone. Publications Mathématiques de PAU (1976)
4. Ciarlet, P.G.: Numerical analysis of the finite element method. Université de Montréal (1975)
5. Ciarlet, P.G.: The finite element method for elliptic problems. Amsterdam: North Holland 1977
6. Ciarlet, P.G., Raviart, P.A.: General Lagrange and Hermite interpolation in \mathbb{R}^n with applications in finite element methods. Arch. Rational Mech. Anal. **46**, 177-199 (1972)

7. Ciarlet, P.G., Raviart, P.A.: Interpolation theory over curved elements with applications to finite element methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **1**, 217–249 (1972)
8. Coatmelec, C.: Approximation et interpolation des fonctions différentiables de plusieurs variables. *Ann. Sci. École. Norm. Sup.* (3), **83**, 271–341 (1966)
9. Raviart, P.A.: *Méthode des éléments finis*, rédigé par J.M. Thomas, D.E.A. Analyse Numérique, Paris VI, (1971–1972)
10. Scott, F.: A quartic two dimensional isoparametric element, Undergraduate Project, Univ. of Wales, Swansea, 1968
11. Strang, G.: Approximation in the finite element method. *Numer. Math.* **19**, 81–98 (1972)
12. Wachspress, E.L.: A rational basis for function approximation, Proc. Conf. of Appl. Numerical Anal. Dundee. *Lecture Notes in Math.* **228**, 223–252. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
13. Wachspress, E.L.: A rational basis for function approximation, Part II, curved sides. *J. Inst. Math. Appl.* **11**, 83–104 (1973)
14. Wachspress, E.L.: Algebraic geometry foundations for finite element computation, Conf. Numerical Sol. Diff. Eqs, Dundee. *Lectures Notes in Math.* **363**, 177–188. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974
15. Wachspress, E.L.: *A rational finite element Basis*. New York: Academic Press 1975
16. Wilhelmsen, R.: A Markov inequality in several dimensions. *Journal Approximation Theory* **11**, 216–220 (1974)
17. Zienkiewicz, O.C.: *La méthode des éléments finis*. Paris: Ediscience 1973

Received April 27, 1978