

THÈSE

de

DOCTORAT D'ÉTAT ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

par

Jean-Louis GOUT

pour obtenir

le grade de DOCTEUR-ES-SCIENCES

ELEMENTS FINIS POLYGONAUX DE WACHSPRESS

soutenu le 6 JUIN 1980 devant la Commission d'Examen

C. COATMELEC	Président
R. ARCANGELI	} Examineurs
M. ATTELA	
P. G. CIARLET	
J. GENET	
E. L. WACHSPRESS	

N° d'ordre : 34

THÈSE

de

DOCTORAT D'ÉTAT ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

par

Jean-Louis GOUT

pour obtenir

le grade de DOCTEUR-ES-SCIENCES

ELEMENTS FINIS POLYGONAUX DE WACHSPRESS

soutenue le 6 JUIN 1980 devant la Commission d'Examen

C. COATMELEC	Président
R. ARCANGELI	} Examineurs
M. ATTELA	
P. G. CIARLET	
J. GENET	
E. L. WACHSPRESS	

à Maïté ,

à Christian .

- Remerciements -

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur R. ARCANGELI qui m'a donné le goût de l'analyse numérique, m'a proposé le sujet de cette recherche et sans l'aide duquel cette thèse n'aurait pas vu le jour, à Monsieur E.L. WACHSPRESS dont les travaux ont inspiré le thème de ce mémoire, à Monsieur P.G. CIARLET qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et dont les conseils ont toujours été extrêmement efficaces, à Monsieur C. COATMELEC pour les critiques et suggestions qu'il a formulées et qui me fait l'honneur de présider le jury.

Je remercie Monsieur J. GENET qui m'a souvent manifesté sa bienveillance, et Monsieur M. ATTEIA qui acceptent de faire partie de mon jury.

Je tiens aussi à remercier Monsieur P.A. RAVIART pour ses suggestions et l'aide qu'il m'a apportée lorsque j'ai entrepris ce travail.

Je remercie également Monsieur J. MEINGUET ainsi que Madame S. ARCANGELI, Monsieur D. APPRATÒ et Monsieur R. ROYER dont la collaboration en diverses occasions m'a été précieuse.

Mes remerciements vont aussi à l'ensemble de mes collègues du Département de Mathématiques qui m'ont permis de travailler dans d'excellentes conditions.

Je remercie enfin Mademoiselle ABEL qui avec sa compétence habituelle a assuré la réalisation de ce texte, ainsi que tous les membres du service d'Imprimerie de la Faculté des Sciences.

P L A N

	<u>Pages</u>
<u>INTRODUCTION</u>	1.9
 <u>CHAPITRE 0 : NOTATIONS</u>	
0.1 <u>RAPPELS</u>	0.1 - 0.3
0.2 <u>INTERPOLATION D'HERMITE</u>	0.4 - 0.5
0.3 <u>ELEMENTS FINIS</u>	0.6 - 0.8
 <u>CHAPITRE 1 : ETUDE DE L'ERREUR D'INTERPOLATION</u>	
<u>D'HERMITE DANS \mathbb{R}^n</u>	
1.1 <u>RESULTATS PRELIMINAIRES</u>	1.2 - 1.7
1.2 <u>ETUDE DE L'ERREUR D'INTERPOLATION D'HERMITE A</u> <u>PARTIR D'UNE FORMULE DE TAYLOR MULTIPONCTUELLE ..</u>	1.8 - 1.16
1.3 <u>ETUDE DE L'ERREUR D'INTERPOLATION D'HERMITE PAR</u> <u>UNE METHODE BASEE SUR L'APPROXIMATION</u>	1.17 - 1.21

CHAPITRE 2 : ELEMENTS FINIS RATIONNELS DE TYPE

WACHSPRESS SUR UN QUADRILATERE

2.1	<u>NOTATIONS GEOMETRIQUES</u>	2.1 - 2.2
2.2	<u>TRANSFORMATION DE COXETER-WACHSPRESS</u>	2.3 - 2.7
2.3	<u>ELEMENTS FINIS RATIONNELS DE SERENDIP DE DEGRES</u> <u>1 et 2</u>	
2.3.1	<u>Elément fini rationnel de Serendip de</u> <u>degré 1</u>	2.8 - 2.9
2.3.2	<u>Elément fini rationnel de Serendip de</u> <u>degré 2</u>	2.9 - 2.12
2.4	<u>ELEMENT FINI RATIONNEL DE SERENDIP DE DEGRE 3</u>	2.13 - 2.15
2.5	<u>ELEMENT FINI RATIONNEL DE SERENDIP DE DEGRE 4</u>	
2.5.1	<u>Construction d'un élément fini polynomial</u> <u>de Serendip de degré \hat{K} (à noeuds irréguliè-</u> <u>rement répartis)</u>	2.16 - 2.19
2.5.2	<u>Construction d'un élément fini rationnel de</u> <u>Serendip de degré 4 sur K</u>	2.19 - 2.24
2.6	<u>CONSTRUCTION D'UN ELEMENT FINI RATIONNEL D'HERMITE</u> <u>DE DEGRE 3 SUR UN QUADRILATERE</u>	
2.6.1	<u>Résultat préliminaire</u>	2.25 - 2.30
2.6.2	<u>Propriétés</u>	2.31 - 2.40

CHAPITRE 3 : ELEMENTS FINIS RATIONNELS PENTAGONAUX ET
HEXAGONAUX DE TYPE WACHSPRESS

3.1	<u>NOTATIONS GEOMETRIQUES ET RAPPEL D'UN RESULTAT</u>	3.2 - 3.3
3.2	<u>ELEMENTS FINIS PENTAGONAUX DE WACHSPRESS DE DEGRES</u> <u>1 ET 2</u>	
3.2.1	<u>Elément fini pentagonal de Wachspress de</u> <u>degré 1</u>	3.6 - 3.8
3.2.2	<u>Elément fini pentagonal de Wachspress de</u> <u>degré 2</u>	3.8 - 3.11
3.3	<u>ELEMENTS FINIS HEXAGONAUX DE WACHSPRESS DE DEGRES</u> <u>1 ET 2</u>	
3.3.1	<u>Elément fini hexagonal de Wachspress de</u> <u>degré 1</u>	3.12-3.17
3.3.2	<u>Elément fini hexagonal de Wachspress de</u> <u>degré 2</u>	3.17-3.20
3.4	<u>ELEMENT FINI RATIONNEL DE LAGRANGE DE DEGRE 3 SUR</u> <u>UN HEXAGONE REGULIER</u>	3.21-3.27
3.5	<u>ELEMENT FINI RATIONNEL D'HERMITE DE DEGRE 3 SUR UN</u> <u>HEXAGONE REGULIER</u>	3.28-3.36

CHAPITRE 4 : ESTIMATIONS DE L'ERREUR D'INTERPOLATION
CONCERNANT LES ELEMENTS FINIS DROITS
POLYNOMIAUX ET RATIONNELS

4.1	<u>UNE INEGALITE INVERSE POUR LES FONCTIONS RATIONNELLES..</u>	4.2 - 4.10
4.2	<u>HYPOTHESES ET RESULTATS PRELIMINAIRES CONCERNANT</u> <u>LES ELEMENTS FINIS DE WACHSPRESS</u>	4.11-4.24
4.3	<u>APPLICATIONS A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS DROITS</u> <u>POLYNOMIAUX</u>	
4.3.1	<u>Application du théorème 1.2.1.....</u>	4.25-4.28
4.3.2	<u>Application des théorèmes 1.3.1 et 1.3.2.....</u>	4.28-4.30
4.3.3	<u>Exemples numériques.....</u>	4.31-4.38
4.4	<u>APPLICATIONS AUX ELEMENTS FINIS RATIONNELS DE</u> <u>WACHSPRESS</u>	
4.4.1	<u>Cas des éléments finis rationnels de type</u> <u>Wachspress sur un quadrilatère</u>	4.39-4.50
4.4.2	<u>Cas des éléments finis pentagonaux ou hexa-</u> <u>gonaux de Wachspress</u>	4.51-4.60
4.4.3	<u>Exemples numériques</u>	4.61-4.62
4.5	<u>OPTIMALITE DES MAJORATIONS DE L'ERREUR D'INTERPOLA-</u> <u>TION</u>	4.63-4.73

CHAPITRE 5 : EFFET DE L'INTEGRATION NUMERIQUE DANS LA
RESOLUTION D'UN PROBLEME D'ORDRE DEUX PAR
ELEMENTS FINIS RATIONNELS

5.1	<u>RAPPELS</u>	
5.1.1	<u>Généralités</u>	5.2 - 5.3
5.1.2	<u>Rappels</u>	5.3 - 5.5
5.2	<u>DEFINITION DU PROBLEME NUMERIQUE APPROCHE</u>	
5.2.1	<u>Position du problème</u>	5.6 - 5.7
5.2.2	<u>Définition et existence de formules de quadrature numérique.</u>	5.8 - 5.15
5.2.3	<u>Schéma d'étude</u>	5.15 - 5.17
5.3	<u>V_{oh} - ELLIPTICITE UNIFORME DE LA FORME a_h</u>	
5.3.1	<u>Cas des éléments finis rationnels de Wachspress quadrilatéraux</u>	5.18
5.3.2	<u>Cas des éléments finis rationnels de Wachspress sur un hexagone régulier.....</u>	5.19 - 5.21
5.4	<u>MAJORATIONS DE $E_K^1(a_{ij}; \frac{\partial v_h}{\partial x_j}, \frac{\partial w_h}{\partial x_i})$ ET DE $E_K^2(\tau w_h)$</u>	
5.4.1	<u>Cas des éléments finis rationnels de Wachspress quadrilatéraux</u>	5.22 - 5.23
5.4.2	<u>Cas des éléments finis rationnels de Wachspress sur un hexagone régulier</u>	5.23 - 5.27

5.5	<u>MAJORATION DE L'ERREUR $u-u_h^* _{1,\Omega}$</u>	5.28-5.30
5.6	<u>REMARQUES SUR LES EXEMPLES NUMERIQUES</u>	
5.6.1	<u>Considérations sur les formules de quadrature...</u>	5.31-5.32
5.6.2	<u>Essai de comparaison entre éléments finis polynomiaux et éléments finis rationnels</u>	5.32-5.40
	<u>ANNEXE</u>	A-1 - A-8
	<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	B-1 - B-9

=====



I N T R O D U C T I O N

La plupart des éléments finis droits usuels dans \mathbb{R}^2 , autres que les éléments finis isoparamétriques, sont polynomiaux en ce sens que l'espace d'interpolation est un espace de polynômes, et construits sur des triangles ou des rectangles (il y a bien sûr des exceptions : les macro-éléments, le triangle singulier de ZIENKIEWICZ [26], le triangle de BIRKHOFF-MANSFIELD [26],...).

Il est donc naturel (cf. E.L. WACHSPRESS [85]) de vouloir construire des éléments finis sur des ensembles K qui soient des polygones convexes quelconques à N côtés ($N \geq 4$).

Soient alors, par exemple, un quadrilatère K , différent d'un parallélogramme, de sommets a_1, a_2, a_3 et a_4 , et Σ l'ensemble

$$\Sigma = \{v \mapsto v(a_i), 1 \leq i \leq 4\} .$$

Essayons de construire un élément fini conforme polynomial à partir de K et de Σ : un élément fini (au sens de CIARLET [26]), étant un triplet (K, P, Σ) , il reste à déterminer l'espace d'interpolation P .

La théorie des éléments finis montre que si l'on excepte les éléments finis non conformes et les éléments finis isoparamétriques, tout élément fini

droit doit (évidemment) vérifier la propriété

$$(1) \quad (K, P, \Sigma) \text{ est de classe } C^0 ,$$

et (sous peine de ne présenter que peu d'intérêt du point de vue de l'approximation) satisfaire à la condition

$$(2) \quad P \supset P_k(K) ,$$

où $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que P soit un espace de polynômes vérifiant les conditions (1) et (2) : on a, puisque $\text{card } \Sigma = 4$,

$$P = P_1(K) \oplus \{c\psi\}$$

où $c \in \mathbb{R}$ et où le polynôme ψ ne comporte que des termes de degré strictement supérieur à 1 (par rapport à l'ensemble des 2 variables). D'après la condition (2) ψ s'annule nécessairement sur deux côtés opposés de K . Il est donc clair que (K, P, Σ) ne peut être un élément fini (ψ s'annulant en tous les points a_i).

Ainsi donc on ne peut choisir pour P un espace de polynômes (c'est ce que E.L. WACHSPRESS appelle "inadequacy of polynomials" dans [85]).

D'où la prise en considération d'espaces d'interpolation engendrés par des fonctions rationnelles.

Il n'est nullement évident à priori (cf. D. APPRATO, R. ARCANGELI et J.L. GOUT [7]) qu'une interpolation de type rationnel conduise à une approximation convergente pour les topologies usuelles.

Considérons en effet l'exemple simple suivant.

Soient $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un segment et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$\Omega =]a,b[, \quad h = \frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad \forall i=0,1,\dots,n \quad x_i = a+ih .$$

Soient alors les fonctions p_i , $i = 0,1,\dots,n$ ainsi définies : pour tout $i = 0,1,\dots,n$, p_i est nulle hors de $[x_{i-1}, x_{i+1}] \cap [a,b]$; de plus

$$\forall x \in [a, x_1] , \quad p_0(x) = \frac{x_1 - x}{h + x - a} ,$$

$$\forall x \in [x_{n-1}, b] , \quad p_n(x) = \frac{x - x_{n-1}}{h + b - x} ,$$

et pour tout $i = 1, \dots, n-1$

$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i] , \quad p_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h + x_i - x} ,$$

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}] , \quad p_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h + x - x_i} .$$

On vérifie immédiatement que

$$\forall i, j = 0, \dots, n \quad p_i(x_j) = \delta_{ij} ,$$

et donc qu'à toute fonction u continue sur Ω , on peut associer l'interpolé rationnel

$$\Pi u = \sum_{i=0}^n u(x_i) p_i .$$

Alors si u désigne la fonction $x \mapsto 1$ et si on pose

$$\delta_h = u - \sum_{i=1}^n u(x_i) p_i ,$$

il est facile de vérifier que, pour tout $i = 1, \dots, n$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \delta_h(x) dx \geq \frac{h}{6} ,$$

et donc que, si l'on note K_i le segment $[x_{i-1}, x_i]$,

$$(3) \quad |\delta_h|_{0, K_i} \geq \frac{h^{1/2}}{6} , \quad 1 \leq i \leq n .$$

Des relations (3) on déduit

$$|\delta_h|_{0, \Omega} \geq \frac{1}{6} (\text{mes } \Omega)^{1/2} ,$$

ce qui montre que, lorsque $h \rightarrow 0$, $|\delta_h|_{0, \Omega}$ ne tend pas vers 0 (et à fortiori que $\lim_{h \rightarrow 0} |\delta_h|_{0, \infty, \Omega} \neq 0$). Or on constate que, dans cet exemple, l'espace d'interpolation P_{K_i} , engendré par les fonctions $p_{i-1}|_{K_i}$ et $p_i|_{K_i}$, ne contient pas l'espace $P_0(K_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Introduisant alors, pour tout $i = 0, 1, \dots, n$, les fonctions w_i , définies sur $\bar{\Omega} = [a, b]$ par

$$w_i = \frac{p_i}{\sum_{i=0}^n p_i} ,$$

et si u désigne maintenant la fonction $x \mapsto x$ et δ_h la fonction $u - \sum_{i=1}^n u(x_i) w_i$, on vérifie que, pour $i = 1, \dots, n$

$$(4) \quad \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\delta'_h(x)|^2 dx = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{1-v^2}{(1+v^2)^2} \right]^2 \frac{h\sqrt{3}}{2} dv ,$$

(en effectuant le changement de variable $x - \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = \frac{h\sqrt{3}}{2} v$).

On déduit alors des relations (4) que pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$|\delta_h|_{1, K_i}^2 \geq \frac{h}{9\sqrt{3}},$$

et donc que

$$|\delta_h|_{1, \Omega} \geq \frac{(\text{mes } \Omega)^{1/2}}{3\sqrt{3}}.$$

Ainsi δ_h ne tend pas vers 0 en norme $H^1([a, b[)$. Dans ce dernier cas on vérifie que l'espace d'interpolation P_{K_i} , $1 \leq i \leq n$, engendré par les fonctions $w_{i-1}|_{K_i}$ et $w_i|_{K_i}$, s'il contient $P_0(K_i)$, ne contient pas $P_1(K_i)$.

Il apparaît en fait que, dans le cas d'une interpolation rationnelle définie à partir d'éléments finis droits de type Wachspress, comme dans le cas d'une interpolation polynomiale définie à partir d'éléments finis droits usuels, la condition

$$P_K \supset P_k(K), \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

est essentielle dans l'étude de l'erreur d'interpolation et conditionne donc leur construction, comme on le montrera dans la suite (cf. également E.L. WACHSPRESS [85], D. APPRATO, R. ARCANGELI et J.L. GOUT [7]). On a des problèmes analogues dans le cas des éléments finis courbes de type Wachspress, non étudiés ici. (cf. D. APPRATO [4], E.L. WACHSPRESS [85]).

L'ensemble de ce travail a pour objet, à la suite des résultats de E.L. WACHSPRESS, de construire des éléments finis rationnels sur des quadrilatères, des pentagones ou des hexagones convexes, et d'étudier leurs propriétés d'approximation ainsi que les conditions de leur utilisation dans la résolution des problèmes elliptiques d'ordre deux.

Le chapitre 1 est consacré à une étude de l'erreur d'interpolation d'Hermite dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , ayant pour point de départ un article de P.G. CIARLET et P.A. RAVIART [27].

Les résultats obtenus généralisent à l'interpolation d'Hermite des résultats sur l'interpolation de Lagrange obtenus en collaboration avec R. ARCANGELI [8]. Certains d'entre eux améliorent des résultats de l'auteur (cf. [45]).

Deux méthodes sont proposées pour cette étude : la première est basée sur une formule de Taylor multiponctuelle, la seconde sur des résultats d'approximation faisant suite à ceux de J. MEINGUET [59] donnant un encadrement de l'erreur de meilleure approximation uniforme. Dans les deux cas on évite le recours à un élément fini de référence tel qu'il est utilisé par P.G. CIARLET et P.A. RAVIART dans [27]. Sur le même sujet indiquons encore les travaux de C. COATMELEC [32], G. STRANG [74] et J. GELINAS [43]. De plus on explicite les constantes donnant les majorations de l'erreur d'interpolation en fonction, en particulier, des semi-normes des fonctions de base des éléments finis concernés.

Les deux chapitres suivants ont pour objet la construction d'éléments finis rationnels de Wachspress sur des polygones convexes fermés, non

dégénérés, à N côtés ($N \geq 4$) ainsi que l'étude de leurs propriétés : le chapitre 2 traite des éléments finis quadrilatéraux, le chapitre 3 des éléments finis pentagonaux et hexagonaux.

Tous ces éléments finis sont de classe C^0 ; ils sont de type Lagrange sauf deux d'entre eux, l'un quadrilatéral, l'autre construit sur un hexagone régulier, qui sont de type Hermite. Les principales caractéristiques de la construction de ces éléments finis sont les suivantes (cf. F.L. WACHSPRESS [85]) :

- on désigne par q un élément de $P_{N-3}(\mathbb{R}^2)$ tel que $q(x) = 0$ soit une équation de la courbe de degré $N-3$ (éventuellement dégénérée) passant par les $\frac{N(N-3)}{2}$ points diagonaux extérieurs de K ,

- on considère l'espace d'interpolation P engendré par des fonctions de base w_i telles que

$$w_i = c_i \frac{\psi}{q}$$

où c_i est une constante convenable et où $\psi \in P_{N+k-3}(\mathbb{R}^2)$, $k \in \mathbb{N}^*$ étant le degré de l'élément fini (K, P, Σ) ainsi construit (i.e. est tel que $P \supset P_k(K)$ et $P \not\subset P_{k+1}(K)$).

L'étude des éléments finis rationnels de Serendip de degrés 1, 2 et 3 a fait l'objet d'un article de l'auteur en collaboration avec D. APPRATO et R. ARCANGELI [7] (la terminologie "de Serendip" étant adoptée en raison de l'analogie avec les éléments finis polygonaux de même degré construits sur un rectangle). L'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 (cf. [47]) est l'analogue de l'élément fini d'Adini sur un rectangle.

Le chapitre 4 est consacré aux applications des résultats du chapitre 1 aux méthodes d'éléments finis droits polynomiaux dans \mathbb{R}^n (cf. par exemple P.G. CIARLET [26], P.A. RAVIART [68]) et aux éléments finis polygonaux de Wachspress dans \mathbb{R}^2 .

Après avoir établi un résultat général d'inégalité inverse pour des fractions rationnelles, à partir d'un théorème de R. WILHELMSSEN [86], on montre le caractère uniforme des majorations de l'erreur d'interpolation obtenues, et donc la convergence de l'approximation en norme $W^{1,p}$ ainsi que l'optimalité de l'ordre asymptotique des estimations de l'erreur d'interpolation considérée en semi-norme $[\cdot]_{m,p,K}$: l'ordre asymptotique de l'erreur d'interpolation est exactement $k + 1 - m$ pour un élément fini de degré k . On retrouve ainsi les résultats de P.G. CIARLET et P.A. RAVIART. Citons également M. ATTEIA [11], R.E. BARNHILL et J.R. WHITEMAN [12].

On indique enfin quelques résultats numériques (dont certains améliorent ceux déjà publiés par l'auteur dans [44]). Indiquons dans ce domaine les résultats de J. MEINGUET [59], F. NATTERER [64].

Le chapitre 5 a pour but d'étudier l'effet de l'intégration numérique dans la résolution d'un problème elliptique modèle d'ordre deux par éléments finis rationnels quadrilatéraux ou construits sur des hexagones réguliers. Les méthodes usuelles ne pouvant s'appliquer dans cette situation, on reprend la méthode de D. APPRATO et R. ARCANGELI [5], qui utilise le classique schéma d'étude de P.G. CIARLET et P.A. RAVIART et s'applique aux éléments finis rationnels de Serendip de degré 1, 2 ou 3, et on l'étend au cas de l'élément rationnel de Serendip de degré 4, de l'élément fini rationnel

quadrilatéral d'Hermite de degré 3 et au cas des éléments finis rationnels de degré 1, 2 ou 3 construits sur un hexagone régulier.

Une difficulté est de montrer qu'il existe des formules d'intégration numérique avec poids à coefficients positifs (cf. V. TCHAKALOFF [78], P.J. DAVIS et P. RABINOWITZ [36], J. ALBRECHT et L. COLLATZ [2]) . A cet effet, on adapte un résultat de P.J. DAVIS [35] rappelé dans A.H. STROUD [77].

On donne en annexe des résultats numériques relatifs à une formule de quadrature numérique correspondant à l'utilisation d'éléments finis rationnels sur un hexagone régulier de degré 1 .

On indique pour terminer quelques résultats de comparaison entre les éléments finis polynomiaux et les éléments finis rationnels de type Wachspress construits sur un hexagone régulier.



Chapitre 0

-

NOTATIONS

--

O.1. RAPPELS

Rappelons tout d'abord quelques définitions de calcul différentiel (cf. CARTAN [19]).

Etant donnés deux espaces vectoriels X et Y sur un même corps de scalaires, et ℓ un entier ≥ 1 , on note $\mathcal{L}_\ell(X;Y)$ l'espace des applications ℓ -linéaires de X^ℓ dans Y où X^ℓ désigne le produit cartésien, effectué ℓ fois, de X par lui-même. Quand $\ell = 1$ on écrira $\mathcal{L}(X;Y)$ au lieu de $\mathcal{L}_1(X;Y)$.

Soient n un entier ≥ 1 et Ω un ouvert borné non vide de \mathbb{R}^n . On suppose \mathbb{R}^n muni de la norme euclidienne usuelle notée $\| \cdot \|$.

Etant donnée une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, sa $\ell^{\text{ième}}$ dérivée $D^\ell u(x)$ en un point x de Ω (lorsqu'elle est définie) est un élément de $\mathcal{L}_\ell(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. On écrira en particulier :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad D^\ell u(x) \cdot \underbrace{(\xi, \xi, \dots, \xi)}_{\ell \text{ fois}} = D^\ell u(x) \cdot (\xi)^\ell,$$

et pour tout $r < \ell$:

$$\forall \xi_i \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \leq i \leq r, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$D^\ell u(x) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_r, \underbrace{\xi, \dots, \xi}_{\ell-r \text{ fois}}) = D^\ell u(x) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_r, (\xi)^{\ell-r}).$$

La norme de $D^\ell u(x)$ dans l'espace $\mathcal{L}_\ell(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ dont la norme est également notée $\| \cdot \|$ est définie par

$$\|D^\ell u(x)\| = \sup_{\substack{\|\xi_i\|=1 \\ \xi_i \in \mathbb{R}^n, 1 \leq i \leq \ell}} |D^\ell u(x) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_\ell)|$$

(Par convention, on pose $\|D^\ell u(x)\| = |u(x)|$ pour $\ell = 0$).

De plus, pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n},$$

et, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit de même x^α par :

$$(0.1.1) \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

et on note

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

et

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

Enfin si $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ désigne l'ensemble des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n , on a :

$$\partial^\alpha u(x) = D^{|\alpha|} u(x) \cdot \underbrace{(e_1, \dots, e_1)}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{(e_i, \dots, e_i)}_{\alpha_i \text{ fois}}, \dots, \underbrace{(e_n, \dots, e_n)}_{\alpha_n \text{ fois}}.$$

D'autre part, soit p un nombre tel que $1 \leq p \leq +\infty$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on désigne par $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev des (classes) de fonctions u qui appartiennent à $L^p(\Omega)$ ainsi que toutes leurs dérivées partielles $\partial^\alpha u$ d'ordre $|\alpha| \leq m$ muni de la norme

$$\|v\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On utilisera également les semi-normes

$$|v|_{\ell,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=\ell} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} ; \ell = 0, 1, \dots, m$$

et

$$[v]_{\ell,p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \|D^{\ell} v(x)\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} , \quad \ell = 0, 1, \dots, m ,$$

lorsque $p < +\infty$, avec la modification habituelle lorsque $p = +\infty$.

Pour tout compact K de \mathbb{R}^2 , on notera $W^{m,p}(K)$ (ou $H^m(K)$ dans le cas $p = 2$) au lieu de $W^{m,p}(\overset{\circ}{K})$ (ou $H^m(\overset{\circ}{K})$), $\overset{\circ}{K}$ désignant l'intérieur de K , et on écrira $\|v\|_{m,p,K}$, $|v|_{\ell,p,K}$ et $[v]_{\ell,p,K}$ au lieu de $\|v\|_{m,p,\overset{\circ}{K}}$, $|v|_{\ell,p,\overset{\circ}{K}}$ et $[v]_{\ell,p,\overset{\circ}{K}}$.

Lorsque $p = 2$, on note, comme c'est l'usage, pour tout $v \in H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, $\|v\|_{m,\Omega}$, $|v|_{\ell,\Omega}$ et $[v]_{\ell,\Omega}$ au lieu de $\|v\|_{m,2,\Omega}$, $|v|_{\ell,2,\Omega}$ et $[v]_{\ell,2,\Omega}$.

Enfin, pour tout entier $k \geq 0$ et pour tout sous-ensemble non vide A de \mathbb{R}^n , on désigne par $P_k(A)$ (respectivement $Q_k(A)$) l'espace vectoriel des restrictions à A des (fonctions) polynômes à n variables de degré $\leq k$ par rapport à l'ensemble des variables (respectivement à chacune des n variables).

0.2. INTERPOLATION D'HERMITE

Rappelons maintenant quelques définitions et notations spécifiques de l'interpolation d'Hermite (cf. CIARLET [26], CIARLET-RAVIART [27], COATMELEC [32], RAVIART [68], STRANG [74]).

Etant donné un entier $s \geq 1$, on se donne un ensemble fini Σ de N formes linéaires sur $C^s(\bar{\Omega})$, linéairement indépendantes, définies à partir d'un ensemble $\{a_i^r\}_{\substack{1 \leq r \leq s \\ 1 \leq i \leq N_r}}$ de points de $\bar{\Omega}$ (les "noeuds" de l'interpolation), N_r représentant le nombre de noeuds à r fixé :

$$(0.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \phi_i^0 : v \mapsto \phi_i^0(v) = v(a_i) & 1 \leq i \leq N_0 \\ \phi_{ij}^r : v \mapsto \phi_{ij}^r(v) = D^r v(a_{ij}^r) \cdot \xi_{ij}^r & 1 \leq r \leq s, 1 \leq i \leq N_r, 1 \leq j \leq d_{ir} \end{array} \right.$$

où d_{ir} désigne le nombre de formes linéaires associées au noeud a_i^r et où les ξ_{ij}^r dépendent de la géométrie de l'ensemble des noeuds. On a ainsi

$$(0.2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma = \{ \phi_i^0 \}_{1 \leq i \leq N_0} \cup \{ \phi_{ij}^r \}_{1 \leq r \leq s, 1 \leq i \leq N_r, 1 \leq j \leq d_{ir}} \end{array} \right. ,$$

et

$$N = N_0 + \sum_{r=1}^s \left(\sum_{j=1}^{N_r} d_{ir} \right) .$$

D'autre part, P étant un espace de fonctions définies sur $\bar{\Omega}$,

$$(0.2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{on dira que l'ensemble } \Sigma \text{ est } P\text{-unisolvant si, quels que soient} \\ \text{les scalaires } \alpha_i^0 (1 \leq i \leq N_0) \text{ et } \alpha_{ij}^r (1 \leq r \leq s, 1 \leq i \leq N_r, 1 \leq j \leq d_{ir}) \text{ donnés,} \\ \text{il existe une fonction unique } v \in P \text{ telle que} \\ \phi_i^0(v) = \alpha_i^0, 1 \leq i \leq N_0 \text{ et } \phi_{ij}^r(v) = \alpha_{ij}^r, 1 \leq r \leq s, 1 \leq i \leq N_r, 1 \leq j \leq d_{ir} . \end{array} \right.$$

L'ensemble Σ étant P -unisolvant, on a alors $\dim P = N$.

De façon équivalente montrer que Σ est P-unisolvant revient à montrer l'existence d'un ensemble $\mathcal{B} = \{p_i^0\}_{1 \leq i \leq N_0} \cup \{p_{ij}^r\}_{1 \leq r \leq s, 1 \leq i \leq N_r, 1 \leq j \leq d_{ir}}$ de N fonctions de P qui satisfont à :

$$(0.2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_i^0(p_j^0) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N_0; \quad \phi_i^0(p_{jk}^r) = 0, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad 1 \leq r \leq s, \quad 1 \leq j \leq N_r, \quad 1 \leq k \leq d_{ir}; \\ \phi_{ij}^r(p_k^0) = 0, \quad 1 \leq r \leq s, \quad 1 \leq i \leq N_r, \quad 1 \leq j \leq d_{ir}, \quad 1 \leq k \leq N_0 \\ \phi_{ij}^r(p_{k\ell}^{r'}) = \delta_{rr'} \delta_{ik} \delta_{j\ell}, \quad 1 \leq r, r' \leq s, \quad 1 \leq i \leq N_r, \quad 1 \leq k \leq N_{r'}, \quad 1 \leq j \leq d_{ir}, \quad 1 \leq \ell \leq d_{kr'} \end{array} \right.$$

\mathcal{B} est l'ensemble des fonctions de base de P relativement à Σ .

Si on se donne alors une fonction $v \in C^s(\bar{\Omega})$, on définit son P-interpolé d'Hermite relativement à Σ , noté Πv , par

$$(0.2.5) \quad \left\{ \Pi v = \sum_{i=1}^{N_0} \phi_i^0(v) p_i^0 + \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \phi_{ij}^r(v) p_{ij}^r \right.$$

Dans le cas de l'interpolation de Lagrange, l'expression du P-interpolé de v se limite au 1er terme du 2ème membre de (0.2.5).

Π est appelé opérateur de P-interpolation d'Hermite relativement à Σ .

0.3. ELEMENTS FINIS

Les notations et définitions rappelées dans ce paragraphe sont celles de CIARLET [26] (cf. également RAVIART [68]).

Dans ce qui suit, les éléments finis considérés sont des éléments finis droits construits sur des polyèdres de \mathbb{R}^n (et dans les chapitres 3 et 4 sur des polygones convexes de \mathbb{R}^2). Par définition un polyèdre sera toujours pour nous un ensemble borné, non dégénéré (i.e. d'intérieur non vide) de \mathbb{R}^n .

En conséquence, un élément fini (au sens de CIARLET) sera pour nous un triplet (K, P, Σ) où

- (0.3.1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } K \text{ est un polyèdre fermé de } \mathbb{R}^n \\ \text{(ii) } P \subset C^s(K) \text{ est un espace de fonctions à valeurs réelles définies sur } K. \\ \text{(iii) } \Sigma \text{ est un ensemble fini de formes linéaires linéairement indépendantes (du type indiqué dans (0.2.1) et (0.2.2)) définies sur } C^s(K) \text{ (} s \in \mathbb{N} \text{) tel que } \Sigma \text{ soit } P\text{-unisolvant (cf. (0.2.3)).} \end{array} \right.$

Dans la suite, s'il n'y a pas ambiguïté, on notera K au lieu de (K, P, Σ) .

On note h (respectivement ρ) le diamètre de K (respectivement le maximum des diamètres des sphères contenues dans K). De même on note Π l'opérateur de P -interpolation relativement à Σ (cf. (0.2.5)). Les points a_i^r de K introduits dans (0.2.1) sont appelés les noeuds de l'élément fini ; les formes linéaires $\phi_{i,j}^r$ associées à ces noeuds sont appelées degrés de

liberté de l'élément fini ; enfin les fonctions p_{ij}^r (cf.(0.2.4)) correspondantes sont appelées fonctions de base de l'élément fini.

On convient de dire (cf. WACHSPRESS [85] , STRANG [74]) qu'un élément fini (K, P, Σ) est de degré $k \in \mathbb{N}$ si

$$(0.3.2) \quad \left| \quad P \supset P_k(K) \text{ et } P \not\subset P_{k+1}(K) \quad . \right.$$

Pour la terminologie classique des éléments finis on renvoie à CIARLET [26] (Pour la définition des éléments finis de Serendip cf. ZIENKIEWICZ [89]).

D'autre part on dit que deux éléments finis $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ et (K, P, Σ) sont affinement équivalents s'il existe une application affine inversible F telle que, avec les notations du §.0.2

$$(0.3.3) \quad \left| \begin{array}{l} \text{(i)} \quad K = F(\hat{K}), \quad a_i^r = F(\hat{a}_i^r), \quad 1 \leq r \leq s, \quad 1 \leq i \leq N_r, \\ \text{(ii)} \quad P = \{p : K \rightarrow \mathbb{R}, \quad p = \hat{p} \circ F^{-1}, \quad \hat{p} \in \hat{P}\}, \\ \text{(iii)} \quad \xi_{ij}^r = B \hat{\xi}_{ij}^r, \quad 1 \leq r \leq s, \quad 1 \leq i \leq N_r, \quad 1 \leq j \leq d_{ir}, \end{array} \right.$$

où $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est la partie linéaire de F .

Compte tenu de la définition ci-dessus,

$$(0.3.4) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Une famille } \mathcal{F} \text{ d'éléments finis } K \text{ est dite } \underline{\text{affine}} \text{ si tous} \\ \text{ses éléments finis sont affinement équivalents à un même élément} \\ \text{noté } \hat{K} \text{ et appelé élément fini de référence.} \end{array} \right.$$

De même

$$(0.3.5) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Les éléments finis d'une famille } \mathcal{F} \text{ d'éléments finis sont dits de} \\ \underline{\text{même type}} \text{ si } \mathcal{F} \text{ est une famille dont l'élément fini générique est} \\ \text{un élément fini donné.} \end{array} \right.$$

Une telle famille est donc formée d'éléments finis de même degré.

D'autre part soit Ω un ouvert polyédrique borné de \mathbb{R}^n , de frontière Γ et soit \mathcal{K} un ensemble de réels strictement positifs : pour tout $h \in \mathcal{K}$, on appelle triangulation \mathcal{T}_h de $\bar{\Omega}$ toute réunion finie $\bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ de polyèdres K convexes fermés, non dégénérés, ($h_K \leq h$) telle que :

$$(0.3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K \\ \text{(ii)} \quad \forall K_1 \in \mathcal{T}_h, \forall K_2 \in \mathcal{T}_h ; K_1 \neq K_2 : K_1 \cap K_2 = \emptyset \\ \text{(iii)} \quad \forall K_1 \in \mathcal{T}_h, \text{ toute face de } K_1 \text{ est soit une face d'un autre} \\ \text{élément } K_2 \in \mathcal{T}_h, \text{ soit un sous-ensemble de } \Gamma . \end{array} \right.$$

Alors

$$(0.3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Une famille } \mathcal{F} \text{ d'éléments finis est } \underline{\text{associée à une famille de tri-}} \\ \underline{\text{angulations}} (\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{K}} \text{ si } \mathcal{F} = \{(K, P, \Sigma), K \in \mathcal{T}_h, h \in \mathcal{K}\} , \\ \text{les éléments finis de } \mathcal{F} \text{ étant tous de même type.} \end{array} \right.$$

Enfin pour la notion d'éléments finis de classe C^D on renvoie à CIARLET [26]).

Dans toute la suite, lorsqu'il y aura possibilité de confusion, on notera $P_K, \Sigma_K, a_{1,K}^r, \Pi_K \dots$ etc au lieu de $P, \Sigma, a_1^r, \Pi \dots$ etc.

*



Chapitre 1

-

ETUDE DE L'ERREUR D'INTERPOLATION D'HERMITE DANS \mathbb{R}^n

--

Ce chapitre est consacré à une étude de l'erreur d'interpolation d'Hermite dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n . Cette étude a pour point de départ l'article de P.G. CIARLET et P.A. RAVIART [27]. Elle a fait l'objet d'un article de l'auteur ([45]) généralisant à l'interpolation d'Hermite, des résultats sur l'interpolation de Lagrange obtenus en collaboration avec R. ARCANGELI dans [8].

Les deux méthodes proposées utilisent la formule de Taylor avec reste intégral : la première est basée sur une formule de Taylor multiponctuelle, la seconde sur des résultats d'approximation faisant suite à un article de J. MEINGUET [59] où est donné un encadrement de l'erreur de meilleure approximation uniforme (cf. également G. STRANG [74], P.G. CIARLET et P.A. RAVIART [28], P.G. CIARLET et C. WAGSCHAL [30], R.E. BARNHILL et J.R. WHITEMAN [12], J.H. BRAMBLE et S.R. HILBERT [16] et [17], C. COATMELEC [32], P. CHENIN [22], J. DESCLOUX et J. MEINGUET [38], J. MEINGUET [60], J. GELINAS [43] .

1.1. RESULTATS PRELIMINAIRES

Soient k un entier ≥ 0 et n un entier > 0 .

Pour tout ouvert borné, non vide Ω de \mathbb{R}^n , pour tout $r=0,1,\dots,k$, pour tout $u \in \mathcal{C}^{k+1}(\bar{\Omega})$, pour tout $a \in \bar{\Omega}$ tel que $\bar{\Omega}$ soit étoilé par rapport au point a , pour tout $x \in \Omega$, on pose

$$(1.1.1) \quad J_k^r(u;a,x) = \int_0^1 (1-t)^{k-r} D^{k+1}u[x+t(a-x)] \cdot (a-x)^{k-r+1} dt ;$$

ainsi $J_k^r(u;a,x) \in \mathcal{L}_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. D'autre part, sous les mêmes hypothèses, pour tout $a \in \Omega$ on note $\psi_k(u;a)$ le polynôme de Taylor à l'ordre k de u au point a défini par

$$(1.1.2) \quad \forall x \in \Omega, \quad \psi_k(u;a)(x) = \sum_{\ell=0}^k \frac{D^\ell u(a) \cdot (x-a)^\ell}{\ell!},$$

et $D^m \psi_k(u;a)(x)$ la dérivée $m^{\text{ième}}$ de l'application

$$x \mapsto \psi_k(u;a)(x).$$

On obtient alors le résultat suivant donné par GELINAS [43].

Proposition 1.1.1

On suppose que k et s sont deux entiers ≥ 0 , n un entier > 0 et p un nombre tel que $1 \leq p \leq +\infty$, vérifiant l'inégalité $k+1 > s + \frac{n}{p}$, et que Ω est un ouvert borné non vide de \mathbb{R}^n .

Alors pour tout $r = 0,1,\dots,s$, pour tout $u \in \mathcal{C}^{k+1}(\bar{\Omega})$ et pour tout $a \in \bar{\Omega}$ tel que $\bar{\Omega}$ soit étoilé par rapport au point a ,

$$(1.1.3) \quad \left(\int_{\Omega} \|J_k^r(u;a,x)\|^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{1}{[q(k+1-r - \frac{n}{p})]^{1/q} [p(k+1-r)]^{1/p}} [u]_{h^{k+1-r}, k+1,p,\Omega}$$

où h désigne le diamètre de Ω et où q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
 (la valeur du second membre de (1.1.3) étant définie comme valeur limite
 lorsque $p = 1$ ou $p = +\infty$).

Démonstration

Le résultat se vérifie immédiatement lorsque $p = +\infty$. On se borne à étudier le cas $1 < p < +\infty$, la démonstration se simplifiant dans le cas $p = 1$.

Posant $\rho = \|x-a\|$ et $\theta_x = \frac{x-a}{\|x-a\|}$, on a d'après (1.1.1)

$$\|J_k^r(u; a, x)\| \leq \int_0^1 (1-t)^{k-r} \|D^{k+1}u[a+(1-t)\rho\theta_x]\| \rho^{k+1-r} dt.$$

Effectuant le changement de variable $s = (1-t)\rho$ il vient

$$\|J_k^r(u; a, x)\| \leq \int_0^\rho \|D^{k+1}u[a+s\theta_x]\| s^{k-r} ds.$$

Comme $s^{k-r} = s^{k+1-r-\frac{n}{p}-\frac{1}{q}} \times s^{\frac{n}{p}+\frac{1}{q}-1}$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on

obtient en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \|J_k^r(u; a, x)\| &\leq \left(\int_0^\rho s^{q(k+1-r-\frac{n}{p})-1} ds \right)^{1/q} \left(\int_0^\rho s^{n-1} \|D^{k+1}u[a+s\theta_x]\|^p ds \right)^{1/p} \\ &\leq \frac{\rho^{k+1-r-\frac{n}{p}}}{[q(k+1-r-\frac{n}{p})]^{1/q}} \left(\int_0^\rho s^{n-1} \|D^{k+1}u[a+s\theta_x]\|^p ds \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

d'où

$$(1.1.4) \quad \left(\int_\Omega \|J_k^r(u; a, x)\|^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{1}{[q(k+1-r-\frac{n}{p})]^{1/q}} \left\{ \int_\Omega \rho^{p(k+1-r-\frac{n}{p})} \left(\int_0^\rho s^{n-1} \|D^{k+1}u[a+s\theta_x]\|^p ds \right) dx \right\}^{1/p}.$$

On effectue alors, dans l'intégrale du second membre de (1.1.4), un passage en coordonnées polaires usuelles (d'origine a) $\rho, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}$, où ρ désigne le rayon polaire. Notant $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_{n-1})$ et $\{(\rho, \phi) ; \phi \in D_\phi, 0 < \rho < \rho^*\}$ le domaine transformé de Ω , il vient, si l'on désigne le jacobien par $\rho^{n-1} f(\phi)$ et si on note $\theta_\phi = \theta_{x(\rho, \phi)}$.

$$\left(\int_{\Omega} \|J_k^r(u; a, x)\|^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{1}{[q(k+1-r-\frac{n}{p})]^{1/q}} \left\{ \int_{D_\phi} \int_0^{\rho^*} \rho^{p(k+1-r)-1} \left(\int_0^{\rho^*} s^{n-1} \|D^{k+1} u[a+s\theta_\phi]\|^p ds \right) |f(\phi)| d\rho d\phi \right\}^{1/p}$$

soit également, puisque $\rho^* \leq h$,

$$\leq \frac{h^{k+1-r}}{[q(k+1-r-\frac{n}{p})]^{1/q} [p(k+1-r)]^{1/p}} \left\{ \int_{D_\phi} \int_0^{\rho^*} s^{n-1} \|D^{k+1} u[a+s\theta_\phi]\|^p |f(\phi)| ds d\phi \right\}^{1/p}.$$

Exprimant à nouveau l'intégrale du second membre en coordonnées cartésiennes on obtient

$$\left(\int_{\Omega} \|J_k^r(u; a, x)\|^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{h^{k+1-r}}{[q(k+1-r-\frac{n}{p})]^{1/q} [p(k+1-r)]^{1/p}} \left(\int_{\Omega} \|D^{k+1} u(x)\|^p dx \right)^{1/p},$$

et le résultat. \square

Remarque 1.1.1

Lorsque Ω est convexe, donc contenu dans une boule de diamètre h , choisissant pour point a le centre de cette boule (a appartenant nécessairement à $\bar{\Omega}$) on a en utilisant un raisonnement analogue à celui de la démonstration de la proposition 1.1.1,

$$(1.1.5) \quad \left(\int_{\Omega} \|J_k^r(u; a, x)\|^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{1}{[q(k+1-r-\frac{n}{p})]^{1/q} [p(k+1-r)]^{1/p}} [u]_{k+1, p, \Omega} \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1-r}.$$

Remarque 1.1.2

Le résultat (1.1.3) améliore ceux d'ARCANGELI-GOUT [8] et GOUT [45],

$$\left(\int_{\Omega} \|J_k^r(u; a, x)\|^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{1}{k+1-r-\frac{n}{p}} [u]_{k+1, p, \Omega} h^{k+1-r},$$

ainsi que celui dû à MEINGUET [60] dans le cas où Ω est convexe et $p = 2$

$$\left(\int_{\Omega} \|J_k^r(u; a, x)\|^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{(k+1-r)(k+1-r-\frac{n}{2})}} [u]_{k+1, \Omega} h^{k+1-r}$$

(cf. également MORREY [63]). \square

Avec les mêmes idées que celles utilisées dans la démonstration des propositions 1.1 de [8] et 2.1 de [45], et avec le principe de démonstration introduit par MEINGUET (pour $p = 2$) dans [60] on a la

Proposition 1.1.2

On suppose que Ω est un ouvert borné convexe non vide de \mathbb{R}^n . Alors pour tout $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$, pour tout $r = 0, 1, \dots, k$ et pour tout p , $1 \leq p \leq +\infty$, on a

$$(1.1.6) \quad \left(\int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} \|J_k^r(u; x, a)\| da \right]^p dx \right)^{1/p} \leq (\text{mes } \Omega) \mu(n, k, r, p) [u]_{k+1, p, \Omega} h^{k+1-r}$$

avec $\mu(n, k, r, p) = \inf_{\varepsilon} \left\{ \frac{\left(\int_0^1 (1-t)^{p\varepsilon} \text{Min}[t^{-n}, (1-t)^{-n}] dt \right)^{1/p}}{[q(k-r-\varepsilon)+1]^{1/q}} \right\}$

pour $1 < p < +\infty$, la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des ε tels que $0 < p\varepsilon + 1$ et $q(k-r-\varepsilon) + 1 > 0$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et

$$\mu(n, k, r, 1) = \mu(n, k, r, +\infty) = \frac{1}{k+1-r}$$

Démonstration

Pour $p = +\infty$ le résultat est immédiat et pour $p = 1$ il suffit d'appliquer la proposition 1.1.1. Soit donc p , $1 < p < +\infty$. D'après (1.1.1) il vient immédiatement

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|J_k^r(u; x, a)\| da &\leq h^{k+1-r} \int_{]0, 1[\times \Omega} (1-t)^{k-r} \|D^{k+1}u[a+t(x-a)]\| da dt \\ &\leq h^{k+1-r} \left(\int_{]0, 1[\times \Omega} (1-t)^{q(k-r-\varepsilon)} da dt \right)^{1/q} \left(\int_{]0, 1[\times \Omega} (1-t)^{p\varepsilon} \|D^{k+1}u[a+t(x-a)]\|^p dt da \right)^{1/p} \\ &\leq \frac{(\text{mes } \Omega)^{1/q} h^{k+1-r}}{[q(k-r-\varepsilon)+1]^{1/q}} \left(\int_{]0, 1[\times \Omega} (1-t)^{p\varepsilon} \|D^{k+1}u[a+t(x-a)]\|^p dt da \right)^{1/p} \end{aligned}$$

avec ε réel tel que $q(k-r-\varepsilon) + 1 > 0$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Prenant alors les normes $L^p(\Omega)$ les deux membres par rapport à x il vient

$$(1.1.7) \quad \left(\int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} \|J_k^r(u; x, a)\| da \right]^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{(\text{mes } \Omega)^{1/q} h^{k+1-r}}{[q(k-r-\varepsilon)+1]^{1/q}} \left(\int_0^1 (1-t)^{p\varepsilon} \left[\int_{\Omega \times \Omega} \|D^{k+1}u[a+t(x-a)]\|^p dadx \right] dt \right)^{1/p}$$

Effectuant alors (cf. MEINGUET [60]) le changement de variables

$$a \rightarrow y = a + t(x-a) \quad \text{si } t \leq \frac{1}{2}, \quad x \rightarrow y = a + t(x-a) \quad \text{si } t \geq \frac{1}{2},$$

on obtient comme majorant du 1er membre de l'inégalité (1.1.7)

$$\frac{(\text{mes } \Omega)^{1/q} h^{k+1-r}}{[q(k-r-\varepsilon) + 1]^{1/q}} (\text{mes } \Omega)^{1/p} [u]_{k+1,p,\Omega} \left(\int_0^1 (1-t)^{p\varepsilon} \text{Min}[t^{-n}, (1-t)^{-n}] dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

ou encore

$$(\text{mes } \Omega) [u]_{k+1,p,\Omega} h^{k+1-r} \frac{\left(\int_0^1 (1-t)^{p\varepsilon} \text{Min}[t^{-n}, (1-t)^{-n}] dt \right)^{1/p}}{[q(k-r-\varepsilon) + 1]^{1/q}}$$

et ce, pour tout ε tel que $q(k-r-\varepsilon) + 1 > 0$ d'où le résultat.

Remarque 1.1.3

De la même façon que J. MEINGUET dans [60] pour $p = 2$, on a par exemple pour p quelconque, $1 < p < +\infty$ et pour r , $0 \leq r \leq k$,

$$(1.1.8) \quad \left| \mu(n,k,r,p) \leq \frac{2^{n/p}}{(p(k-r)+1)^{1/p}}, \right.$$

pour p quelconque, $r = k$,

$$(1.1.9) \quad \left| \mu(n,k,k,p) \leq \left(2 \frac{2^{n-1}-1}{n-1} \right)^{1/p} \quad (n > 1) \right.$$

pour $p = 2$, $k - r \geq 1$, $n > 1$,

$$(1.1.10) \quad \left| \mu(n,k,r,2) \leq \left(\frac{2^{n-1}-1}{n-1} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2(k-r)}}, \quad (\text{cf. MEINGUET [60]}). \right.$$

1.2. ETUDE DE L'ERREUR D'INTERPOLATION D'HERMITE A PARTIR
D'UNE FORMULE DE TAYLOR MULTIPONCTUELLE

On suppose que :

$$(1.2.1) \quad \left| \begin{array}{l} k \text{ est un entier } \geq 0, \quad s \text{ un entier } \geq 0, \quad n \text{ un entier } > 0 \\ \text{et } p \text{ un nombre tel que } 1 \leq p \leq +\infty, \text{ vérifiant} \\ k + 1 > s + \frac{n}{p}, \end{array} \right.$$

$$(1.2.2) \quad \left| \begin{array}{l} \Omega \text{ est un ouvert borné, non vide, de } \mathbb{R}^n, \text{ à frontière lips-} \\ \text{chitzienne tel que } \bar{\Omega} \text{ soit étoilé par rapport à chacun des} \\ \text{noeuds } a_i^r \text{ de l'interpolation,} \end{array} \right.$$

$$(1.2.3) \quad \left| \begin{array}{l} \Sigma \text{ est un ensemble } P\text{-unisolvant (cf. 0.2.3), } \Sigma \text{ étant défini} \\ \text{par (0.2.1) et (0.2.2), et } P \text{ tel que } P_k(\bar{\Omega}) \subset P \subset C^{k+1}(\bar{\Omega}). \end{array} \right.$$

On désigne par h le diamètre de Ω .

Avec les hypothèses (1.2.2) et (1.2.3), et pour tout $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$, l'application à $D^r u$ de la formule de Taylor à l'ordre $k-r$ avec reste intégral, donne pour tout $x \in \Omega$, les relations

$$(1.2.4) \quad \left| \begin{array}{l} D^r u(a_i^r) = D^r u(x) + \dots + \frac{1}{(k-r)!} D^k u(x) \cdot (a_i^r - x)^{k-r} + \frac{1}{(k-r)!} J_k^r(u; a_i^r, x), \\ \text{avec } 0 \leq r \leq s, \quad 1 \leq i \leq N_r. \end{array} \right.$$

Démontrons tout d'abord une formule de Taylor multiponctuelle dans le cas de l'interpolation d'Hermite, suivant en cela les idées de CIARLET-WAGSCHAL [30] et de CIARLET-RAVIART [27] et une suggestion de J. MEINGUET.

Indiquons quelques notations utilisées dans la démonstration de ce résultat (cf. GOUT [45]).

On désigne par Δ_n l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et pour tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in (\Delta_n)^r$, on note e_λ^r l'élément de $(\mathbb{N}^n)^r$ défini par

$$e_\lambda^r = (e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_r}) \quad 1 \leq r \leq s,$$

où les e_{λ_i} , $1 \leq i \leq r$, appartiennent à la base canonique de \mathbb{R}^n .

D'autre part, on note $e_{\lambda,r}$ l'élément de \mathbb{N}^n défini par

$$e_{\lambda,r} = e_{\lambda_1} + \dots + e_{\lambda_r}.$$

Considérant alors $x = (x_1, \dots, x_r) \in (\mathbb{R}^n)^r$, on définit $x^{e_\lambda^r}$ par

$$x^{e_\lambda^r} = x_1^{e_{\lambda_1}} \dots x_r^{e_{\lambda_r}},$$

où $x_i^{e_{\lambda_i}}$ est défini par (0.1.1).

Enfin pour α et $\beta \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ on définit la relation d'ordre \prec sur \mathbb{N}^n par

$$\alpha \prec \beta \iff (\alpha_i \leq \beta_i, \quad 1 \leq i \leq n)$$

Il vient alors

Proposition 1.2.1

Les hypothèses (1.2.2) et (1.2.3) étant supposées vérifiées, pour tout $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ et pour tout $m = 0, 1, \dots, k$, on a pour tout $x \in \Omega$:

$$(1.2.5) \quad \left| \begin{aligned} D^m(\Pi u)(x) &= D^m u(x) + \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{N_0} \left[J_k^0(u; a_i^0, x) D^m p_i^0(x) \right] \\ &+ \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \left[J_k^r(u; a_i^r, x) \cdot \xi_{ij}^r \right] D^m p_{ij}^r(x) \right\} \end{aligned} \right.$$

où Π désigne l'opérateur de P -interpolation d'Hermite relativement à \mathcal{Y} .

Démonstration (cf. ARCANGELI-GOUT [8], GOUT [45])

D'après (0.2.1) et (0.2.5) on a :

$$(1.2.6) \quad \left| \Pi u = \sum_{i=1}^{N_0} u(a_i^0) p_i^0 + \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} (D^r u(a_i^r) \cdot \xi_{ij}^r) p_{ij}^r \right.$$

Soit alors, pour tout $z \in \bar{\Omega}$, l'élément ψ_z de $P_k(\bar{\Omega})$ défini sur $\bar{\Omega}$ par

$$\psi_z(x) = (x-z)^\alpha \text{ avec } \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad |\alpha| \leq k.$$

Comme $P \supset P_k(\bar{\Omega})$ on a en particulier :

$$(1.2.7) \quad \left| \psi_z(x) = \sum_{i=1}^{N_0} \psi_z(a_i^0) p_i^0(x) + \sum_{r=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} (D^r \psi_z(a_i^r) \cdot \xi_{ij}^r) p_{ij}^r(x) \right\} \right.$$

Soit $\beta \in \mathbb{N}$. Compte tenu, que, pour $1 \leq r \leq s$

$$D^r \psi_z(a_i^r) \cdot \xi_{ij}^r = \sum_{\substack{|e_{\lambda,r}|=r \\ e_{\lambda,r} \prec \alpha}} \frac{\alpha!}{(\alpha - e_{\lambda,r})!} (a_i^r - z)^{\alpha - e_{\lambda,r}} (\xi_{ij}^r)^{e_{\lambda,r}},$$

on obtient en dérivant β fois les deux membres de (1.2.7) par rapport à x

$$\partial^\beta \psi_z(x) = \sum_{i=1}^{N_0} (a_i^0 - z)^\alpha \partial^\beta p_i^0(x) + \sum_{r=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \left[\sum_{\substack{|e_{\lambda,r}|=r \\ e_{\lambda,r} < \alpha}} \frac{\alpha!}{(\alpha - e_{\lambda,r})!} (a_i^r - z)^{\alpha - e_{\lambda,r}} (\xi_{ij}^r)^{e_\lambda} \right] \partial^\beta p_{ij}^r(x) \right\}.$$

Faisant alors tendre z vers x , on a

$$(1.2.8) \quad \left. \begin{aligned} \alpha! \delta_{\alpha\beta} &= \sum_{i=1}^{N_0} (a_i^0 - x)^\alpha \partial^\beta p_i^0(x) \\ &+ \sum_{r=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \left(\sum_{\substack{|e_{\lambda,r}|=r \\ e_{\lambda,r} < \alpha}} \frac{\alpha!}{(\alpha - e_{\lambda,r})!} (a_i^r - x)^{\alpha - e_{\lambda,r}} (\xi_{ij}^r)^{e_\lambda} \right) \partial^\beta p_{ij}^r(x) \right\} \end{aligned} \right\}$$

où $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$ et $\delta_{\alpha\beta} = 1$ si $\alpha = \beta$.

Soient alors $0 \leq \ell \leq k$ et $|\beta| = m \leq k$; en multipliant les deux membres de (1.2.8) par $\sum_{|\alpha|=\ell} \frac{\partial^\alpha u(x)}{\alpha!}$ on déduit, en utilisant la définition des dérivées $D^\ell u(x)$:

$$(1.2.9) \quad \left. \begin{aligned} \partial^\beta u(x) \delta_{\ell m} &= \sum_{i=1}^{N_0} \left(\frac{D^\ell u(x) \cdot (a_i^0 - x)^\ell}{\ell!} \right) \partial^\beta p_i^0(x) \\ &+ \sum_{r=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \left[\frac{D^\ell u(x) \cdot ((a_i^r - x)^{\ell-r}, \xi_{ij}^r)}{(\ell-r)!} \right] \partial^\beta p_{ij}^r(x) \right\}, \end{aligned} \right\}$$

$\delta_{\ell m}$ étant le symbole de Kronecker classique.

Utilisant alors à nouveau la définition de la dérivée $m^{\text{ième}}$ de u en un point x de Ω , il vient

$$(1.2.10) \quad \left| \begin{aligned} D^m u(x) &= \sum_{i=1}^{N_0} \left(\sum_{\ell=0}^k \frac{D^\ell u(x) \cdot (a_i^0 - x)^\ell}{\ell!} \right) D^m p_i^0(x) \\ &+ \sum_{r=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \left[\sum_{\ell=r}^k \frac{D^\ell u(x) \cdot ((a_i^r - x)^{\ell-r}, \xi_{ij}^r)}{(\ell-r)!} \right] D^m p_{ij}^r(x) \right\} . \end{aligned} \right.$$

Compte tenu des relations (1.2.4) on déduit alors de (1.2.10) .

$$(1.2.11) \quad \left| \begin{aligned} D^m u(x) &= \sum_{i=1}^{N_0} \left[u(a_i^0) - \frac{1}{k!} J_k^0(u; a_i^0, x) \right] D^m p_i^0(x) \\ &+ \sum_{r=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \left[D^r u(a_i^r) \cdot \xi_{ij}^r - \frac{1}{(k-r)!} J_k^r(u; a_i^r, x) \cdot \xi_{ij}^r \right] D^m p_{ij}^r(x) \right\} . \end{aligned} \right.$$

Or, comme, d'après (1.2.6) on a

$$(1.2.12) \quad \left| D^m(\Pi u)(x) = \sum_{i=1}^{N_0} u(a_i^0) D^m p_i^0(x) + \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} (D^r u(a_i^r) \cdot \xi_{ij}^r) D^m p_{ij}^r(x) , \right.$$

on obtient le résultat à partir des relations (1.2.11) et (1.2.12). \square

On alors le

Théorème 1.2.1.

On suppose vérifiées les hypothèses (1.2.1), (1.2.2) et (1.2.3).

Soient Π l'opérateur de P -interpolation d'Hermite relativement à Σ

et \mathcal{B} l'ensemble des fonctions de base de P relativement à Σ (cf. 0.2.4)).

Alors, pour tout $u \in W^{k+1, p}(\Omega)$ et pour tout $m = 0, 1, \dots, k$,

on a :

$$\begin{aligned}
[u-\Pi u]_{m,p,\Omega} &\leq \frac{1}{k!} \frac{\left(\sum_{i=1}^{N_0} [p_i^0]_{m,\infty,\Omega} \right)}{[q(k+1-\frac{n}{p})]^{1/q} [p(k+1)]^{1/p}} [u]_{k+1,p,\Omega} h^{k+1} \\
&+ \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \frac{\left(\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} [p_{ij}^r]_{m,\infty,\Omega} ((\xi_{ij}^r)) \right)}{[q(k+1-r-\frac{n}{p})]^{1/q} [p(k+1-r)]^{1/p}} [u]_{k+1,p,\Omega} h^{k+1-r},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(1.2.13) \quad & [u-\Pi u]_{k+1,p,\Omega} \\
&\leq \frac{1}{k!} \left\{ \frac{\left(\sum_{i=1}^{N_0} [p_i^0]_{k+1,\infty,\Omega} \right)}{[q(k+1-\frac{n}{p})]^{1/q} [q(k+1)]^{1/p}} h^{k+1} + \left(\sum_{i=1}^{N_0} [p_i^0]_{k,\infty,\Omega} \right) h^k \right\} [u]_{k+1,p,\Omega} \\
&+ \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \left\{ \frac{\left(\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} [p_{ij}^r]_{k+1,\infty,\Omega} ((\xi_{ij}^r)) \right) h^{k+1-r}}{[q(k+1-r-\frac{n}{p})]^{1/q} [p(k+1-r)]^{1/p}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} [p_{ij}^r]_{k,\infty,\Omega} ((\xi_{ij}^r)) \right) h^{k-r} \right\} [u]_{k+1,p,\Omega},
\end{aligned}$$

où q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et où $((\xi_{ij}^r)) = \|\xi_{ij,1}^r\| \dots \|\xi_{ij,r}^r\|$, avec

$$\xi_{ij}^r = (\xi_{ij,1}^r, \dots, \xi_{ij,r}^r) \in (\mathbb{R}^n)^r.$$

Démonstration

(i) on montre d'abord (1.2.13) pour $u \in \mathcal{C}^{k+1}(\bar{\Omega})$ et $1 \leq p \leq +\infty$.

1er cas : $0 \leq m \leq k$ (cf. théorème 2.1 de [45])

On reprend la démonstration du théorème 3 de CIARLET-RAVIART [27].
 A partir de la proposition 1.2.1, pour tout $m = 0, 1, \dots, k$, pour tout $x \in \Omega$,
 il vient

$$(1.2.14) \quad \left\| \begin{aligned} & \|D^m(u - \Pi u)(x)\| \leq \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{N_0} |J_k^0(u; a_i^0, x)| \|D^m p_i^0(x)\| \\ & + \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{i,r}} \|J_k^r(u; a_i^r, x)\| ((\xi_{ij}^r)) \|D^m p_{ij}^r(x)\| \right\} . \end{aligned} \right.$$

Après avoir majoré $\|D^m p_{ij}^r(x)\|$ par $[p_{ij}^r]_{m, \infty, \Omega}$, on prend les
 normes $L^p(\Omega)$ des deux membres de (1.2.14) considérés comme fonctions
 de x et on obtient

$$\begin{aligned} [u - \Pi u]_{m, p, \Omega} &\leq \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{N_0} \left[\int_{\Omega} \|J_k^0(u; a_i^0, x)\|^p dx \right]^{1/p} [p_i^0]_{m, \infty, \Omega} \\ &+ \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{i,r}} \left(\int_{\Omega} \|J_k^r(u; a_i^r, x)\|^p dx \right)^{1/p} ((\xi_{ij}^r)) [p_{ij}^r]_{m, \infty, \Omega} \right\} \end{aligned}$$

d'où le résultat, en utilisant la proposition 1.1.1.

2ème cas : $m = k + 1$ (cf. théorème 2.1 de [48])

La démonstration généralise à l'interpolation d'Hermite le résultat d'APPRATO-ARCANGELI-GOUT [6] obtenu pour l'interpolation de Lagrange, le principe de la démonstration étant identique.

De la proposition précédente on déduit pour $m = k$ et pour tout

$x \in \Omega$

$$(1.2.15) \quad \left| \begin{aligned} D^k(\Pi u)(x) - D^k u(x) &= \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{N_0} J_k^0(u; a_i^0, x) D^k p_i^0(x) \\ &+ \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} [J_k^r(u; a_i^r, x) \cdot \xi_{ij}^r] D^k p_{ij}^r(x) \right\} . \end{aligned} \right.$$

Dérivant alors l'identité (1.2.15) par rapport à x il vient, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$(1.2.16) \quad \left| \begin{aligned} D^{k+1}(\Pi u - u)(x) \cdot \xi &= \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{N_0} \left[(DJ_k^0(u; a_i^0, x) \cdot \xi) D^k p_i^0(x) + J_k^0(u; a_i^0, x) (D^{k+1} p_i^0(x) \cdot \xi) \right] \\ &+ \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \left\{ \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \left[DJ_k^r(u; a_i^r, x) \cdot (\xi_{ij}^r, \xi) D^k p_{ij}^r(x) + J_k^r(u; a_i^r, x) \cdot \xi_{ij}^r D^{k+1} p_{ij}^r(x) \cdot \xi \right] \right\} . \end{aligned} \right.$$

Si on dérive les relations (1.2.4) par rapport à x on a

$$DJ_k^0(u; a_i^0, x) \cdot \xi = -D^{k+1} u(x) \cdot ((a_i^0 - x)^k \cdot \xi)$$

$$DJ_k^r(u; a_i^r, x) \cdot (\xi_{ij}^r, \xi) = -D^{k+1} u(x) \cdot ((a_i^r - x)^{k-r}, \xi_{ij}^r, \xi) ,$$

d'où, d'après (1.2.16)

$$\begin{aligned} \|D^{k+1}(u - \Pi u)(x)\| &\leq \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{N_0} \|D^{k+1} u(x)\| h^k \|D^k p_i^0(x)\| + \|J_k^0(u; a_i^0, x)\| \|D^{k+1} p_i^0(x)\| \\ &+ \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \|D^{k+1} u(x)\| h^{k-r} \|(\xi_{ij}^r)\| \|D^k p_{ij}^r(x)\| + \|J_k^r(u; a_i^r, x)\| \|(\xi_{ij}^r)\| \\ &\quad \times \|D^{k+1} p_{ij}^r(x)\| \end{aligned}$$

et l'on obtient le résultat, compte tenu de la proposition 1.1.1.

(ii) On en déduit le cas général en distinguant les cas $p < +\infty$ et $p = +\infty$.

Reprenant les idées de la démonstration du théorème 1.1 de [8], on vérifie tout d'abord que pour tout p , $1 \leq p \leq +\infty$, et pour tout $m = 0, 1, \dots, k+1$, comme $W^{k+1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ et que P est de dimension finie,

$$\Pi \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega)).$$

D'autre part, lorsque $p < +\infty$, on sait que $C^{k+1}(\bar{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$, pour tout $m = 0, 1, \dots, k+1$, puisque Ω est borné et à frontière continue (cf. NECAS [65]) : un raisonnement par densité achève donc la démonstration.

Lorsque $p = +\infty$, il suffit de remarquer que, pour tout $p \geq 1$

$$W^{k+1,\infty}(\Omega) \subset W^{k+1,p}(\Omega)$$

puisque Ω est borné. Dans ce cas, on obtient les relations (1.2.13) en faisant tendre p vers $+\infty$ dans les résultats précédents.

Remarque 1.2.1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty[$, pour tout $u \in W^{m,p}(\Omega)$; on a

$$(1.2.17) \quad \left| \begin{array}{l} n^{-\frac{m}{2}} [u]_{m,p,\Omega} \leq |u|_{m,p,\Omega} \leq \binom{n+m-1}{m}^{1/p} [u]_{m,p,\Omega} \end{array} \right.$$

Notons que pour $m = 0, 1$, $[u]_{m,p,\Omega} = |u|_{m,p,\Omega}$.

1.3 ETUDE DE L'ERREUR D'INTERPOLATION D'HERMITE PAR UNE
METHODE BASEE SUR L'APPROXIMATION

Indiquons tout d'abord que, compte tenu des notations du §.1.1, pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, pour presque tout $a \in \Omega$, l'application $(x,a) \mapsto \|D^m \psi_k(u,a)(x)\|$ appartient à $L^p(\Omega \times \Omega)$.

Les méthodes utilisées pour démontrer les résultats de ce paragraphe sont basées sur un principe analogue à celui introduit par BRAMBLE-HILBERT (cf. [16],[17]).

Rappelons le résultat, donné dans GOUT [45] (théorème 3.1) étendant à l'interpolation d'Hermite le théorème 2.1 d'ARCANGELI-GOUT [8].

Théorème 1.3.1

On suppose que les hypothèses (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) sont vérifiées et que de plus Ω est convexe, Π désignant l'opérateur de P -interpolation d'Hermite relativement à Σ . Alors pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ pour tout entier $m \geq 0$ tel que $k+1 > m + \frac{n}{p}$ et pour tout $q \geq 1$, on a :

$$(1.3.1) \quad \begin{aligned} & [u - \Pi u]_{m,q,\Omega} \leq \frac{1}{(k-m)!} \frac{(\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}}{[p'(k+1-m - \frac{n}{p})]^{1/p'} [p(k+1-m)]^{1/p}} [u]_{k+1,p,\Omega} h^{k+1-m} \\ & + \frac{(\text{mes } \Omega)^{-\frac{1}{p}}}{k!} \frac{\left(\sum_{i=1}^{N_0} [p_i^0]_{m,q,\Omega} \right)}{[p'(k+1 - \frac{n}{p})]^{1/p'} [p(k+1)]^{1/p}} [u]_{k+1,p,\Omega} h^{k+1} \end{aligned}$$

$$\left| + \sum_{r=1}^s \frac{(\text{mes } \Omega)^{\frac{-1}{p}}}{(k-r)!} \frac{\left(\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{i,r}} [p_{ij}^r]_{m,q,\Omega}(\xi_{ij}^r) \right)}{[p'(k+1-r-\frac{n}{p})]^{1/p'} [p(k+1-r)]^{1/p}} [u]_{k+1,p,\Omega}^{k+1-r}$$

où ici p' est tel que $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$.

Démonstration (cf. théorème 3.1 de [45])

Il suffit de montrer le résultat pour $u \in \mathcal{C}^{k+1}(\bar{\Omega})$, le cas général s'obtenant en raisonnant par densité lorsque $p < +\infty$ et en passant à la limite sur p pour $p = +\infty$. Soit donc $u \in \mathcal{C}^{k+1}(\bar{\Omega})$.

Pour tout $\psi \in P$, en particulier pour $\psi = \psi_k(u; a)$, on a $\Pi\psi = \psi$, et par suite

$$u - \Pi u = u - \psi_k(u; a) + \Pi[u - \psi_k(u; a)]$$

d'où, pour tout $x \in \Omega$

$$(1.3.2) \quad \left| \quad D^m(u - \Pi u)(x) = D^m(u - \psi_k(u; a))(x) + D^m \Pi[u - \psi_k(u; a)](x). \right.$$

Or par définition de Π et en utilisant les définitions des $J_k^r(u; a, x)$ il vient

$$(1.3.3) \quad \left| \begin{aligned} \|D^m \Pi(u - \psi_k(u; a))(x)\| &\leq \sum_{i=1}^{N_0} \frac{1}{k!} |J_k^0(u; a_i^0, a)| \|D^m p_i^0(x)\| \\ &+ \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{i,r}} \frac{1}{(k-r)!} \|J_k^r(u; a_i^r, a)((\xi_{ij}^r))\| \|D^m p_{ij}^r(x)\|. \end{aligned} \right.$$

A partir des relations (1.3.2) et (1.3.3), et compte tenu de la

définition de $J_k^m(u; x, a)$, on déduit

$$(1.3.4) \quad \left\{ \begin{aligned} \|D^m(u - \Pi u)(x)\| &\leq \|J_k^m(u; x, a)\| + \sum_{i=1}^N \frac{1}{k!} |J_k^0(u; a_i^0, a)| \|D^m p_i^0(x)\| \\ &+ \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{d_{i,r}} \frac{1}{(k-r)!} \|J_k^r(u; a_i^r, a)\| ((\xi_{ij}^r)) \|D^m p_{ij}^r(x)\| . \end{aligned} \right.$$

Prenant alors les normes $L^p(\Omega)$ des deux membres de (1.3.4) considérés comme des fonctions de a , utilisant la proposition 1.1.1 et prenant enfin les normes $L^q(\Omega)$ des deux membres par rapport à x , on obtient les majorations (1.3.1).

Il suffit alors de remarquer que $W^{k+1,p}(\Omega) \subset W^{m,q}(\Omega)$ puisque $k+1 > m + \frac{n}{p}$ et que Ω est borné, pour achever la démonstration. \square

Remarque 1.3.1

Le théorème 1.3.1 peut n'avoir lieu que pour des valeurs de m telles que $0 \leq m \leq s$.

Utilisant alors les résultats de la proposition 1.1.2 on peut alors montrer le résultat suivant, à partir de l'idée de J. MEINGUET rappelée au §.1.1 :

Théorème 1.3.2

On suppose que les hypothèses (1.2.1), (1.2.2), (1.2.3) sont vérifiées et que de plus Ω est convexe et que Π est l'opérateur de P -interpolation d'Hermite relativement à Σ . Alors pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$

et pour tout $m = 0, 1, \dots, k$

$$(1.3.5) \quad \left[u - \Pi u \right]_{m,p,\Omega} \leq \frac{1}{k!} \mu(n,k,m,p) [u]_{k+1,p,\Omega} h^{k+1-m} \\ + \frac{(\text{mes } \Omega)^{-\frac{1}{p}}}{k!} \frac{\left(\sum_{i=1}^{N_0} [p_i^0]_{m,p,\Omega} \right)}{[q(k+1-\frac{n}{p})]^{1/q} [p(k+1)]^{1/p}} [u]_{k+1,p,\Omega} h^{k+1} \\ + \sum_{r=1}^s \frac{(\text{mes } \Omega)^{-\frac{1}{p}}}{(k-r)!} \frac{\left(\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{i,r}} [p_{ij}^r]_{m,p,\Omega} (\xi_{ij}^r) \right)}{[q(k+1-r-\frac{n}{p})]^{1/q} [p(k+1-r)]^{1/p}} [u]_{k+1,p,\Omega} h^{k+1-r},$$

où q est tel que $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Démonstration

Comme pour la démonstration du théorème 1.3.1, il suffit ici également de montrer le résultat pour $u \in \mathcal{C}^{k+1}(\bar{\Omega})$ et pour $1 \leq p < +\infty$, le résultat général s'obtenant par un raisonnement par densité lorsque $p < +\infty$ et par passage à la limite sur p lorsque $p = +\infty$ (notons que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \mu(n,k,m,p) = 1$).

Soit donc $u \in \mathcal{C}^{k+1}(\bar{\Omega})$. Comme précédemment on obtient la relation (1.3.4), d'où il vient, en intégrant les deux membres par rapport à a :

$$\left| \int_{\Omega} \|D^m(u - \Pi u)(x)\| da \leq \int_{\Omega} \|D^m(u - \psi_k(u;a))(x)\| da$$

$$(1.3.6) \quad \left| \begin{aligned} & + \sum_{i=1}^{N_0} \frac{1}{k!} \left(\int_{\Omega} |J_k^0(u; a_i^0, a)| da \right) \|D_{P_i^0}^m(x)\| \\ & + \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \frac{1}{(k-r)!} \left(\int_{\Omega} \|J_k^r(u; a_i^r, a)\| da \right) (\xi_{ij}^r) \|D_{P_{ij}^r}^m(x)\| . \end{aligned} \right.$$

Prenant alors la norme $L^p(\Omega)$ des deux membres de l'inégalité (1.3.6) par rapport à la variable x , il vient compte tenu de la proposition 1.1.2 et des majorations (1.1.6) :

$$(1.3.7) \quad \left| \begin{aligned} & (\text{mes } \Omega)[u]_{m,p,\Omega} \leq (\text{mes } \Omega) \frac{1}{k!} \mu(n,k,m,p)[u]_{k+1,p,\Omega} h^{k+1-m} \\ & + \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{N_0} \left[\left(\int_{\Omega} |J_k^0(u; a_i^0, a)| da \right) [P_i^0]_{m,p,\Omega} \right] \\ & + \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \frac{1}{(k-r)!} \left[\left(\int_{\Omega} \|J_k^r(u; a_i^r, a)\| da \right) (\xi_{ij}^r) [P_{ij}^r]_{m,p,\Omega} \right] \end{aligned} \right.$$

Mais on a également

$$\int_{\Omega} |J_k^0(u; a_i^0, a)| da \leq (\text{mes } \Omega)^{1/q} \left(\int_{\Omega} |J_k^0(u; a_i^0, a)|^p da \right)^{1/p}$$

et de même

$$\int_{\Omega} \|J_k^r(u; a_i^r, a)\| da \leq (\text{mes } \Omega)^{1/q} \left(\int_{\Omega} \|J_k^r(u; a_i^r, a)\|^p da \right)^{1/p} .$$

Utilisant alors les majorations (1.1.3), le résultat suit. \square



Chapitre 2

--

ELEMENTS FINIS RATIONNELS

DE TYPE WACHSPRESS

SUR UN QUADRILATERE

--

Ce chapitre a pour but d'étudier la construction et les propriétés d'éléments finis rationnels de type Wachspress sur un quadrilatère (cf. WACHSPRESS [85], APPRATO-ARCANGELI-GOUT [6] , [7] , GOUT [46] , [47]) .

2.1. NOTATIONS GEOMETRIQUES

Dans tout ce chapitre, sauf dans le §.2.5, les éléments finis considérés sont construits sur un quadrilatère K convexe, fermé, de \mathbb{R}^2 , non dégénéré en trapèze ou en parallélogramme, de sommets a_i , $i \in I = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, numérotés de telle manière que les sommets a_i et a_{i+1} soient consécutifs et que a_4 soit le sommet de K le plus éloigné de la diagonale extérieure d du quadrilatère K .

Pour tout $i \in I$, on désigne par d_i la droite passant par les points a_{i-1} et a_i et par ℓ_i un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $\ell_i(x) = 0$ soit une équation de d_i . On note b_1 (respectivement b_2) le point d'intersection des droites d_1 et d_3 (respectivement des droites d_2 et d_4) et b_3 le point d'intersection des diagonales intérieures de K .

D'autre part on désigne par ℓ un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $\ell(x) = 0$ soit une équation de d .

De plus, pour tout $i \in I$, on appelle $a_{i,i+1}$ le milieu du côté d'extrémités a_i et a_{i+1} et on désigne par ℓ'_i un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $\ell'_i(x) = 0$ soit une équation de la droite passant par les points $a_{i-1,i}$ et $a_{i,i+1}$.

Enfin on désigne par $d_{1,3}$ (respectivement $d_{2,4}$) la diagonale intérieure de K , passant par les points a_1 et a_3 (respectivement par les points a_2 et a_4).

Indiquons pour terminer, que si la construction des éléments finis

de Wachspress de degrés 1 et 2 est directe, celle des éléments finis rationnels de Wachspress de degrés ≥ 3 (sur un quadrilatère) nécessite l'utilisation de la transformation géométrique de Coxeter-Wachspress, qui fait correspondre un carré à un quadrilatère convexe.

2.2. TRANSFORMATION DE COXETER-WACHSPRESS

Rappelons tout d'abord la définition de la transformation de Coxeter-Wachspress (cf. WACHSPRESS [85]).

Soient K un quadrilatère convexe de \mathbb{R}^2 , non dégénéré en trapèze ou en parallélogramme défini comme au §.2.1 et \hat{K} le carré de \mathbb{R}^2 de sommets $\hat{a}_1 = (-1, 1)$, $\hat{a}_2 = (-1, -1)$, $\hat{a}_3 = (1, -1)$ et $\hat{a}_4 = (1, 1)$. On note \hat{d}_i , $i \in I$ la droite passant par les sommets \hat{a}_{i-1} et \hat{a}_i .

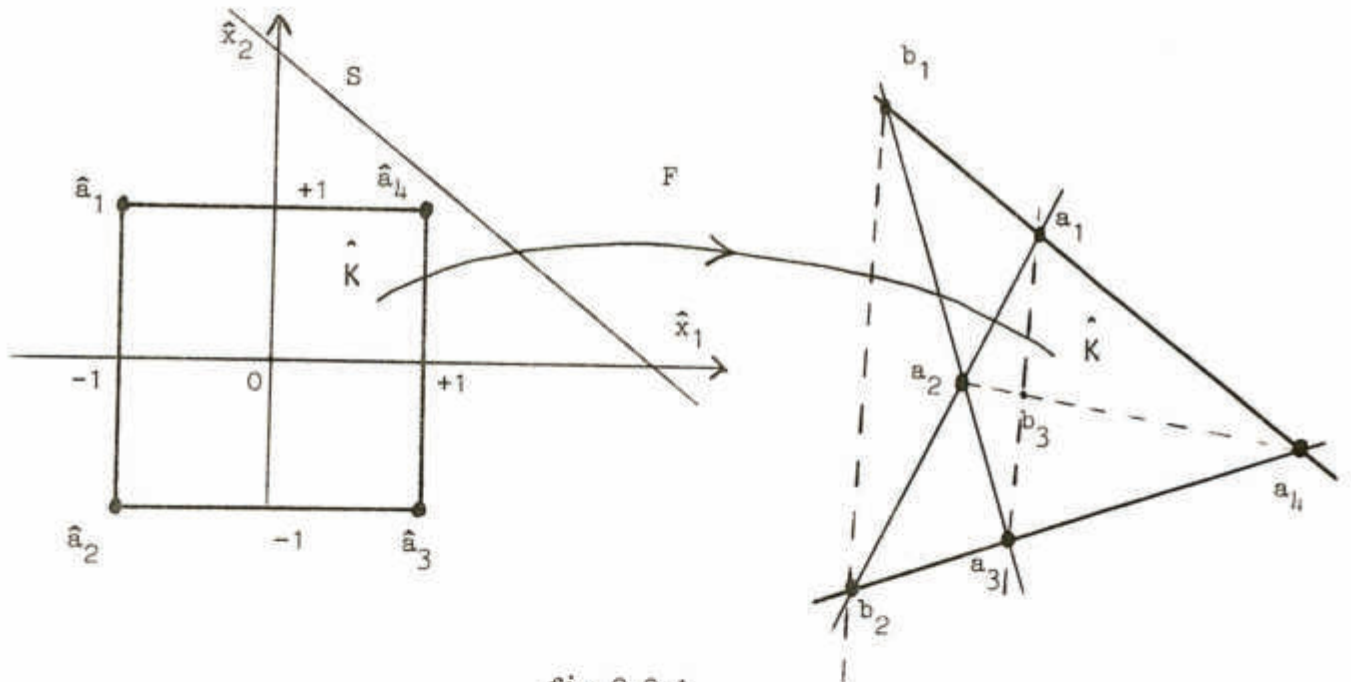


fig.2.2.1

Soient ξ_1, ξ_2, ξ_3 les coordonnées barycentriques du point a_4 par rapport aux points b_1, b_2, b_3 et soit S la droite d'équation $s(\hat{x}) = 0$ où s est l'élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ défini par

$$(2.2.1) \quad \left| \quad s(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \xi_1 \hat{x}_1 + \xi_2 \hat{x}_2 + \xi_3 \right.$$

Notons que $s(\hat{a}_4) = 1$.

De ces définitions on déduit la

Proposition 2.2.1.

Les coordonnées barycentriques ξ_1, ξ_2, ξ_3 du point a_4 par rapport aux points b_1, b_2, b_3 , et $s \in P_1(\mathbb{R}^2)$ défini par (2.2.1) vérifient

$$(2.2.2) \quad \left| \begin{array}{l} \xi_1 < 0, \quad \xi_2 < 0, \quad \xi_3 > 1, \\ \forall \hat{x} \in \hat{K}, \quad s(\hat{x}) \geq 1 \end{array} \right.$$

Démonstration

Les inégalités $\xi_1 < 0, \xi_2 < 0$ et $\xi_3 > 1$ résultent immédiatement de la position du point a_4 par rapport au triangle de sommets b_1, b_2, b_3 . De plus, d'après (2.2.1)

$$\forall \hat{x} \in \hat{K} \quad s(\hat{x}) \geq s(\hat{a}_4) = 1. \quad \square$$

On considère maintenant l'application G définie sur \mathbb{R}^2 par

$$(2.2.3) \quad \left| \begin{array}{l} \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \quad G(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) b_3, \end{array} \right.$$

ou les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, (1 - \lambda_1 - \lambda_2)$ sont de fait les coordonnées barycentriques du point $G(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ par rapport aux points b_1, b_2, b_3 , ce qui montre que G est une application affine inversible de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 .

Soit d'autre part l'application H définie sur $\mathbb{R}^2 - S$ par

$$(2.2.4) \quad \left| \quad \forall (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathbb{R}^2 - S \quad H(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \left(\frac{\xi_1 \hat{x}_1}{s(\hat{x})}, \frac{\xi_2 \hat{x}_2}{s(\hat{x})} \right) . \right.$$

On définit alors, à partir des relations (2.2.3) et (2.2.4), sur $\mathbb{R}^2 - S$, l'application $F = G \circ H$, appelée transformation de Coxeter-Wachspress et l'on a, pour tout $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathbb{R}^2 - S$

$$(2.2.5) \quad \left| \quad x = F(\hat{x}) = \frac{\xi_1 \hat{x}_1 b_1 + \xi_2 \hat{x}_2 b_2 + \xi_3 b_3}{s(\hat{x})} . \right.$$

Il est clair que l'application F est liée au quadrilatère K .

On a alors (cf. APPRATO-ARCANGELI-GOUT [6], WACHSPRESS [85], APPRATO [4]) la

Proposition 2.2.2.

L'application F définie par (2.2.5) vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\forall \hat{x} \in \mathbb{R}^2 - S$, $s(\hat{x}) = \ell(a_4) / \ell(x)$ où $x = F(\hat{x})$

(ii) L'image par F d'une droite distincte de S (privée éventuellement de son point d'intersection avec S) est une droite (privée éventuellement de son intersection avec d) ; de plus F est une bijection de $\mathbb{R}^2 - S$ sur $\mathbb{R}^2 - d$ et F conserve le birapport de quatre points alignés.

(iii) $F(0) = b_3$; $\forall i \in I$ $F(\hat{a}_i) = a_i$ et $F(\hat{K}) = K$.

(iv) F est un C^∞ difféomorphisme de $\overset{\circ}{K}$ sur $\overset{\circ}{K}$ et le jacobien $J(\hat{x})$ de F en \hat{x} est tel que $|J(\hat{x})| = \frac{2(\text{aire du triangle } b_1 b_2 b_3) \xi_1 \xi_2 \xi_3}{s^3(\hat{x})}$

Démonstration

(i) ℓ étant affine, si $x = F(\hat{x})$, on a

$$\ell(x) = \frac{\xi_1 \hat{x}_1 \ell(b_1) + \xi_2 \hat{x}_2 \ell(b_2) + \xi_3 \ell(b_3)}{s(\hat{x})} = \frac{\xi_3 \ell(b_3)}{s(\hat{x})}$$

et d'après (2.2.1)

$$\ell(a_4) = \frac{\xi_3 \ell(b_3)}{s(\hat{a}_4)} = \xi_3 \ell(b_3) ,$$

d'où le résultat.

ii) A partir de la définition de F (cf. (2.2.5)) on vérifie immédiatement que F est une bijection de $\mathbb{R}^2 - S$ sur $\mathbb{R}^2 - d$. De plus, comme

$$x = F(\hat{x}) \iff (\hat{x}_i = \frac{\phi_i(x)}{\ell(x)} , i = 1, 2 \text{ avec } \phi_i \in P_1(\mathbb{R}^2)) ,$$

il est clair que si Δ est une droite distincte de S , $F(\Delta - (\Delta \cap S))$ ne rencontre pas d et $\overline{F(\Delta - (\Delta \cap S))}$ est une droite.

iii) On a immédiatement $F(0) = b_3$ et $F(\hat{a}_4) = a_4$.

D'autre part il suffit d'utiliser (ii) et le fait que

$$\lim_{\hat{x}_1 \rightarrow +\infty} F(\hat{x}_1, \pm 1 = b_1) \text{ et } \lim_{\hat{x}_2 \rightarrow +\infty} F(\pm 1, \hat{x}_2) = b_2 ,$$

pour montrer que $F(\hat{a}_i) = a_i$, $1 \leq i \leq 3$.

Utilisant la continuité de F , la connexité des segments $[\hat{a}_i, \hat{a}_{i+1}]$ et (ii) on montre que

$$F([\hat{a}_i, \hat{a}_{i+1}]) = [a_i, a_{i+1}]$$

d'où l'on déduit que $F(K) = K$.

(iv) On déduit de (2.2.5) que le jacobien $J(\hat{x})$ de F en $\hat{x} \in \mathbb{R}^2 - S$ est égal en valeur absolue à

$$|J(\hat{x})| = \frac{2[\text{aire du triangle } b_1 b_2 b_3] \xi_1 \xi_2 \xi_3}{s^3(\hat{x})} .$$

F et F^{-1} étant homographiques par composante, il en résulte que F est un C^∞ difféomorphisme de \hat{K} sur \hat{K} . \square

D'autre part il vient la

Proposition 2.2.3.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, F étant la transformation de Coxeter-Wachspress définie par la relation (2.2.5) on a

$$\{\hat{v} : \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}, \exists v \in P_k(K), \hat{v} = v \circ F\} = \{\hat{v} : \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}, \exists \hat{p} \in P_k(K), \hat{v} = \frac{\hat{p}}{s}\}$$

et

$$\{v : K \rightarrow \mathbb{R}, \exists \hat{v} \in P_k(\hat{K}), v = \hat{v} \circ F^{-1}\} = \{v : K \rightarrow \mathbb{R}, \exists p \in P_k(K), v = \frac{p}{\ell^k}\}$$

où F , s et ℓ sont mis pour $F|_K$, $s|_K$ et $\ell|_K$.

Démonstration (cf. APPRATO-ARCANGELI-GOUT [6])

De l'expression de F on déduit immédiatement que

$$\{\hat{v} : \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}, \exists v \in P_k(K), \hat{v} = v \circ F\} \subset \{\hat{v} : \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}, \exists \hat{p} \in P_k(\hat{K}), \hat{v} = \frac{\hat{p}}{s}\}$$

et que

$$\{v : K \rightarrow \mathbb{R}, \exists \hat{v} \in P_k(\hat{K}), v = \hat{v} \circ F^{-1}\} \subset \{v : K \rightarrow \mathbb{R}, \exists p \in P_k(K), v = \frac{p}{\ell^k}\}.$$

Compte tenu du fait que $\frac{1}{s} \circ F^{-1} = c^{te} \times \ell$, le résultat suit. \square

2.3. ELEMENTS FINIS RATIONNELS DE SERENDIP DE DEGRES 1 ET 2

(cf. WACHSPRESS [85] et également APPRATO-ARCANGELI-GOUT [6]).

Dans ce paragraphe K est un quadrilatère convexe, fermé, de \mathbb{R}^2 .

2.3.1. Elément fini rationnel de Serendip de degré 1

Lorsque K est un quadrilatère non dégénéré en trapèze ou en parallélogramme, on définit P comme l'espace vectoriel engendré par les fonctions w_i , $i \in I$, définies sur K par

$$(2.3.1) \quad \left| \quad w_i = c_i \frac{\ell_{i+2} \ell_{i+3}}{\ell} \right.,$$

où pour tout $i \in I$, c_i est une constante telle que $w_i(a_i) = 1$, et

$$(2.3.2) \quad \left| \quad \Sigma = \{v \mapsto v(a_i), i \in I\} \right. .$$

Lorsque K est un trapèze on prend pour ℓ un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $\ell(x) = 0$ soit une équation de la droite passant par le point d'intersection des côtés non parallèles, et parallèle aux deux côtés parallèles de K .

Si K est un parallélogramme, on convient de prendre, dans (2.3.1), $\ell = 1$.

On vérifie immédiatement que les w_i , $i \in I$, sont les fonctions de base de P relativement à Σ , et donc que le triplet (K, P, Σ) défini par (2.3.1) et (2.3.2) est un élément fini.

D'autre part on a le

Théorème 2.3.1

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (2.3.1) et (2.3.2) est de degré 1.

Démonstration cf. WACHSPRESS [85] \square

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (2.3.1) et (2.3.2) est appelé élément fini rationnel de Serendip de degré 1.

Proposition 2.3.1.

L'élément fini rationnel de Serendip de degré 1 est de classe C^0 .

Démonstration

Il est clair que les restrictions à chaque côté K' de K des fonctions de base w_i appartiennent à $P_1(K)$ (propriétés des faisceaux de droites) ; le résultat s'en déduit immédiatement. \square

2.3.2. Élément fini rationnel de Serendip de degré 2

Lorsque K est un quadrilatère non dégénéré en trapèze ou en parallélogramme, on définit P comme l'espace vectoriel engendré par les fonctions w_i et $w_{i,i+1}$, $i \in I$, définies, compte tenu des notations du §.2.1 par

$$(2.3.3) \quad \left| \begin{array}{l} w_i = c_i \frac{l_{i+2} l_{i+3} l'_i}{l} , \\ w_{i,i+1} = c_{i,i+1} \frac{l_{i+2} l_{i+3} l_i}{l} \end{array} \right.$$

où, pour tout $i \in I$, les constantes c_i et $c_{i,i+1}$ sont telles que $w_i(a_i) = w_{i,i+1}(a_{i,i+1}) = 1$

et

$$(2.3.4) \quad \left| \quad \Sigma = \{v \mapsto v(a_i), i \in I; v \mapsto v(a_{i,i+1}), i \in I\} . \right.$$

Lorsque K est un trapèze ou un parallélogramme on procède comme dans le cas de l'élément fini rationnel de Serendip de degré 1 .

On vérifie immédiatement que les w_i et $w_{i-1,i}$ ($i \in I$) sont les fonctions de base de P relativement à Σ , et donc que le triplet (K,P,Σ) défini par (2.3.3) et (2.3.4) est un élément fini.

De plus on a le

Théorème 2.3.2

L'élément fini (K,P,Σ) défini par (2.3.3) et (2.3.4) est de degré 2 .

Démonstration cf. WACHSPRESS [85] \square

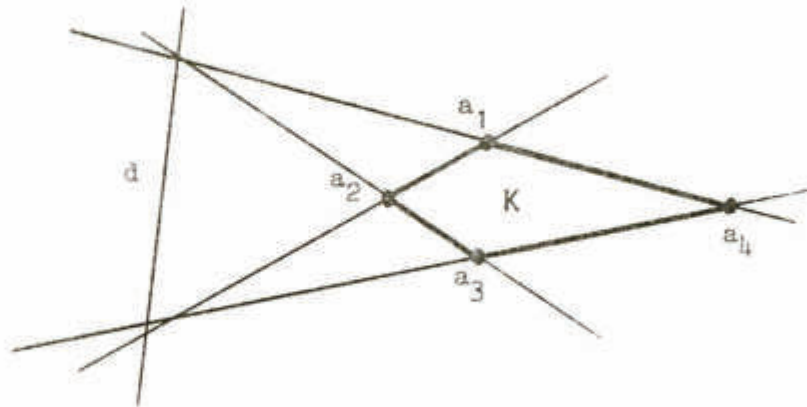
L'élément fini (K,P,Σ) défini par (2.3.3) et (2.3.4) est appelé élément fini de Serendip de degré 2 .

Proposition 2.3.2

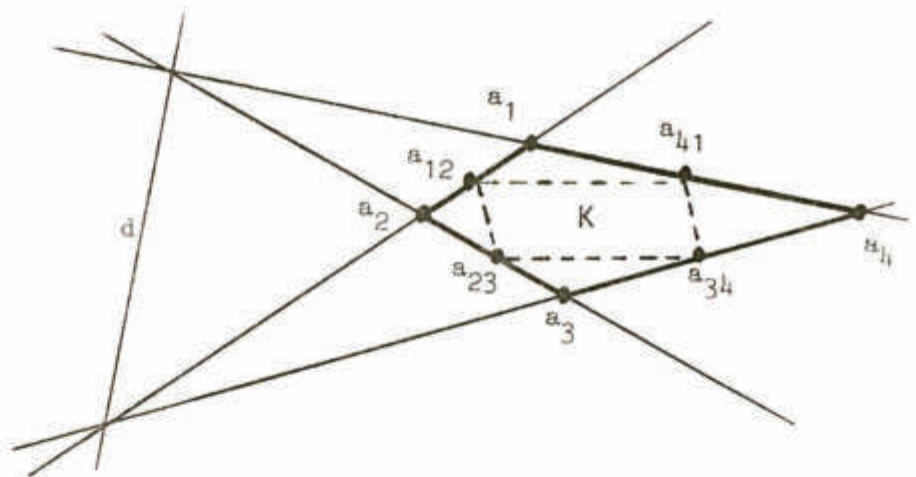
L'élément fini de Serendip de degré 2 est de classe C^0 .

Démonstration

Elle est analogue à celle de la proposition 2.3.1 ; ici pour tout côté K' de K , $w_i|_{K'}$ et $w_{i-1,i}|_{K'} \in P_2(K')$. \square



Elément fini rationnel de Serendip de degré 1 (fig.2.3.1)



Elément fini rationnel de Serendip de degré 2. fig.2.3.2

Remarque 2.3.1

Soient w_i , $i \in I$, les fonctions de base de l'élément fini rationnel de Serendip de degré 1. WACHSPRESS montre que lorsque a_2 tend vers un point a du segment $[a_1, a_3]$, les droites d_2 , d_3 et d tendent toutes vers $\bar{d}_{1,3}$ (d'équation $\ell_{1,3}(x) = 0$).

$$\text{Alors : } \lim_{a_2 \rightarrow a} w_4(x) = \frac{\ell_{1,3}(x)}{\ell_{1,3}(a_4)}$$

$$\lim_{a_2 \rightarrow a} \left[w_1(x) + \frac{\ell_4(a)}{\ell_4(a_1)} w_2(x) \right] = \frac{\ell_4(x)}{\ell_4(a_1)} ,$$

$$\lim_{a_2 \rightarrow a} \left[w_3(x) + \left(1 - \frac{\ell_4(a)}{\ell_4(a_1)}\right) w_2(x) \right] = \frac{\ell_1(x)}{\ell_1(a_3)} .$$

On retrouve ainsi les 3 fonctions de base de l'élément fini polynomial de Lagrange de degré 1 sur le triangle de sommets $a_1 a_3 a_4$.

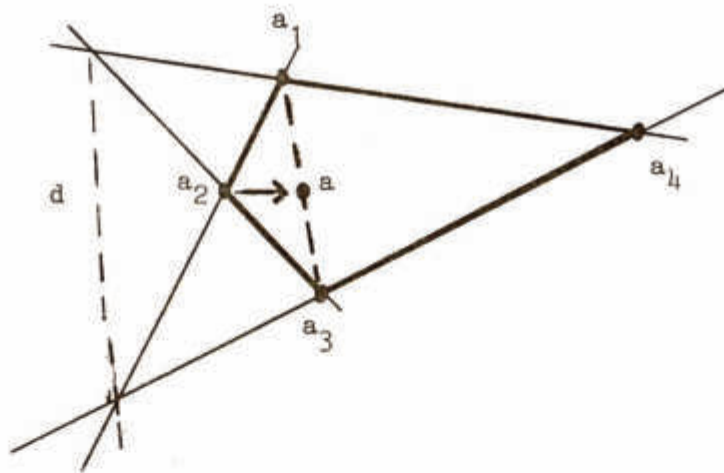


fig.2.3.3

2.4. ELEMENT FINI RATIONNEL DE SERENDIP DE DEGRE 3

Dans ce paragraphe nous ne donnerons que les principaux résultats concernant la construction de l'élément fini rationnel de Serendip de degré 3. Pour la plupart des démonstrations nous renvoyons au paragraphe 3 de l'article d'APPRATO-ARCANGELI-GOUT [6].

Rappelons simplement que la construction de cet élément fini se fait à partir de la construction d'un élément fini polynomial de Serendip sur \hat{K} (à noeuds irrégulièrement répartis) de degré 3, soit $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$, et en utilisant la transformation de Coxeter Wachspres (cf. proposition 4.1 de [6]).

Soit donc K un quadrilatère convexe défini comme au paragraphe 2.1. Soient d'autre part, pour tout $i \in I$, les points $a_{i,i,i+1}$ et $a_{i+1,i+1,i}$ définis par

$$a_{i,i,i+1} = \frac{1}{3}(2a_i + a_{i+1}) \quad , \quad a_{i+1,i+1,i} = \frac{1}{3}(a_i + 2a_{i+1}).$$

De même on désigne par $\ell_{i,i,i+1}$ (respectivement $\ell_{i+1,i+1,i}$) un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $\ell_{i,i,i+1}(x) = 0$ (respectivement $\ell_{i+1,i+1,i}(x) = 0$) soit une équation de la droite passant par le point $a_{i,i,i+1}$ (respectivement le point $a_{i+1,i+1,i}$) et par le point d'intersection des droites d_i et d_{i+2} .

Enfin, on désigne par γ_i , $i \in I$, un élément de $P_2(\mathbb{R}^2)$ tel que $\gamma_i(x) = 0$ soit une équation de la conique passant par les points $a_{i-1,i-1,i}$, $a_{i,i,i-1}$, $a_{i,i,i+1}$, $a_{i+1,i+1,i}$, telle que de plus $(\frac{\gamma_i}{\ell^2} \circ F)(\hat{x})$ ne comporte pas de termes en $\hat{x}_1 \hat{x}_2$ ($(\frac{\gamma_i}{\ell^2} \circ F) \in P_2(\mathbb{R}^2)$).

Soient alors P l'espace vectoriel engendré par les fonctions

w_i , $w_{i,i,i+1}$ et $w_{i+1,i+1,i}$, $i \in I$, définies sur K par

$$(2.4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_i = c_i \frac{\ell_{i+2} \ell_{i+3} \gamma_i}{\ell} , \\ w_{i,i,i+1} = c_{i,i,i+1} \frac{\ell_i \ell_{i+2} \ell_{i+3} \ell_{i+1,i+1,i}}{\ell} , \\ w_{i+1,i+1,i} = c_{i+1,i+1,i} \frac{\ell_i \ell_{i+2} \ell_{i+3} \ell_{i,i,i+1}}{\ell} , \end{array} \right.$$

où les constantes c_i , $c_{i,i,i+1}$, $c_{i+1,i+1,i}$ sont telles que $w_i(a_i) = w_{i,i,i+1}(a_{i,i,i+1}) = w_{i+1,i+1,i}(a_{i+1,i+1,i}) = 1$, et

$$(2.4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma = \{v \mapsto v(a_i), i \in I ; v \mapsto v(a_{i,i,i+1}), i \in I ; v \mapsto v(a_{i+1,i+1,i}), i \in I\}. \end{array} \right.$$

On montre (cf. §.3 de [6]) que les fonctions w_i , $w_{i,i,i+1}$ et $w_{i+1,i+1,i}$, $i \in I$, sont les fonctions de base de P relativement à Σ et donc que le triplet (K, P, Σ) défini par (2.4.1) et (2.4.2) est un élément fini. De plus on a le

Théorème 2.4.1.

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (2.4.1) et (2.4.2) est de degré 3.

Démonstration (cf. théorème 4.1 de [6]). \square

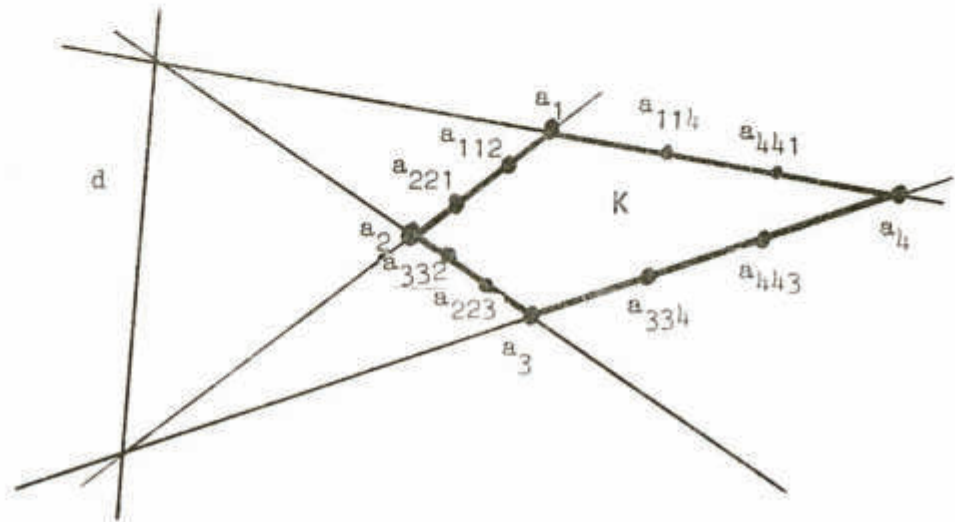
L'élément fini (K, P, Σ) défini par (2.4.1) et (2.4.2) est appelé élément fini rationnel de Serendip de degré 3.

D'autre part on a la

Proposition 2.4.1

L'élément fini rationnel de Serendip de degré 3 est de classe C^0 .

Démonstration (cf. Proposition 4.2 de [6]).



Elément fini rationnel de Serendip de degré 3 (fig.2.4.1)

2.5. ELEMENT FINI RATIONNEL DE SERENDIP DE DEGRE 4 (cf. GOUT [46])

Soit K un quadrilatère convexe défini comme au paragraphe 2.1. La méthode utilisée ici est analogue à celle employée pour la construction de l'élément fini rationnel de Serendip de degré 3.

2.5.1. Construction d'un élément fini polynomial de Serendip de degré 4 sur \hat{K} (à noeuds irrégulièrement répartis)

Soit \hat{K} le carré de référence introduit au §.2.2.

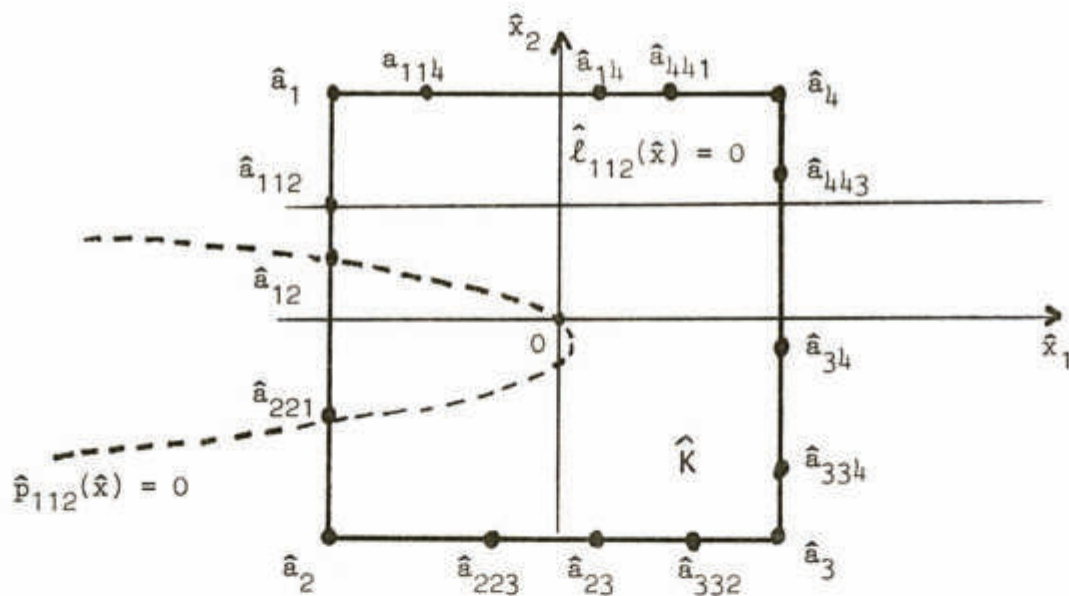
Pour tout $i \in I$, soient $\hat{a}_{i,i,i+1}$, $\hat{a}_{i,i+1}$, $\hat{a}_{i+1,i+1,i}$ trois points quelconques du côté d'extrémité \hat{a}_i et \hat{a}_{i+1} , différents de \hat{a}_i et \hat{a}_{i+1} et distincts, $\hat{a}_{i,i,i+1}$ (resp. $\hat{a}_{i+1,i+1,i}$) désignant le point le plus proche de \hat{a}_i (resp. de \hat{a}_{i+1}).

Pour tout $i \in I$ on désigne par $\hat{\ell}_i$ un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $\hat{\ell}_i(\hat{x}) = 0$ soit une équation de la droite \hat{d}_i , par $\hat{\ell}_{i,i,i+1}$ (resp. $\hat{\ell}_{i+1,i+1,i}$) un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $\hat{\ell}_{i,i,i+1}(\hat{x}) = 0$ (resp. $\hat{\ell}_{i+1,i+1,i}(\hat{x}) = 0$) soit une équation de la droite passant par le point $\hat{a}_{i,i,i+1}$ (resp. $\hat{a}_{i+1,i+1,i}$) et parallèle à \hat{d}_i , enfin par $\hat{\ell}_{i,i+1}$ un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $\hat{\ell}_{i,i+1}(\hat{x}) = 0$ soit une équation de la droite passant par $\hat{a}_{i,i+1}$ et parallèle à \hat{d}_i .

Pour tout $i \in I$, soit d'autre part $\hat{\gamma}_i$ un élément de $P_3(\mathbb{R}^2)$, ne comportant pas de termes en $\hat{x}_1^2 \hat{x}_2$ et en $\hat{x}_1 \hat{x}_2^2$ tel que $\hat{\gamma}_i(\hat{x}) = 0$ soit une équation de la cubique passant par les points $\hat{a}_{i-1,i-1,i}$, $\hat{a}_{i-1,i}$, $\hat{a}_{i,i,i-1}$, $\hat{a}_{i,i,i+1}$, $\hat{a}_{i,i+1}$, $\hat{a}_{i+1,i+1,i}$ et 0 centre le \hat{K} .

(On vérifie sans difficulté l'existence et l'unicité d'une telle cubique).

Enfin, pour tout $i \in I$, pour tout $\hat{a}_{i,i,i+1}$ (resp. $\hat{a}_{i+1,i+1,i}$) on désigne par $\hat{p}_{i,i,i+1}$ (resp. $\hat{p}_{i+1,i+1,i}$) un élément de $P_2(\mathbb{R}^2)$ tel que $\hat{p}_{i,i,i+1}(\hat{x}) = 0$ (resp. $\hat{p}_{i+1,i+1,i}(\hat{x}) = 0$) soit une équation de la parabole d'axe parallèle à \hat{d}_i et passant par les points $0, \hat{a}_{i,i+1}, \hat{a}_{i+1,i+1,i}$ (resp. $0, \hat{a}_{i,i+1}, \hat{a}_{i,i,i+1}$). De même on désigne par $\hat{p}_{i,i+1}$ un élément de $P_2(\mathbb{R}^2)$ tel que $\hat{p}_{i,i+1}(\hat{x}) = 0$ soit une équation de la parabole d'axe parallèle à \hat{d}_i , passant par les points $0, \hat{a}_{i,i,i+1}$ et $\hat{a}_{i+1,i+1,i}$ (on vérifie facilement l'existence et l'unicité de ces paraboles éventuellement dégénérées en deux droites parallèles à \hat{d}_i).



(fig.2.5.1)

Soient \hat{P} l'espace vectoriel engendré par les fonctions $\hat{w}_i, \hat{w}_{i,i,i+1}, \hat{w}_{i,i+1}, \hat{w}_{i+1,i+1,i}, i \in I$, et \hat{w}_0 définies sur \hat{K} par

$$(2.5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{w}_i = \hat{c}_i \hat{\ell}_{i+2} \hat{\ell}_{i+3} \hat{\gamma}_i \\ \hat{w}_{i,i,i+1} = \hat{c}_{i,i,i+1} \hat{\ell}_{i+2} \hat{\ell}_{i+3} \hat{\ell}_i \hat{p}_{i,i,i+1} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \hat{w}_{i,i+1} = \hat{c}_{i,i+1} \hat{\ell}_{i+2} \hat{\ell}_{i+3} \hat{\ell}_i \hat{p}_{i,i+1} \quad , \\ \hat{w}_{i+1,i+1,i} = \hat{c}_{i+1,i+1,i} \hat{\ell}_{i+2} \hat{\ell}_{i+3} \hat{\ell}_i \hat{p}_{i+1,i+1,i} \quad , \\ \hat{w}_0 = \hat{c}_0 \hat{\ell}_1 \hat{\ell}_2 \hat{\ell}_3 \hat{\ell}_4 \quad , \end{array} \right.$$

où les constantes \hat{c}_i , $\hat{c}_{i,i,i+1}$, $\hat{c}_{i,i+1}$, $\hat{c}_{i+1,i+1,i}$ et \hat{c}_0 sont telles que $\hat{w}_i(\hat{a}_i) = \hat{w}_{i,i,i+1}(\hat{a}_{i,i,i+1}) = \hat{w}_{i,i+1}(\hat{a}_{i,i+1}) = \hat{w}_{i+1,i+1,i}(\hat{a}_{i+1,i+1,i}) = \hat{w}_0(0) = 1$, et $\hat{\Sigma}$ l'ensemble

$$(2.5.2) \quad \left| \hat{\Sigma} = \{\hat{v} \mapsto \hat{v}(\hat{a}_i), \hat{v} \mapsto \hat{v}(\hat{a}_{i,i,i+1}), \hat{v} \mapsto \hat{v}(\hat{a}_{i,i+1}), \hat{v} \mapsto \hat{v}(\hat{a}_{i+1,i+1,i}), i \in I; \hat{v} \mapsto \hat{v}(0)\} \right.$$

On vérifie immédiatement que les fonctions \hat{w}_i , $\hat{w}_{i,i,i+1}$, $\hat{w}_{i,i+1}$, $\hat{w}_{i+1,i+1,i}$, $i \in I$ et \hat{w}_0 sont les fonctions de base de \hat{P} relativement à $\hat{\Sigma}$, et donc que le triplet $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ défini par (2.5.1) et (2.5.2) est un élément fini.

Remarque 2.5.1

L'introduction d'un point intérieur est nécessaire pour construire un élément fini de Serendip de degré 4. En effet si les noeuds de l'élément fini étaient tous situés sur le bord de \hat{K} , l'élément $\hat{\ell}_1 \hat{\ell}_2 \hat{\ell}_3 \hat{\ell}_4$ de $P_4(\hat{K})$ ne pourrait appartenir à \hat{P} puisque s'annulant en tous les noeuds de l'élément fini.

On a alors la

Proposition 2.5.1.

L'élément fini $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ défini par (2.5.1) et (2.5.2) est de degré 4.

Démonstration

Il est clair que $\hat{P} \neq P_5(\hat{K})$ puisque $\dim \hat{P} = 17$ et $\dim P_5(\hat{K}) = 21$.

D'autre part soit $\hat{\psi} \in P_4(\hat{K})$ quelconque. On considère la fonction \hat{v} définie sur \hat{K} par

$$\hat{v} = \hat{\psi} - \left\{ \sum_{i \in I} \left[\hat{\psi}(\hat{a}_i) \hat{w}_i + \hat{\psi}(\hat{a}_{i,i,i+1}) \hat{w}_{i,i,i+1} + \hat{\psi}(\hat{a}_{i,i+1}) \hat{w}_{i,i+1} \right. \right. \\ \left. \left. + \hat{\psi}(\hat{a}_{i+1,i+1,i}) \hat{w}_{i+1,i+1,i} \right] + \hat{\psi}(0) \hat{w}_0 \right\} .$$

Compte tenu des expressions (2.5.1), \hat{v} appartient à $P_5(\hat{K})$ et la restriction de \hat{v} à chaque côté \hat{K}' de \hat{K} appartient à $P_4(\hat{K}')$. Vu la définition des noeuds de l'élément fini, on en déduit qu'il existe des constantes $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3$ telles que

$$\forall (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \hat{K}, \hat{v}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\hat{c}_1 \hat{x}_1 + \hat{c}_2 \hat{x}_2 + \hat{c}_3) (1 - \hat{x}_1^2)(1 - \hat{x}_2^2) .$$

Comme \hat{v} s'annule en 0, $\hat{c}_3 = 0$. De plus l'identification des termes en $\hat{x}_1^2 \hat{x}_2^3$ et $\hat{x}_1^3 \hat{x}_2^2$ montre, puisque les $\hat{\gamma}_i, i \in I$, ne comportent pas de termes en $\hat{x}_1^2 \hat{x}_2$ et $\hat{x}_1 \hat{x}_2^2$ et que les $\hat{p}_{i,i,i+1}, \hat{p}_{i+1,i+1,i}$ et $\hat{p}_{i,i+1}$ ne comportent pas de termes en $\hat{x}_1 \hat{x}_2$ que

$$\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = 0 ,$$

d'où le résultat. \square

2.5.2. Construction d'un élément fini rationnel de Serendip de degré 4 sur K

Pour tout $i \in I$, soient $a_{i,i,i+1}, a_{i,i+1}$ et $a_{i+1,i+1,i}$ les points de K définis par (cf. fig.2.5.2)

$$(2.5.3) \quad \left| \begin{array}{l} a_{i,i,i+1} = \frac{1}{4}(3a_i + a_{i+1}), \quad a_{i,i+1} = \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1}), \quad a_{i+1,i+1,i} = \frac{1}{4}(a_i + 3a_{i+1}). \end{array} \right.$$

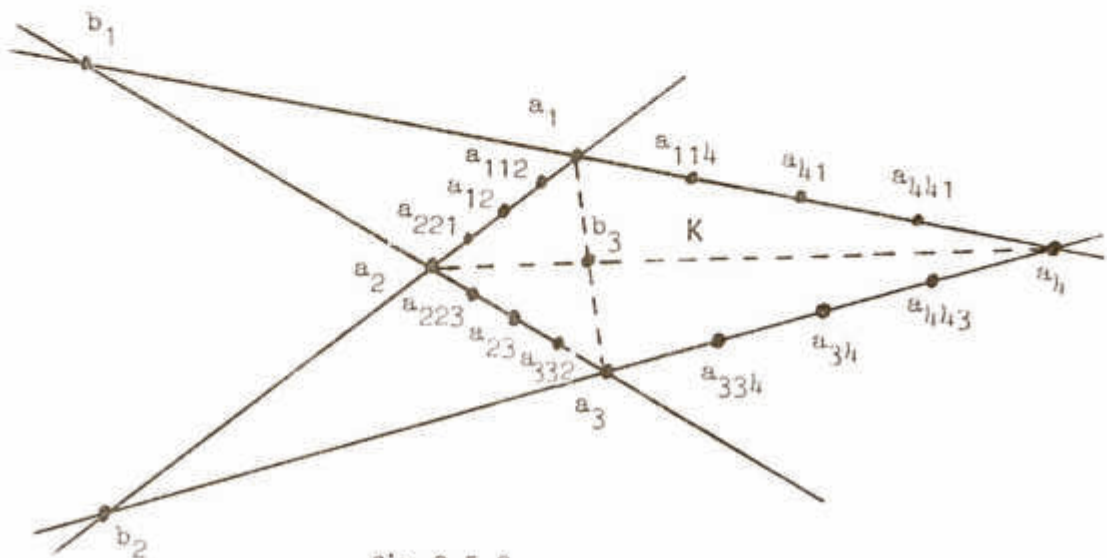


fig.2.5.2

F désignant la transformation de Coxeter-Wachspress introduite au §.2.2, soient maintenant les points de \hat{K} , $a_{i,i,i+1}$, $\hat{a}_{i,i+1}$ et $\hat{a}_{i+1,i+1,i}$ définis pour tout $i \in I$, par

$$(2.5.4) \quad \left| \begin{array}{l} \hat{a}_{i,i,i+1} = F^{-1}(a_{i,i,i+1}), \quad \hat{a}_{i,i+1} = F^{-1}(a_{i,i+1}), \quad \hat{a}_{i+1,i+1,i} = F^{-1}(a_{i+1,i+1,i}); \end{array} \right.$$

les points $\hat{a}_{i,i,i+1}$, $\hat{a}_{i,i+1}$ et $\hat{a}_{i+1,i+1,i}$ dépendent bien évidemment de K (comme F^{-1}).

Utilisant alors la méthode du paragraphe 2.5.1 on construit un élément fini polynomial de Serendip $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ à noeuds $0 = F^{-1}(b_3)$, \hat{a}_i , $\hat{a}_{i,i,i+1}$, $\hat{a}_{i,i+1}$ et $\hat{a}_{i+1,i+1,i}$, $i \in I$, irrégulièrement répartis.

Compte tenu des notations du paragraphe 2.5.1, on désigne par P

l'espace vectoriel engendré par les fonctions $w_i, w_{i,i,i+1}, w_{i,i+1}, w_{i+1,i+1,i}$, $i \in I$ et w_{b_3} définies sur K par

$$(2.5.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_i = s^h(\hat{a}_i) \left[\left(\frac{\hat{w}_i}{s} \right) \circ F^{-1} \right] , \\ w_{i,i,i+1} = s^h(\hat{a}_{i,i,i+1}) \left[\left(\frac{\hat{w}_{i,i,i+1}}{s} \right) \circ F^{-1} \right] , \\ w_{i,i+1} = s^h(\hat{a}_{i,i+1}) \left[\left(\frac{\hat{w}_{i,i+1}}{s} \right) \circ F^{-1} \right] , \\ w_{i+1,i+1,i} = s^h(\hat{a}_{i+1,i+1,i}) \left[\left(\frac{\hat{w}_{i+1,i+1,i}}{s} \right) \circ F^{-1} \right] , \\ w_{b_3} = s^h(0) \left[\left(\frac{\hat{w}_0}{s} \right) \circ F^{-1} \right] , \end{array} \right.$$

et on note Σ l'ensemble

$$(2.5.6) \quad \Sigma = \{v \circ v(a_i), v \circ v(a_{i,i,i+1}), v \circ v(a_{i,i+1}), v \circ v(a_{i+1,i+1,i}), i \in I; v \circ v(b_3)\}.$$

On vérifie que les fonctions $w_i, w_{i,i,i+1}, w_{i,i+1}, w_{i+1,i+1,i}$ et w_{b_3} sont les fonctions de base de P relativement à Σ et donc que le triplet (K, P, Σ) défini par (2.5.5) et (2.5.6) est un élément fini. \square

A partir des relations (2.5.5) on peut obtenir une définition locale des fonctions de base de l'élément fini (K, P, Σ) c'est-à-dire directement en fonction des éléments géométriques de K .

Pour tout $i \in I$ désignons par γ_i l'élément de $P_3(\mathbb{R}^2)$, par $p_{i,i,i+1}, p_{i,i+1}$ et $p_{i+1,i+1,i}$ les éléments de $P_2(\mathbb{R}^2)$ définis sur K par

$$(2.5.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_i = \ell^3(\hat{\gamma}_i \circ_F^{-1}) \quad , \\ p_{i,i,i+1} = \ell^2(\hat{p}_{i,i,i+1} \circ_F^{-1}) \quad , \\ p_{i,i+1} = \ell^2(\hat{p}_{i,i+1} \circ_F^{-1}) \quad , \\ p_{i+1,i+1,i} = \ell^2(\hat{p}_{i+1,i+1,i} \circ_F^{-1}) \quad . \end{array} \right.$$

L'équation $\gamma_i(x) = 0$ est celle d'une cubique passant par les points $a_{i-1,i-1,i}$, $a_{i-1,i}$, $a_{i,i,i-1}$, $a_{i,i,i+1}$, $a_{i,i+1}$, $a_{i+1,i+1,i}$ et b_3 (on peut préciser deux autres points de cette cubique, en utilisant (2.5.7) et la cubique $\hat{\gamma}_i$, afin de la déterminer géométriquement). De même l'équation $p_{i,i,i+1}(x) = 0$ (resp. $p_{i,i+1}(x) = 0$ ou $p_{i+1,i+1,i}(x) = 0$) est celle d'une conique passant par les points b_3 , $a_{i,i+1}$ et $a_{i+1,i+1,i}$ (resp. b_3 , $a_{i,i,i+1}$, $a_{i+1,i+1,i}$ ou b_3 , $a_{i,i+1}$, $a_{i,i,i+1}$) ; on peut ici aussi indiquer deux autres points de ces coniques, à partir des relations (2.5.7) et des coniques correspondantes dans \hat{K} afin de les déterminer géométriquement.

On en déduit alors, que pour tout $i \in I$, les fonctions de base de l'élément fini (K, P, Σ) s'écrivent encore, sur K , par

$$(2.5.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_i = c_i \frac{\ell_{i+2} \ell_{i+3} \gamma_i}{\ell} \quad , \\ w_{i,i,i+1} = c_{i,i,i+1} \frac{\ell_{i+2} \ell_{i+3} \ell_i p_{i,i,i+1}}{\ell} \quad , \\ w_{i,i+1} = c_{i,i+1} \frac{\ell_{i+2} \ell_{i+3} \ell_i p_{i,i+1}}{\ell} \quad , \\ w_{i+1,i+1,i} = c_{i+1,i+1,i} \frac{\ell_{i+2} \ell_{i+3} \ell_i p_{i+1,i+1,i}}{\ell} \quad , \\ w_{b_3} = c_{b_3} \ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4 \quad . \end{array} \right.$$

où les constantes $c_i, c_{i,i,i+1}, c_{i,i+1}, c_{i+1,i+1,i}, c_{b_3}$ sont telles que $w_i(a_i) = w_{i,i,i+1}(a_{i,i,i+1}) = w_{i,i+1}(a_{i,i+1}) = w_{i+1,i+1,i}(a_{i+1,i+1,i}) = w_{b_3}(b_3) = 1$.

On a alors le

Théorème 2.5.1

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (2.5.5) et (2.5.6) est de degré 4.

Démonstration

Il est clair que $P \neq P_5(K)$ car $\dim P = 17$ et $\dim P_5(K) = 21$.

Soit maintenant $\psi \in P_4(K)$. On considère la fonction v définie sur K par

$$v = \psi \left\{ \sum_{i \in I} [\psi(a_i)w_i + \psi(a_{i,i,i+1})w_{i,i,i+1} + \psi(a_{i,i+1})w_{i,i+1} + \psi(a_{i+1,i+1,i})w_{i+1,i+1,i}] + \psi(b_3)w_{b_3} \right\}.$$

Alors, compte tenu des relations (2.5.3), (2.5.4) et (2.5.5), et comme d'après la proposition 2.2.3,

$$\exists \hat{\psi} \in P_4(\hat{K}), \quad \psi \circ F = \frac{\hat{\psi}}{s},$$

il vient

$$v \circ F = \frac{1}{s} \left\{ \hat{\psi} - \sum_{i \in I} [\hat{\psi}(\hat{a}_i)\hat{w}_i + \hat{\psi}(\hat{a}_{i,i,i+1})\hat{w}_{i,i,i+1} + \hat{\psi}(\hat{a}_{i,i+1})\hat{w}_{i,i+1} + \hat{\psi}(\hat{a}_{i+1,i+1,i})\hat{w}_{i+1,i+1,i}] - \hat{\psi}(0)\hat{w}_0 \right\}.$$

Comme, d'après la proposition 2.5.1, $\hat{P} \supset P_4(\hat{K})$, le résultat suit. \square

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (2.5.5) et (2.5.6) est appelé élément fini rationnel de Serendip de degré 4. \square

On a enfin la

Proposition 2.5.2

L'élément fini rationnel de Serendip de degré 4 est de classe C^0 .

Démonstration

On déduit des relations (2.5.8) que les restrictions des fonctions de base de l'élément fini à chaque côté K' de K appartiennent à $P_4(K')$ (propriétés des faisceaux de droites), d'où le résultat. \square

2.6 CONSTRUCTION D'UN ELEMENT FINI RATIONNEL D'HERMITE DE
DEGRE 3 SUR UN QUADRILATERE

2.6.1. Résultat préliminaire cf. GOUT [47]

Soit K un quadrilatère convexe défini comme au §.2.1 et pour tout $i \in I$, soit γ_i un élément de $P_2(\mathbb{R}^2)$, s'il existe, tel que $\gamma_i(x)=0$ soit une équation d'une conique Γ_i telle que

$$(2.6.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_i(a_{i+1}) = \gamma_i(a_{i-1}) = 0 \\ D(\ell_{i+2}\gamma_i)(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) = 0 \\ D(\ell_{i+3}\gamma_i)(a_i) \cdot (a_{i-1} - a_i) = 0 \\ \hat{\gamma}_i(\hat{x}), \text{ où } \hat{\gamma}_i = s^2(\gamma_i \circ F), \text{ ne comporte pas de termes en } \hat{x}_1, \hat{x}_2. \end{array} \right.$$

D'après les propriétés de F rappelées au §.2.2, $\hat{\gamma}_i$ est un élément de $P_2(\mathbb{R}^2)$ tel que $\hat{\gamma}_i(\hat{x}) = 0$ soit une équation de la conique $\hat{\Gamma}_i$ transformée de Γ_i par F^{-1} .

On déduit des propriétés de F que pour tout $j \in I$ et pour tout $i \in I$ la relation

$$D(\ell_j \gamma_i)(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) = 0$$

est équivalente à

$$(2.6.2) \quad \left| \quad D\left(\frac{\hat{\ell}_j \hat{\gamma}_i}{s^3}\right)(\hat{a}_i) \cdot (\hat{a}_{i+1} - \hat{a}_i) = 0 \quad . \right.$$

Remarque 2.6.1

On peut noter que la relation $D(\ell_{i+2}\gamma_i)(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) = 0$ peut s'écrire également

$$\gamma_i(a_i) = D\gamma_i(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) \quad ,$$

et l'on a un résultat analogue pour la relation $D(\ell_{i+3}\gamma_i)(a_i) \cdot (a_{i-1} - a_i) = 0$ qui peut s'écrire $\gamma_i(a_i) = D\gamma_i(a_i) \cdot (a_{i-1} - a_i)$.

Ces relations montrent en particulier que l'on a $D\gamma_i(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_{i-1}) = 0$ ce qui montre que si la conique Γ_i existe, la droite passant par a_i menée perpendiculairement à la droite passant par les points a_{i+1} et a_{i-1} recoupe en général Γ_i en deux points où la tangente à Γ_i est parallèle à la droite passant par les points a_{i-1} et a_{i+1} .

Signalons d'autre part que les conditions (2.6.1) impliquent que γ_i s'il existe est tel que $\gamma_i(a_i) \neq 0$. \square

Il vient alors la

Proposition 2.6.1

Pour tout $i \in I$ la conique Γ_i vérifiant les propriétés (2.6.1) existe et est unique.

Démonstration

Compte tenu des relations (2.6.1) et (2.6.2) et des propriétés de F , démontrer la proposition 2.6.1 revient à démontrer l'existence et l'unicité d'un élément $\hat{\gamma}_i \in P_2(\mathbb{R}^2)$ vérifiant les relations

$$(2.6.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\gamma}_i(\hat{a}_{i+1}) = \hat{\gamma}_i(\hat{a}_{i-1}) = 0 \quad , \\ D\left(\frac{\hat{\ell}_{i+2}}{s^3} \hat{\gamma}_i\right)(\hat{a}_i) \cdot (\hat{a}_{i+1} - \hat{a}_i) = 0 \quad , \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} D \left(\frac{\hat{\ell}_{i+3} \hat{\gamma}_i}{s^3} \right) (\hat{a}_i) \cdot (\hat{a}_{i-1} - \hat{a}_i) = 0 \quad , \\ \hat{\gamma}_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \alpha_i \hat{x}_1^2 + \beta_i \hat{x}_2^2 + \delta_i \hat{x}_1 + \epsilon_i \hat{x}_2 + 1 \quad . \end{array} \right.$$

où $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \epsilon_i \in \mathbb{R}$ et où on suppose donc que $\hat{\Gamma}_i$ ne passe pas par l'origine (par suite Γ_i ne passe pas par b_3).

Notant alors pour simplifier $\lambda = \frac{\xi_1}{\xi_3}$ et $\mu = \frac{\xi_2}{\xi_3}$, l'équation de la droite S introduite au §.2.2 s'écrit

$$\left| \sigma(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \lambda \hat{x}_1 + \mu \hat{x}_2 + 1 = 0 \quad . \right.$$

Ecrivant les conditions (2.6.3) aux points $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ et \hat{a}_4 , et, pour simplifier l'écriture, notant $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$ au lieu de $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \epsilon_i$ on obtient successivement pour les coniques $\hat{\Gamma}_i$ ($i \in I$) les systèmes suivants

Conique $\hat{\Gamma}_1$

$$\left| \begin{array}{l} \alpha + \beta - \delta - \epsilon = -1 \\ \alpha + \beta + \delta + \epsilon = -1 \\ (1-A)\alpha + (5-A)\beta + (-1+A)\delta + (3-A)\epsilon = -1 + A \\ (5+B)\alpha + (1+B)\beta + (-3-B)\delta + (1+B)\epsilon = -1 - B \end{array} \right.$$

où, pour simplifier on a noté $A = \frac{6\mu}{\sigma(\hat{a}_1)}$ et $B = \frac{6\lambda}{\sigma(\hat{a}_1)}$.

Le déterminant $\hat{\Delta}_1$ de ce système est égal à $16(A-B-4)$ soit $\left[-32\left(\frac{\lambda-\mu+2}{\sigma(\hat{a}_1)}\right)\right]$ et l'on a $\hat{\Delta}_1 \neq 0$ car si $\lambda = \mu - 2$ la droite S appartient alors au faisceau de droites d'équations $(\mu-2)\hat{x}_1 + \mu\hat{x}_2 + 1 = 0$ qui passent par le point $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ce qui est impossible car $s(\hat{x}) \neq 0$ pour $\hat{x} \in \hat{K}$ d'après (2.2.2).

Conique $\hat{\Gamma}_2$

$$\alpha + \beta + \delta - \epsilon = -1$$

$$\alpha + \beta - \delta + \epsilon = -1$$

$$(5+A)\alpha + (1+A)\beta + (-3-A)\delta + (-1-A)\epsilon = -1 - A$$

$$(1+B)\alpha + (5+B)\beta + (-1-B)\delta + (-3-B)\epsilon = -1 - B$$

où, pour simplifier on a noté $A = \frac{6\lambda}{\sigma(\hat{a}_2)}$ et $B = \frac{6\mu}{\sigma(\hat{a}_2)}$.

Le déterminant $\hat{\Delta}_2$ de ce système est égal à $16(4+A+B)$ soit $32\left[\frac{\lambda+\mu+2}{\sigma(\hat{a}_2)}\right]$ et l'on a $\hat{\Delta}_2 \neq 0$ car si $\lambda = -\mu - 2$, la droite S appartient alors au faisceau de droites d'équations $(-\mu-2)\hat{x}_1 + \mu\hat{x}_2 + 1 = 0$ qui passent par le point $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ce qui est impossible car $s(\hat{x}) \neq 0$ pour $\hat{x} \in \hat{K}$ (cf. 2.2.2).

Conique $\hat{\Gamma}_3$

$$\alpha + \beta + \delta + \epsilon = -1$$

$$\alpha + \beta - \delta - \epsilon = -1$$

$$(1+A)\alpha + (5+A)\beta + (1+A)\delta + (-3-A)\epsilon = -1 - A$$

$$\left| \begin{array}{l} (5-B)\alpha + (1-B)\beta + (3-B)\delta + (-1+B)\epsilon = -1 + B \end{array} \right.$$

où l'on a noté $A = \frac{6\mu}{\sigma(\hat{a}_3)}$ et $B = \frac{6\lambda}{\sigma(\hat{a}_3)}$.

Le déterminant $\hat{\Delta}_3$ de ce système est égal à $16(-4-A+B)$ soit $\left[-32 \left(\frac{\lambda-\mu-2}{\sigma(\hat{a}_3)} \right) \right]$ et l'on a $\hat{\Delta}_3 \neq 0$ car si $\lambda = \mu + 2$, la droite S appartient alors au faisceau de droites d'équations $(\mu+2)\hat{x}_1 + \mu\hat{x}_2 + 1 = 0$ qui passent par le point $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ce qui est impossible car $s(\hat{x}) \neq 0$ pour $\hat{x} \in \hat{K}$ (cf. 2.2.2).

Conique $\hat{\Gamma}_4$

$$\left| \begin{array}{l} \alpha + \beta - \delta + \epsilon = -1 \\ \alpha + \beta + \delta - \epsilon = -1 \\ (5-A)\alpha + (1-A)\beta + (3-A)\delta + (1-A)\epsilon = -1 + A \\ (1-B)\alpha + (5-B)\beta + (1-B)\delta + (3-B)\epsilon = -1 + B \end{array} \right.$$

où l'on a noté $A = \frac{6\lambda}{\sigma(\hat{a}_4)}$ et $B = \frac{6\mu}{\sigma(\hat{a}_4)}$.

Le déterminant $\hat{\Delta}_4$ de ce système est égal à $16(4-A-B)$ soit $\left[32 \left(\frac{2-\lambda-\mu}{\sigma(\hat{a}_4)} \right) \right]$ et l'on a $\hat{\Delta}_4 \neq 0$ car si $\lambda = -\mu + 2$ la droite S appartient alors au faisceau de droites d'équations $(2-\mu)\hat{x}_1 + \mu\hat{x}_2 + 1 = 0$ qui passent par le point $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ce qui est impossible car $s(\hat{x}) \neq 0$ pour $\hat{x} \in \hat{K}$ d'après (2.2.2).

Ainsi, d'après ce qui précède, pour tout $i \in I$, à chaque point \hat{a}_i

correspond une conique unique $\hat{\Gamma}_i$ vérifiant les propriétés (2.6.3) d'où le résultat.

Il a été nécessaire d'étudier séparément les cas des quatre sommets du quadrilatère, car ceux-ci ne jouent pas tous un rôle symétrique dans le quadrilatère K .

2.6.2 Elément fini rationnel d'Hermite de degré 3 sur un quadrilatère

K désigne un quadrilatère convexe défini comme au paragraphe 2.1.

Soient P l'espace vectoriel engendré par les fonctions w_i^0 , $i \in I$, et $w_{i,j}^1$, $i \in I$, $j = i-1, i+1$, définies sur K par

$$(2.6.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_i^0 = c_i^0 \frac{l_{i+2} l_{i+3} \gamma_i}{l} , \\ w_{i,i-1}^1 = c_{i,i-1}^1 \frac{l_{i+1} l_{i+2} l_{i+3}^2}{l} , \\ w_{i,i+1}^1 = c_{i,i+1}^1 \frac{l_{i+2}^2 l_{i+3} l_i}{l} , \end{array} \right.$$

où les constantes c_i^0 , $c_{i,i-1}^1$ et $c_{i,i+1}^1$ sont telles que

$$w_i^0(a_i) = Dw_{i,i-1}^1(a_i) \cdot (a_{i-1} - a_i) = Dw_{i,i+1}^1(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) = 1 ,$$

et où, pour tout $i \in I$, γ_i est un élément de $P_2(\mathbb{R}^2)$ vérifiant les conditions (2.6.1) ,

et Σ l'ensemble

$$(2.6.5) \quad \left\{ \Sigma = \{v \mapsto v(a_i), i \in I ; v \mapsto Dv(a_i) \cdot (a_j - a_i), i \in I, j = i-1, i+1\} . \right.$$

Remarque 2.6.2

Des expressions des fonctions $w_{i,i-1}^1$ et $w_{i,i+1}^1$, on déduit que

$$c_{i,i-1}^1 = \frac{l(a_i)}{l_{i+1}(a_{i-1}) l_{i+2}(a_i) l_{i+3}^2(a_i)}$$

et

$$c_{i,i+1}^1 = \frac{\ell(a_i)}{\ell_{i+2}^2(a_i)\ell_{i+3}(a_i)\ell_i(a_{i+1})} .$$

D'autre part il résulte de leur définition que les coniques Γ_i ($i \in I$) définies par les relations (2.6.1) passent par les points a_{i-1} et a_{i+1} , ne passent pas par les points a_i et b_3 et sont déterminées géométriquement par la donnée de a_{i-1} , a_i et de trois autres points pouvant être choisis comme les images par F de trois points quelconques (distincts de \hat{a}_{i-1} et \hat{a}_{i+1}) de la conique $\hat{\Gamma}_i$ définie par (2.6.3). \square

On a alors la

Proposition 2.6.2

P et Σ étant définis par (2.6.4) et (2.6.5), (K, P, Σ) est un élément fini.

Démonstration

Tout d'abord on a $\dim P = \text{Card } \Sigma = 12$. Pour montrer la P -unisolvance de Σ on va montrer que les fonctions w_i^0 , $w_{i,i-1}^1$ et $w_{i,i+1}^1$ définies par les relations (2.6.4) sont les fonctions de base de P relativement à Σ .

Fonctions w_i^0

On vérifie aisément que

$$(2.6.6) \quad \left| \begin{array}{l} \forall i \in I, \forall j \in I \quad w_i^0(a_j) = \delta_{ij} . \end{array} \right.$$

D'autre part, du fait de l'annulation de w_i^0 sur d_{i+2} et d_{i+3} et de celle de γ_i en a_{i-1} et a_{i+1} , on a

$$(2.6.7) \quad \left| \quad \forall i \in I, \forall j \in I, i \neq j, \quad Dw_i^0(a_j) = 0 \quad . \right.$$

De plus

$$\begin{aligned} Dw_i^0(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{w_i^0[a_i + \alpha(a_{i+1} - a_i)] - w_i^0(a_i)}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\ell_{i+2} \ell_{i+3} \gamma_i}{\ell} [a_i + \alpha(a_{i+1} - a_i)] \left(\frac{\ell}{\ell_{i+2} \ell_{i+3} \gamma_i} \right) (a_i) - 1 \right] \end{aligned}$$

qui, comme $\frac{\ell_{i+3}}{\ell}$ est constant sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$, est encore égal à

$$\begin{aligned} &\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \left[\frac{(\ell_{i+2} \gamma_i) [a_i + \alpha(a_{i+1} - a_i)]}{(\ell_{i+2} \gamma_i)(a_i)} - 1 \right] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \left[\frac{(\ell_{i+2} \gamma_i) [a_i + \alpha(a_{i+1} - a_i)] - (\ell_{i+2} \gamma_i)(a_i)}{(\ell_{i+2} \gamma_i)(a_i)} \right] \\ &= \frac{D(\ell_{i+2} \gamma_i)(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i)}{(\ell_{i+2} \gamma_i)(a_i)} \quad . \end{aligned}$$

Donc comme $\gamma_i, i \in I$, vérifie les conditions (2.6.1), on a bien

$$Dw_i^0(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) = 0$$

et on démontrerait de même que, pour tout $i \in I$,

$$Dw_i^0(a_i) \cdot (a_{i-1} - a_i) = 0 \quad ,$$

soit en définitive ,

$$(2.6.8) \quad \left| \quad \forall i \in I \quad Dw_i^0(a_i) = 0 \quad . \right.$$

Finalement les relations (2.6.6), (2.6.7) et (2.6.8) donnent

$$(2.6.9) \quad \left| \quad \forall i \in I, \forall j \in I \quad w_i^0(a_j) = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad Dw_i^0(a_j) = 0 . \right.$$

Fonctions $w_{i,i+1}^1$ et $w_{i,i-1}^1$

Considérons maintenant l'une de ces fonctions $w_{i,i+1}^1$: on a immédiatement

$$(2.6.10) \quad \left| \quad \forall i \in I, \forall j \in I, w_{i,i+1}^1(a_j) = 0 , \right.$$

et, par hypothèse ,

$$(2.6.11) \quad \left| \quad Dw_{i,i+1}^1(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) = 1 . \right.$$

D'autre part, de l'expression de $w_{i,i+1}^1$, on déduit que

$$(2.6.12) \quad \left| \quad \forall i \in I, \forall j \in I, j \neq i \quad Dw_{i,i+1}^1(a_j) = 0 . \right.$$

et

$$(2.6.13) \quad \left| \quad Dw_{i,i+1}^1(a_i) \cdot (a_{i-1} - a_i) = 0 . \right.$$

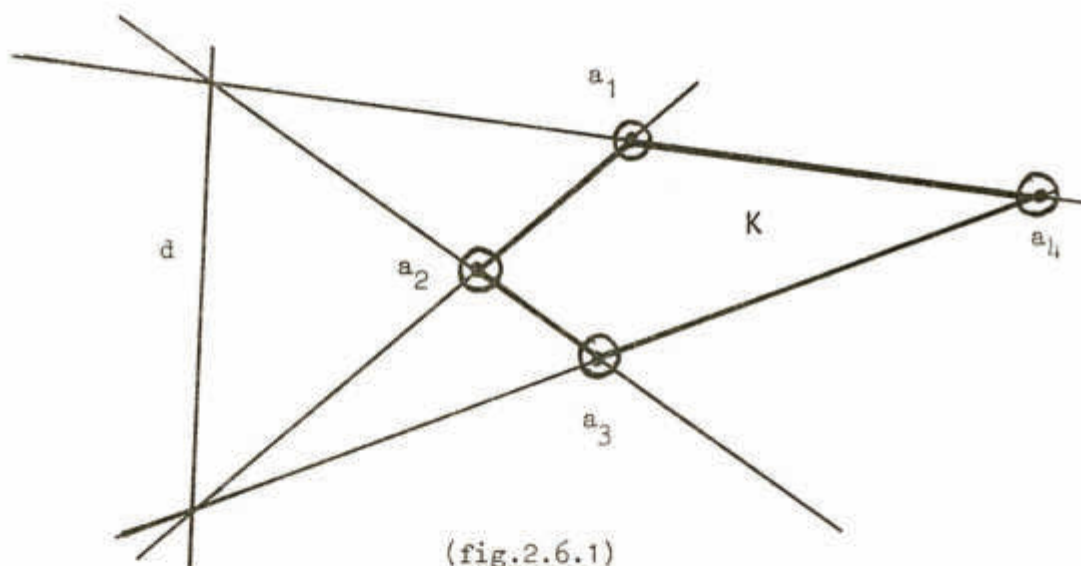
On obtiendrait des résultats analogues pour les fonctions $w_{i,i-1}^1$.

Alors, à partir des relations (2.6.10), (2.6.11), (2.6.12) et (2.6.13) on déduit les propriétés

$$(2.6.14) \quad \left| \begin{array}{l} \forall i \in I, \forall j \in I \quad w_{i,i+1}^1(a_j) = 0, w_{i,i-1}^1(a_j) = 0, \\ \forall i \in I, \forall j \in I, j \neq i, Dw_{i,i+1}^1(a_j) = 0 \quad Dw_{i,i-1}^1(a_j) = 0, \\ \forall i \in I, Dw_{i,i+1}^1(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) = 1, Dw_{i,i+1}^1(a_i) \cdot (a_{i-1} - a_i) = 0, \\ \forall i \in I, Dw_{i,i-1}^1(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) = 0, Dw_{i,i-1}^1(a_i) \cdot (a_{i-1} - a_i) = 1. \end{array} \right.$$

Les relations (2.6.9) et (2.6.14) montrent que les fonctions w_i^0 , $w_{i,i+1}^1$ et $w_{i,i-1}^1$, $i \in I$, sont les fonctions de base de P relativement à Σ , ce qui achève la démonstration. \square

On notera l'analogie avec l'élément fini d'Adini (cf.[1]) qui, lui, est défini sur un rectangle, et dont les fonctions de base sont polynomiales. \square



Théorème 2.6.1

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (2.6.4) et (2.6.5) est de degré 3.

Démonstration

Il est clair que $P \not\subset P_4(K)$ car $\dim P = 12$ et $\dim P_4(K) = 15$.

Soit $\psi \in P_3(K)$. On considère la fonction v définie sur K par

$$(2.6.15) \quad v = \psi - \left\{ \sum_{i \in I} \psi(a_i) w_i^0 + \sum_{\substack{i \in I \\ j=i-1, i+1}} [D\psi(a_j) \cdot (a_j - a_i)] w_{i,j}^1 \right\}.$$

Or compte tenu de la proposition 2.2.3, il vient

$$(2.6.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi \circ F = \frac{\hat{\psi}}{s^3}, \quad \hat{\psi} \in P_3(\hat{K}), \\ \forall i \in I, \quad \psi(a_i)(w_i^0 \circ F) = \hat{\psi}(\hat{a}_i) \frac{\hat{w}_i^0}{s^3}, \\ \forall i \in I, \quad \forall j = i-1, i+1, \\ [D\psi(a_i) \cdot (a_j - a_i)](w_{i,j}^1 \circ F) = D\left(\frac{\hat{\psi}}{s^3}\right)(\hat{a}_i) \circ DF^{-1}[F(\hat{a}_j)] \cdot (F(\hat{a}_j) - F(\hat{a}_i)) \frac{\hat{w}_{i,j}^1}{s^3}, \end{array} \right.$$

où pour tout $i \in I$

$$\hat{w}_i^0 = \hat{c}_i^0 \hat{\ell}_{i+2} \hat{\ell}_{i+3} \hat{\gamma}_i, \quad \hat{w}_{i,i+1}^1 = \hat{c}_{i,i+1}^1 \hat{\ell}_{i+2}^2 \hat{\ell}_{i+3} \hat{\ell}_i, \quad \hat{w}_{i,i-1}^1 = \hat{c}_{i,i-1}^1 \hat{\ell}_{i+1} \hat{\ell}_{i+2} \hat{\ell}_{i+3}^2,$$

d'où les constantes \hat{c}_i^0 , $\hat{c}_{i,i+1}^1$ et $\hat{c}_{i,i-1}^1$ s'explicitent sous la forme

$$\hat{c}_i^0 = \frac{1}{(\hat{\ell}_{i+2} \hat{\ell}_{i+3} \hat{\gamma}_i)(\hat{a}_i)}$$

$$\hat{c}_{i,i+1}^1 = \frac{s^2(\hat{a}_i) s(\hat{a}_{i+1})}{\hat{\ell}_{i+2}^2(\hat{a}_i) \hat{\ell}_{i+3}(\hat{a}_i) \hat{\ell}_i(\hat{a}_{i+1})}, \quad \hat{c}_{i,i-1}^1 = \frac{s^2(\hat{a}_i) s(\hat{a}_{i-1})}{\hat{\ell}_{i+1}(\hat{a}_{i-1}) \hat{\ell}_{i+2}(\hat{a}_i) \hat{\ell}_{i+3}^2(\hat{a}_i)}.$$

Alors $\psi \circ F$ peut s'écrire sous la forme $\frac{\hat{v}}{s^3}$, où d'après (2.6.16)

\hat{v} est défini par

$$(2.6.17) \quad \left| \hat{v} = \hat{\psi} - \sum_{i \in I} \hat{\psi}(\hat{a}_i) \hat{w}_i^0 - \sum_{\substack{i \in I \\ j=i-1, i+1}} D\left(\frac{\hat{\psi}}{s^3}\right)(\hat{a}_i) \circ DF^{-1}[F(\hat{a}_j)] \cdot (F(\hat{a}_j) - F(\hat{a}_i)) \hat{w}_{i,j}^1 \right.$$

Les expressions des fonctions \hat{w}_i^0 et $\hat{w}_{i,j}^1$, ainsi que le choix de $\hat{\psi}$, montrent que $\hat{v} \in P_4(\hat{K})$.

Considérons alors la restriction \hat{v}' de \hat{v} à un côté quelconque \hat{K}' de \hat{K} . On déduit immédiatement des expressions \hat{w}_i^0 et $\hat{w}_{i,j}^1$ que

$$\hat{v}' \in P_3(\hat{K}') .$$

De même, d'après les relations (2.6.17), on a, si \hat{K}' est le segment $[\hat{a}_\ell, \hat{a}_{\ell+1}]$

$$(2.6.18) \quad \left| \quad \hat{v}'(\hat{a}_\ell) = \hat{v}'(\hat{a}_{\ell+1}) = 0 . \right.$$

Etudions maintenant, par exemple, l'expression $D(\frac{\hat{v}}{s})(\hat{a}_\ell) \cdot (\hat{a}_{\ell+1} - \hat{a}_\ell)$.

A partir de la définition des \hat{w}_i^0 , $i \in I$, et des $\hat{w}_{i,j}^1$, $i \in I$, $j = i-1, i+1$, et compte tenu des relations (2.6.14) il vient

$$(2.6.19) \quad \left| \quad \forall i \in I \quad D(\frac{\hat{w}_i^0}{s})(\hat{a}_\ell) \cdot (\hat{a}_{\ell+1} - \hat{a}_\ell) = 0 \right.$$

et

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{i \in I \\ j=i-1, i+1}} D(\frac{\hat{\psi}}{s})(\hat{a}_i) \text{ODF}^{-1}[F(\hat{a}_i)](F(\hat{a}_j) - F(\hat{a}_i)) D(\frac{\hat{w}_{i,j}^1}{s})(\hat{a}_\ell) \cdot (\hat{a}_{\ell+1} - \hat{a}_\ell) \\ &= D(\frac{\hat{\psi}}{s})(\hat{a}_\ell) \text{ODF}^{-1}[F(\hat{a}_\ell)](a_{\ell+1} - a_\ell) D(\frac{\hat{w}_{\ell, \ell+1}^1}{s})(\hat{a}_\ell) \cdot (\hat{a}_{\ell+1} - \hat{a}_\ell) . \end{aligned}$$

Comme

$$D(\frac{\hat{w}_{\ell, \ell+1}^1}{s})(\hat{a}_\ell) \cdot (\hat{a}_{\ell+1} - \hat{a}_\ell) = D w_{\ell, \ell+1}^1(a_\ell) \text{ODF}(\hat{a}_\ell) \cdot (\hat{a}_{\ell+1} - \hat{a}_\ell)$$

et que, avec les propriétés de F (cf. proposition 2.2.2)

$$DF(\hat{a}_\ell) \cdot (\hat{a}_{\ell+1} - \hat{a}_\ell) = \lambda(a_{\ell+1} - a_\ell) , \quad \lambda \in \mathbb{R}^* ,$$

et

$$DF^{-1}(a_\ell) \cdot (a_{\ell+1} - a_\ell) = [DF(\hat{a}_\ell)]^{-1} (a_{\ell+1} - a_\ell) = \frac{\hat{a}_{\ell+1} - \hat{a}_\ell}{\lambda} ,$$

on obtient finalement ,

$$(2.6.20) \quad \left| \begin{array}{l} \sum_{\substack{i \in I \\ j=i-1, i+1}} D\left(\frac{\hat{\psi}}{s^3}\right)(\hat{a}_i) \circ DF^{-1}[F(\hat{a}_i)](F(\hat{a}_j) - F(\hat{a}_i)) D\left(\frac{\hat{v}_i}{s^3}\right)(\hat{a}_\ell) \circ (\hat{a}_{\ell+1} - \hat{a}_\ell) \\ = D\left(\frac{\hat{\psi}}{s^3}\right)(\hat{a}_\ell) \cdot (\hat{a}_{\ell+1} - \hat{a}_\ell) \end{array} \right.$$

Alors d'après les relations (2.6.19) et (2.6.20), compte tenu de (2.6.17) on a

$$D\left(\frac{\hat{v}}{s^3}\right)(\hat{a}_\ell) \cdot (\hat{a}_{\ell+1} - \hat{a}_\ell) = 0$$

et comme $\hat{v}(\hat{a}_\ell) = 0$,

$$(2.6.21) \quad \left| \quad D\hat{v}'(\hat{a}_\ell) \cdot (\hat{a}_{\ell+1} - \hat{a}_\ell) = 0 . \right.$$

De même on montre que

$$(2.6.22) \quad \left| \quad D\hat{v}'(\hat{a}_{\ell+1}) \cdot (\hat{a}_\ell - \hat{a}_{\ell+1}) = 0 . \right.$$

Alors $\hat{v}' \in P_3(\hat{K}')$ vérifie quatre conditions d'annulation indépendantes, données par (2.6.18), (2.6.21) et (2.6.22), et donc

$$\hat{v}' = 0 \quad \text{sur} \quad \hat{K}' .$$

Ainsi \hat{v} s'annule sur les quatre côtés du carré de référence \hat{K} et peut donc s'écrire

$$\hat{v}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{c}(1 - \hat{x}_1^2)(1 - \hat{x}_2^2) , \quad \hat{c} \in \mathbb{R}$$

L'identification des termes en $\hat{x}_1^2 \hat{x}_2^2$ dans (2.6.17) montre alors, puisque les $\hat{\gamma}_i$ ne comportent pas de termes en $\hat{x}_1 \hat{x}_2$, que

$$\hat{c} = 0$$

et par suite que $v = 0$ sur K . Donc d'après (2.6.15), $\psi \in P$, d'où le résultat. \square

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (2.6.4) et (2.6.5) est appelé élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 sur un quadrilatère.

Il vient alors la

Proposition 2.6.3

L'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 sur un quadrilatère est de classe C^0 .

Démonstration

Soient donc Ω un ouvert polygonal borné de \mathbb{R}^2 , (\mathcal{T}_h) une "triangulation quelconque de Ω au moyen de quadrilatères K définis comme au §.2.1 et V_h un espace d'éléments finis de même type dont l'élément générique (K, P, Σ) est l'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 sur un quadrilatère.

Soient alors $v \in V_h$, K_j et K_ℓ deux quadrilatères adjacents ayant pour côté commun le segment K' de sommets a_i et a_{i+1} . Alors on sait que

$$v|_{K_j} = v_j \in P(K_j) \quad \text{et} \quad v|_{K_\ell} = v_\ell \in P(K_\ell).$$

Compte tenu des relations (2.6.4), les restrictions des fonctions de base à K' sont des éléments de $P_3(K')$ (propriétés des faisceaux de droites).

Par suite

$$(2.6.23) \quad \left| \begin{array}{l} (v_j - v_\ell)|_{K'} \in P_3(K') \quad , \\ (v_j - v_\ell)(a_i) = (v_j - v_\ell)(a_{i+1}) = 0 \quad , \\ D(v_j - v_\ell)(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) = D(v_j - v_\ell)(a_{i+1}) \cdot (a_i - a_{i+1}) = 0 \quad . \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit que $(v_j - v_\ell)|_{K'} = 0$, et le résultat suit. \square

*

Remarque 2.6.3

Comme il a déjà été dit, les éléments finis rationnels sur un quadrilatère considérés dans ce chapitre sont à rapprocher des éléments finis polynomiaux de Serendip (cf. ZIENKIEWICZ [89]) , ainsi qu'à ceux de Lagrange sur un rectangle qui nécessitent pour leur part des noeuds d'interpolation intérieurs : ainsi, par exemple, si l'élément fini rationnel de Serendip de degré 3 (cf. §.2.4 et APPRATO-ARCANGELI-GOUT [6]) et l'élément fini de Serendip polynomial de degré 3 sur un rectangle ont chacun 12 noeuds d'interpolation, l'élément fini polynomial de Lagrange sur un rectangle de degré 3 en comporte 16 (cf. fig.2.6.2).

Notons à ce sujet que WACHSPRESS construit directement (cf. §.6.3 de [85]) un élément fini rationnel de degré 3 sur un quadrilatère avec 13 noeuds d'interpolation dont un noeud intérieur (cf. fig.2.6.3).

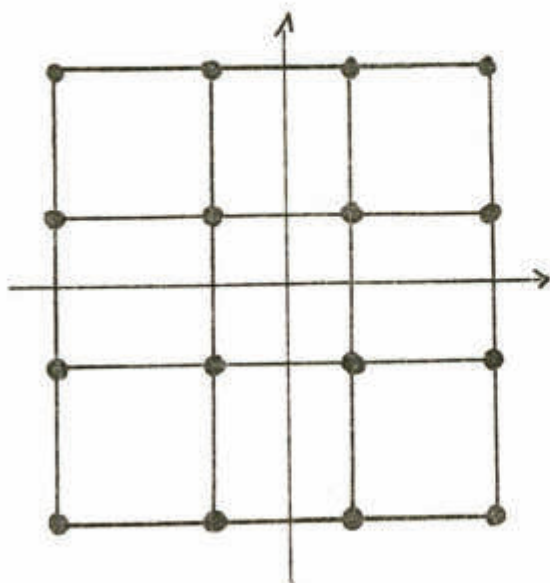


fig. 2.6.2

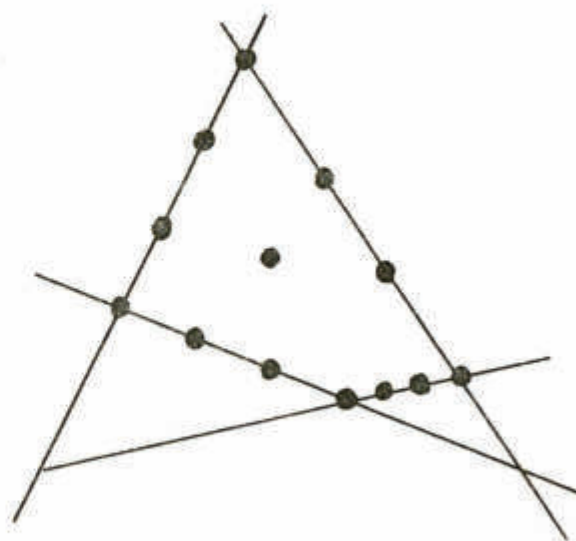


fig.2.6.3

Dans le même ordre d'idées indiquons aussi quelques éléments finis courbes de degré 3, bien que les éléments finis courbes ne soient pas l'objet de ce travail . Citons par exemple l'élément fini rationnel de degré 3 sur un quadrilatère courbe (dont chaque côté est conique) dû à WACHSPRESS (cf.[84]) avec 25 noeuds d'interpolation dont un intérieur.



fig.2.6.4

Remarquons cependant qu'il reste à traiter le problème de l'intégration numérique pour les éléments finis correspondants aux figures (2.6.3) et (2.6.4)

D'autre part l'étude de l'élément fini rationnel de Wachspress de degré 3 sur un quadrilatère courbe (cf. fig.2.6.4) est à rapprocher de celle de l'élément fini isoparamétrique (plus précisément sous paramétrique) de degré 3 comportant 49 noeuds dont 24 intérieurs (cf. fig.2.6.5) et donné par WACHSPRESS dans [84] .

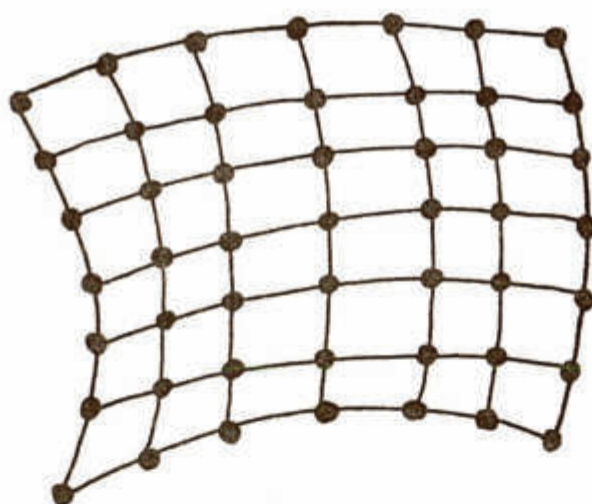
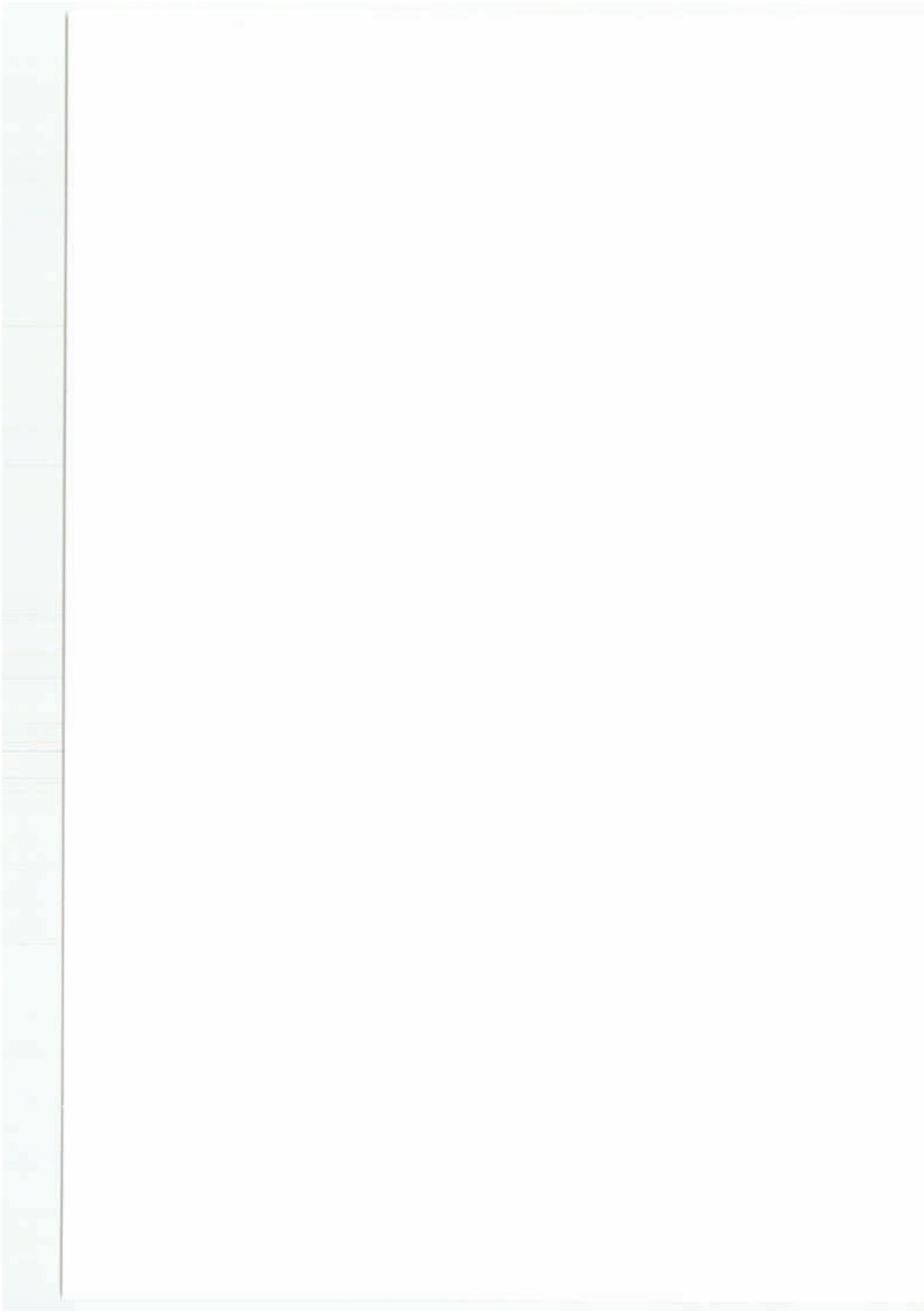


fig.2.6.5

Rappelons enfin que dans la résolution de tout système linéaire correspondant à l'approximation d'un problème variationnel par éléments finis du type indiqué par les figures 2.6.3, 2.6.4 et 2.6.5, les inconnues correspondant à des noeuds intérieurs peuvent être éliminées par condensation statique.



Chapitre 3

-

ELEMENTS FINIS RATIONNELS PENTAGONAUX ET HEXAGONAUX DE TYPE WACHSPRESS

--

Ce chapitre a pour objet la construction et l'étude d'éléments finis rationnels de type Wachspress construits sur des pentagones et des hexagones convexes. Ces éléments finis seront tous de type Lagrange, à l'exception de l'un d'entre eux, construit sur un hexagone régulier, de type Hermite.

3.1. NOTATIONS GEOMETRIQUES ET RAPPEL D'UN RESULTAT

Dans tout ce chapitre K est un polygone convexe fermé à N côtés ($N = 5$ ou 6), de sommets a_i , $i \in I = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, numérotés de manière que les sommets a_i et a_{i+1} soient consécutifs, et pour tout $i \in I$, on désigne par l_i un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $l_i(x) = 0$ soit une équation de la droite d_i passant par les points a_{i-1} et a_i . Pour tout $i \in I$, pour tout $j \in I$, $j \neq i-1$, $j \neq i$, $j \neq i+1$, on appelle $d_{i,j}$ la droite joignant a_i et a_j .

D'autre part, on note $a_{i,i+1}$ le milieu du segment d'extrémités a_i et a_{i+1} , et on désigne par l'_i , $i \in I$, un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $l'_i(x) = 0$ soit une équation de la droite d'_i passant par les points $a_{i-1,i}$ et $a_{i,i+1}$.

De plus, on désigne par b_i , $i \in I$, le point d'intersection, s'il existe, des droites d_{i-1} et d_{i+1} . De même on note respectivement b_7 , b_8 et b_9 les points d'intersection, s'ils existent, des droites d_1 et d_4 , d_2 et d_5 , d_3 et d_6 , dans le cas où K est un hexagone.

Enfin on désigne par q un élément de $P_{N-3}(\mathbb{R}^2)$, $N = 5$ ou 6 tel que $q(x) = 0$ soit une équation de la courbe de degré $N-3$, éventuellement dégénérée, passant par les $\frac{N(N-3)}{2}$ points diagonaux extérieurs b_i . On précisera plus loin la nature de ces courbes.

Rappelons également le résultat suivant, utilisé pour la construction et l'étude du degré des éléments finis rationnels pentagonaux et hexagonaux de type Wachspress.

Proposition 3.1.1

Soient $p \in P_k(\mathbb{R}^2)$, $q \in P_m(\mathbb{R}^2)$, $\ell \in P_1(\mathbb{R}^2)$ tels que

$$p(A_i) = q(A_i) = \ell(A_i) = 0, \quad A_i \in \mathbb{R}^2, \quad 1 \leq i \leq s,$$

Alors

$$\exists \phi \in P_{k-s}(d^*), \quad \exists \psi \in P_{m-s}(d^*)$$

tels que $\frac{p}{q} \Big|_{d^*} = \frac{\phi}{\psi}$ où

$$d^* = \{x \in \mathbb{R}^2, \ell(x) = 0\} - \{A_i, 1 \leq i \leq s\}.$$

Démonstration (cf. Lemme 3.1 de WACHSPRESS [85]). \square

3.2. ELEMENTS FINIS RATIONNELS PENTAGONAUX DE WACHSPRESS DE

DEGRES 1 et 2

Dans ce paragraphe K est un pentagone convexe fermé, les points diagonaux extérieurs b_i , $i \in I = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ pouvant être éventuellement rejetés à l'infini : si K possède une paire (respectivement deux paires) de côtés parallèles, un point diagonal est rejeté à l'infini (respectivement deux points diagonaux sont rejetés à l'infini).

Dans tous les cas on définit de façon unique la conique Q passant par les cinq points diagonaux extérieurs, s'ils sont tous à distance finie (cf. fig.3.2.1), ou passant par quatre points diagonaux extérieurs et admettant une asymptote ou un axe parallèle aux deux côtés parallèles, si l'un des points diagonaux est rejeté à l'infini (cf. fig.3.2.2) ou passant par trois points diagonaux extérieurs et admettant deux asymptotes parallèles respectivement aux côtés parallèles deux à deux (cf. fig.3.2.3), si deux des points diagonaux extérieurs sont rejetés à l'infini.

Soit alors $q \in P_2(\mathbb{R}^2)$ tel que $q(x) = 0$ soit une équation de la conique Q définie ci-dessus.

Enfin, pour tout $i \in I$, on notera $d_i^* = d_i \cap \mathbb{C}_{\mathbb{R}^2} Q$.

Proposition 3.1.1

Soient $p \in P_k(\mathbb{R}^2)$, $q \in P_m(\mathbb{R}^2)$, $l \in P_1(\mathbb{R}^2)$ tels que

$$p(A_i) = q(A_i) = l(A_i) = 0, \quad A_i \in \mathbb{R}^2, \quad 1 \leq i \leq s,$$

Alors

$$\exists \phi \in P_{k-s}(d^*), \quad \exists \psi \in P_{m-s}(d^*)$$

tels que $\frac{p}{q} \Big|_{d^*} = \frac{\phi}{\psi}$ où

$$d^* = \{x \in \mathbb{R}^2, l(x) = 0\} - \{A_i, 1 \leq i \leq s\}.$$

Démonstration (cf. Lemme 3.1 de WACHSPRESS [85]). \square

3.2. ELEMENTS FINIS RATIONNELS PENTAGONAUX DE WACHSPRESS DE

DEGRES 1 et 2

Dans ce paragraphe K est un pentagone convexe fermé, les points diagonaux extérieurs b_i , $i \in I = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ pouvant être éventuellement rejetés à l'infini : si K possède une paire (respectivement deux paires) de côtés parallèles, un point diagonal est rejeté à l'infini (respectivement deux points diagonaux sont rejetés à l'infini).

Dans tous les cas on définit de façon unique la conique Q passant par les cinq points diagonaux extérieurs, s'ils sont tous à distance finie (cf. fig.3.2.1), ou passant par quatre points diagonaux extérieurs et admettant une asymptote ou un axe parallèle aux deux côtés parallèles, si l'un des points diagonaux est rejeté à l'infini (cf. fig.3.2.2) ou passant par trois points diagonaux extérieurs et admettant deux asymptotes parallèles respectivement aux côtés parallèles deux à deux (cf. fig.3.2.3), si deux des points diagonaux extérieurs sont rejetés à l'infini.

Soit alors $q \in P_2(\mathbb{R}^2)$ tel que $q(x) = 0$ soit une équation de la conique Q définie ci-dessus.

Enfin, pour tout $i \in I$, on notera $d_i^* = d_i \cap \bigcap_{\mathbb{R}^2} Q$.

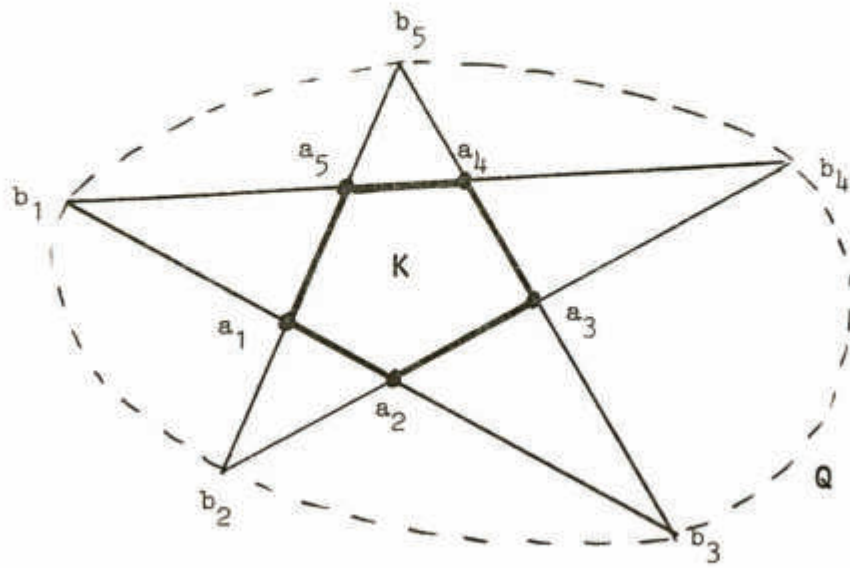


fig.3.2.1

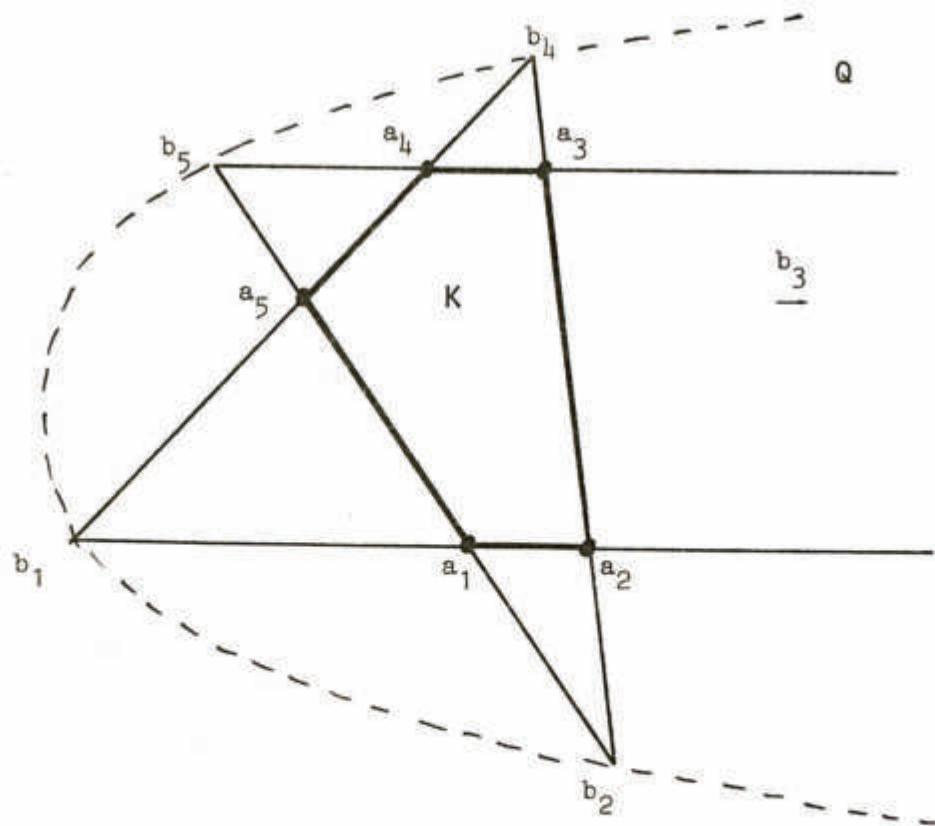


fig.3.2.2.

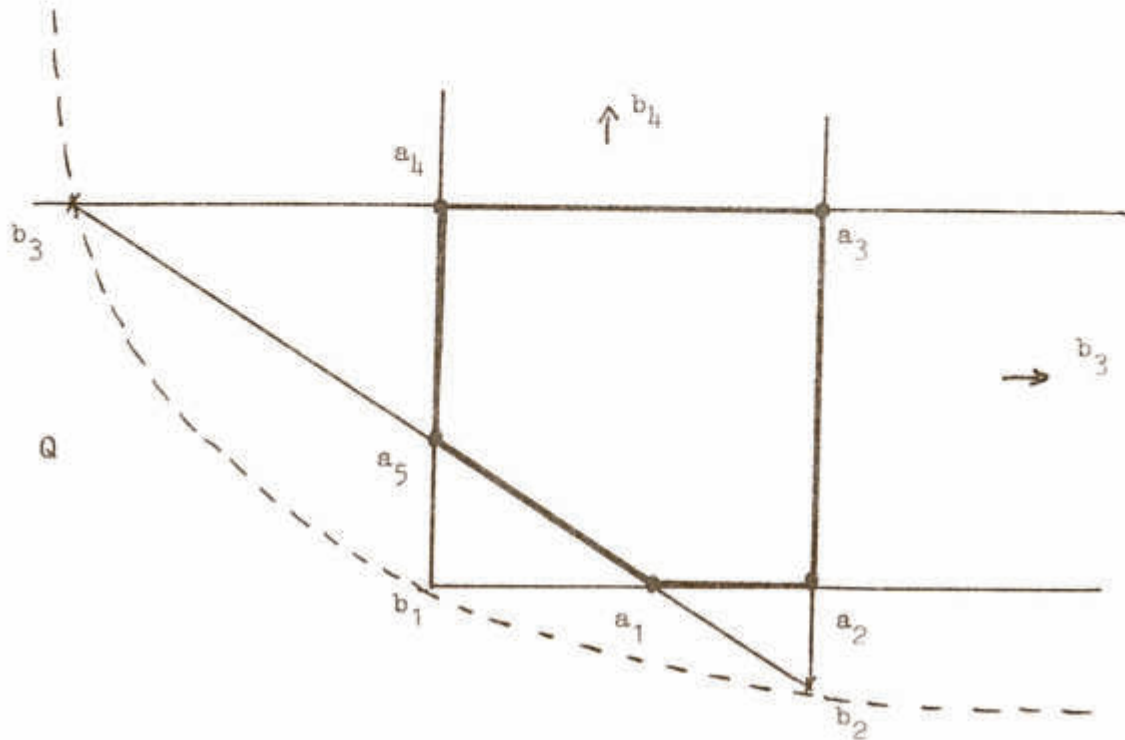


fig.3.2.3 .

3.2.1 Élément fini pentagonal de Wachspress de degré 1

Soit P l'espace vectoriel engendré par les fonctions w_i , $i \in I$, définies sur K par

$$(3.2.1) \quad \left| \quad w_i = c_i \frac{l_{i+2} l_{i+3} l_{i+4}}{q} \right.,$$

où la constante c_i , $i \in I$, est telle que $w_i(a_i) = 1$.

On note Σ l'ensemble

$$(3.2.2) \quad \left| \quad \Sigma = \{v \mapsto v(a_i), i \in I\} \right. .$$

On vérifie immédiatement que les fonctions w_i , $i \in I$, sont les fonctions de base de P relativement à Σ et donc que (K, P, Σ) est un élément fini.

D'autre part on a le

Théorème 3.2.1 (cf. WACHSPRESS [85])

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (3.2.1) et (3.2.2) est de degré 1.

Démonstration

Il est clair que $P \neq P_2(K)$ car $\dim P = 5$ et $\dim P_2(K) = 6$.

De plus pour tout $i \in I$ et pour tout $j \in I$, $w_i|_{d_j^*} \in P_1(d_j^*)$.

En effet w_i est nul sur d_{i+2} , d_{i+3} , d_{i+4} ; d'autre part le point b_{i+1} (resp. b_{i+4}) appartient aux courbes Q , d_i et d_{i+2} (resp. Q , d_i et d_{i+3}). En appliquant la proposition 3.1.1 on vérifie bien que $w_i|_{d_i^*} \in P_1(d_i^*)$. De même on montre que $w_i|_{d_{i+1}^*} \in P_1(d_{i+1}^*)$.

Soit alors $\psi \in P_1(\mathbb{R}^2)$; on a

$$\psi - \Pi\psi = \psi - \sum_{i \in I} \psi(a_i) w_i = \frac{v}{q},$$

avec $v \in P_3(\mathbb{R}^2)$.

Or, d'après ce qui précède et compte tenu de la définition de Π

$$\forall i \in I, \frac{v}{q}|_{d_i^*} \in P_1(d_i^*),$$

avec $\frac{v}{q}(a_{i-1}) = \frac{v}{q}(a_i) = 0$.

Par suite, comme $q(x) \neq 0$ pour tout $x \in K$, il existe une constante C telle que sur K

$$v = C \ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4 \ell_5 .$$

Or $v \in P_3(\mathbb{R}^2)$ donc nécessairement $C = 0$ et le résultat suit. \square

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (3.2.1) et (3.2.2) est appelé élément fini pentagonal de Wachspress de degré 1. \square

On a également la

Proposition 3.2.1

L'élément fini pentagonal de Wachspress de degré 1 est de classe C^0 .

Démonstration

Le résultat se déduit immédiatement du fait que

$$\forall i \in I, \forall j \in I, w_i \Big|_{d_j^*} \in P_1(d_j^*),$$

avec $w_i(a_j) = \delta_{ij}$. \square

3.2.2 Élément fini pentagonal de Wachspress de degré 2

Soit P l'espace vectoriel engendré par les fonctions w_i et $w_{i,i+1}$, $i \in I$ définies sur K par

$$(3.2.3) \quad \left| \begin{array}{l} w_i = c_i \frac{l_{i+2} l_{i+3} l_{i+4} l'_i}{q} , \\ w_{i,i+1} = c_{i,i+1} \frac{l_{i+2} l_{i+3} l_{i+4} l_i}{q} , \end{array} \right.$$

où les constantes c_i et $c_{i,i+1}$, $i \in I$, sont telles que $w_i(a_i) = w_{i,i+1}(a_{i,i+1}) = 1$.

D'autre part on désigne par Σ l'ensemble

$$(3.2.4) \quad \left| \Sigma = \{v \mapsto v(a_i), v \mapsto (a_{i,i+1}), i \in I\} . \right.$$

On vérifie aisément que les fonctions w_i et $w_{i,i+1}$, $i \in I$, sont les fonctions de base de P relativement à Σ et donc que le triplet (K, P, Σ) est un élément fini.

Il vient le

Théorème 3.2.2

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (3.2.3) et (3.2.4) est de degré 2 .

Démonstration

Elle est analogue à celle du théorème 3.2.1. On remarque, en utilisant ici également la proposition 3.1.1, que

$$(3.2.5) \quad \left| \forall i \in I, \forall j \in I \quad w_i \Big|_{d_j^*} \in P_2(d_j^*), w_{i,i+1} \Big|_{d_j^*} \in P_2(d_j^*). \right.$$

Soit alors $\psi \in P_2(\mathbb{R}^2)$; on a

$$\psi - \Pi\psi = \psi - \sum_{i \in I} [\psi(a_i)w_i + \psi(a_{i,i+1})w_{i,i+1}] = \frac{v}{q} .$$

avec $v \in P_4(\mathbb{R}^2)$.

D'après (3.2.5) et la définition de Π , il vient

$$\forall i \in I , \frac{v}{q} \Big|_{d_i^*} \in P_2(d_i^*) \text{ et } \frac{v}{q}(a_{i-1}) = \frac{v}{q}(a_i) = \frac{v}{q}(a_{i-1,i}) = 0 .$$

Donc, comme $q \neq 0$ sur K , il existe une constante C telle que

$$v = C l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 ,$$

et comme $v \in P_4(\mathbb{R}^2)$, $C = 0$. D'où $P \supset P_2(K)$.

D'autre part, en utilisant (3.2.5) on vérifie que $P \not\supset P_3(K)$,
d'où le résultat. \square

L'élément fini (K,P,Σ) défini par (3.2.3) et (3.2.4) est appelé
élément fini pentagonal de Wachspress de degré 2 (cf. fig.3.2.4). \square

On a également la

Proposition 3.2.2

L'élément fini pentagonal de Wachspress de degré 2 est de classe C^0 .

Démonstration

La propriété se déduit immédiatement des relations (3.2.5). \square

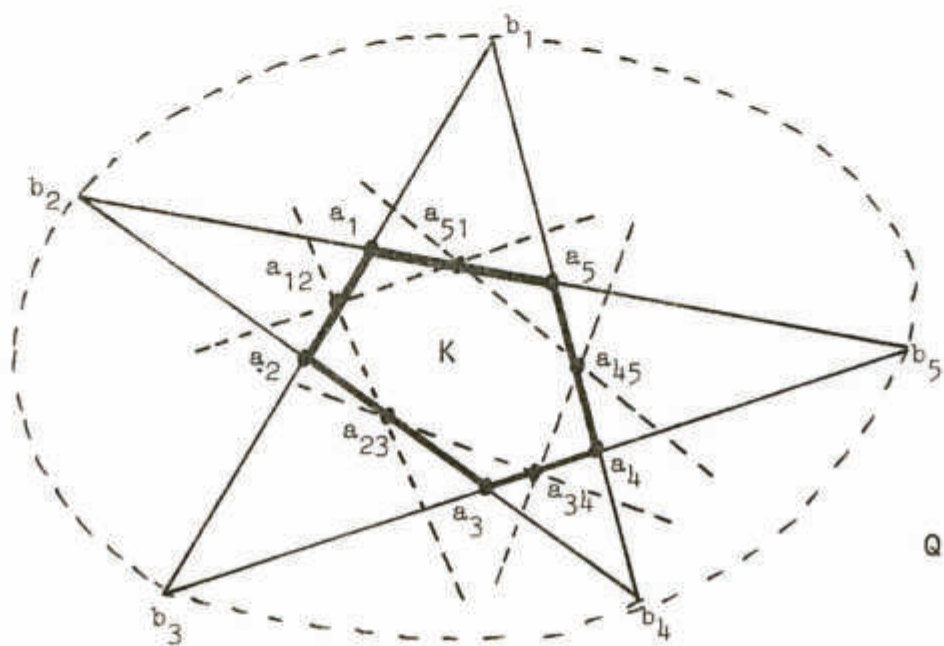


fig.3.2.4.

3.3 ELEMENTS FINIS HEXAGONAUX DE WACHSPRESS DE DEGRES 1 ET 2

Dans ce paragraphe K est un hexagone convexe fermé. Avec les notations du paragraphe 3.1, on a 9 points diagonaux extérieurs b_j , $1 \leq j \leq 9$, à distance finie en général, mais dont certains peuvent être rejetés à l'infini : un si K possède une paire de côtés parallèles, deux si K possède deux paires de côtés parallèles, trois enfin si K possède trois paires de côtés parallèles.

On définit alors, en général, une cubique unique Q (cf. SALMON [69]) passant par les neuf points diagonaux extérieurs, s'ils sont tous à distance finie (cf. fig.3.3.1). Lorsque K possède un, deux ou trois paires de côtés parallèles, la cubique passe respectivement par huit, sept ou six points et admet une, deux ou trois asymptotes parallèles aux côtés parallèles deux à deux de l'hexagone (une, deux ou trois paires suivant les cas) ou est dégénérée. C'est ainsi que si K est un hexagone régulier, la cubique dégénère en un cercle et la droite de l'infini (voir fig.3.3.2).

Soit alors $q \in P_3(\mathbb{R}^2)$ (resp. $\in P_2(\mathbb{R}^2)$) tel que $q(x) = 0$ soit une équation de la cubique (resp. de la conique) Q lorsqu'il y a dégénérescence.

Enfin comme précédemment on notera $d_i^* = d_i \cap \bigcap_{\mathbb{R}^2} Q$.

3.3.1 Élément fini hexagonal de Wachspress de degré 1

Soit P l'espace vectoriel engendré par les fonctions w_i , $i \in I = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ définies sur K par

$$(3.3.1) \quad \left| w_i = c_i \frac{l_{i+2} l_{i+3} l_{i+4} l_{i+5}}{q} \right. ,$$

où la constante c_i est telle que $w_i(a_i) = 1$.

Soit Σ l'ensemble

$$(3.3.2) \quad \left| \Sigma = \{v \mapsto v(a_i) , i \in I\} .$$

On vérifie que les fonctions w_i , $i \in I$, sont les fonctions de base de P relativement à Σ et donc que le triplet (K, P, Σ) est un élément fini.

D'autre part on a le

Théorème 3.3.1

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (3.3.1) et (3.3.2) est de degré 1 .

Démonstration

On vérifie immédiatement en utilisant la proposition 3.1.1 que ,

$$(3.3.3) \quad \left| \forall i \in I , \forall j \in I \quad w_i \Big|_{d_j^*} \in P_1(d_j^*) .$$

Soit $\psi \in P_1(\mathbb{R}^2)$. Il vient

$$\psi - \Pi\psi = \psi - \sum_{i \in I} \psi(a_i) w_i = \frac{v}{q} ,$$

avec $v \in P_4(\mathbb{R}^2)$.

D'après (3.3.3) et la définition de ψ , on a

$$\forall i \in I \quad \frac{v}{q} \Big|_{d_i^*} \in P_1(d_i^*) \quad \text{et} \quad \frac{v}{q}(a_{i-1}) = \frac{v}{q}(a_i) = 0 \quad ,$$

d'où, comme $q \neq 0$ sur K , l'on déduit l'existence d'une constante C telle que sur K

$$v = C l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 l_6 \quad .$$

Or $v \in P_4(\mathbb{R}^2)$, donc nécessairement $C = 0$ et par suite $P \supset P_1(K)$.

De plus il est clair que $P \not\subset P_2(K)$ d'après (3.3.3), d'où le résultat. \square

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (3.3.1) et (3.3.2) est appelé élément fini hexagonal de Wachspress de degré 1 (cf. fig.(3.3.1) et fig.(3.3.2)). \square

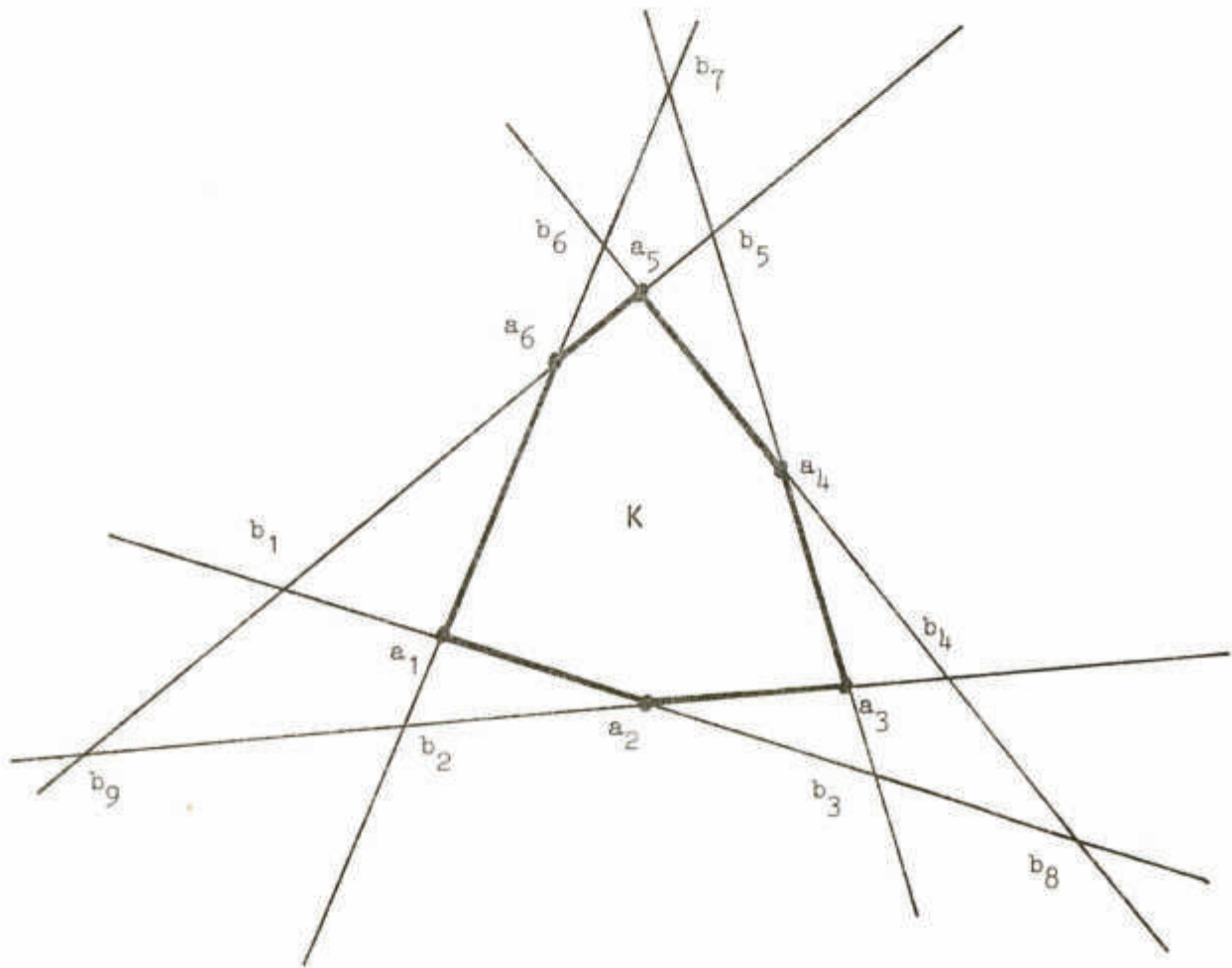


fig.3.3.1.

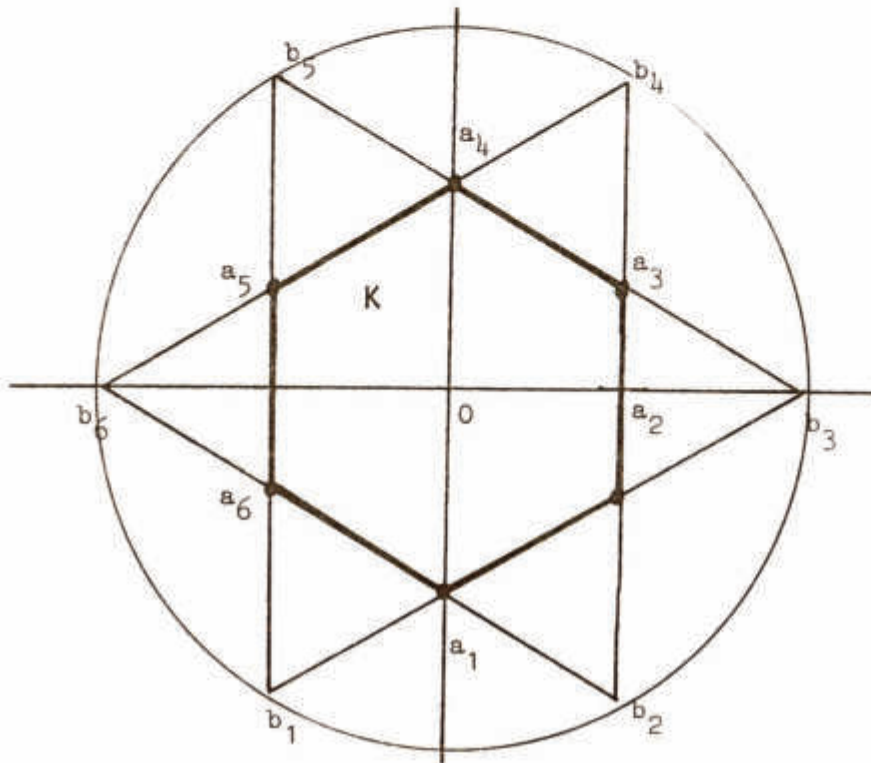


fig.3.3.2.

On a enfin la

Proposition 3.3.1

L'élément fini hexagonal de Wachspress de degré 1 est de classe C^0 .

Démonstration

Elle résulte immédiatement des relations (3.3.3) et de l'expression des w_i . \square

Dans tous les cas particuliers indiqués au début de ce paragraphe (pour l'hexagone régulier notamment) le théorème 3.3.1 et la proposition 3.3.1 restent valables.

3.3.2 Élément fini hexagonal de Wachspres de degré 2

Soit P l'espace vectoriel engendré par les fonctions w_i et $w_{i,i+1}$, $i \in I = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ définies sur K par

$$(3.3.4) \quad \left| \begin{array}{l} w_i = c_i \frac{l_{i+2} l_{i+3} l_{i+4} l_{i+5} l'_i}{q} , \\ w_{i,i+1} = c_{i,i+1} \frac{l_{i+2} l_{i+3} l_{i+4} l_{i+5} l_i}{q} , \end{array} \right.$$

où les constantes c_i et $c_{i,i+1}$ sont telles que $w_i(a_i) = 1$ et $w_{i,i+1}(a_{i,i+1}) = 1$.

On désigne par Σ l'ensemble

$$(3.3.5) \quad \left| \Sigma = \{v \mapsto v(a_i), v \mapsto v(a_{i,i+1}), i \in I\} . \right.$$

On vérifie aisément que les fonctions w_i et $w_{i,i+1}$, $i \in I$, sont les fonctions de base de P relativement à Σ . Par suite (K, P, Σ) est un élément fini.

Théorème 3.3.2

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (3.3.4) et (3.3.5) est de degré 2 .

Démonstration

Compte tenu des expressions (3.3.4) des fonctions w_i et $w_{i,i+1}$, $i \in I$ et de la proposition 3.3.1, il vient

$$(3.3.6) \quad \left| \begin{array}{l} \forall i \in I, \forall j \in I \\ w_i|_{d_j^*} \in P_2(d_j^*), w_{i,i+1}|_{d_j^*} \in P_2(d_j^*). \end{array} \right.$$

Soit $\psi \in P_2(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\psi - \Pi\psi = \psi - \sum_{i \in I} [\psi(a_i)w_i + \psi(a_{i,i+1})w_{i,i+1}] = \frac{v}{q},$$

avec $v \in P_5(\mathbb{R}^2)$.

D'après (3.3.6) et la définition de ψ , il vient

$$\forall i \in I, \frac{v}{q}|_{d_i^*} \in P_2(d_i^*), \frac{v}{q}(a_{i-1}) = \frac{v}{q}(a_{i-1,i}) = \frac{v}{q}(a_i) = 0$$

d'où l'on déduit l'existence d'une constante C telle que sur K

$$v = C l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 l_6,$$

et comme $v \in P_5(K)$, $C = 0$ et donc $P \supset P_2(K)$.

D'autre part, d'après (3.3.6), $P \not\supset P_3(K)$. \square

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (3.3.4) et (3.3.5) est appelé élément fini hexagonal de Wachspress de degré 2 (cf. fig.3.3.3, fig.3.3.4). \square

On a enfin la

Proposition 3.3.2

L'élément fini hexagonal de Wachspress de degré 2 est de classe C^0 .

Démonstration

Elle résulte immédiatement des relations (3.3.6) et de la définition de Π . \square

Ici également les résultats du théorème 3.3.2 et de la proposition 3.3.2 restent valables dans les cas particuliers indiqués au début de ce paragraphe, notamment si K est un hexagone régulier.

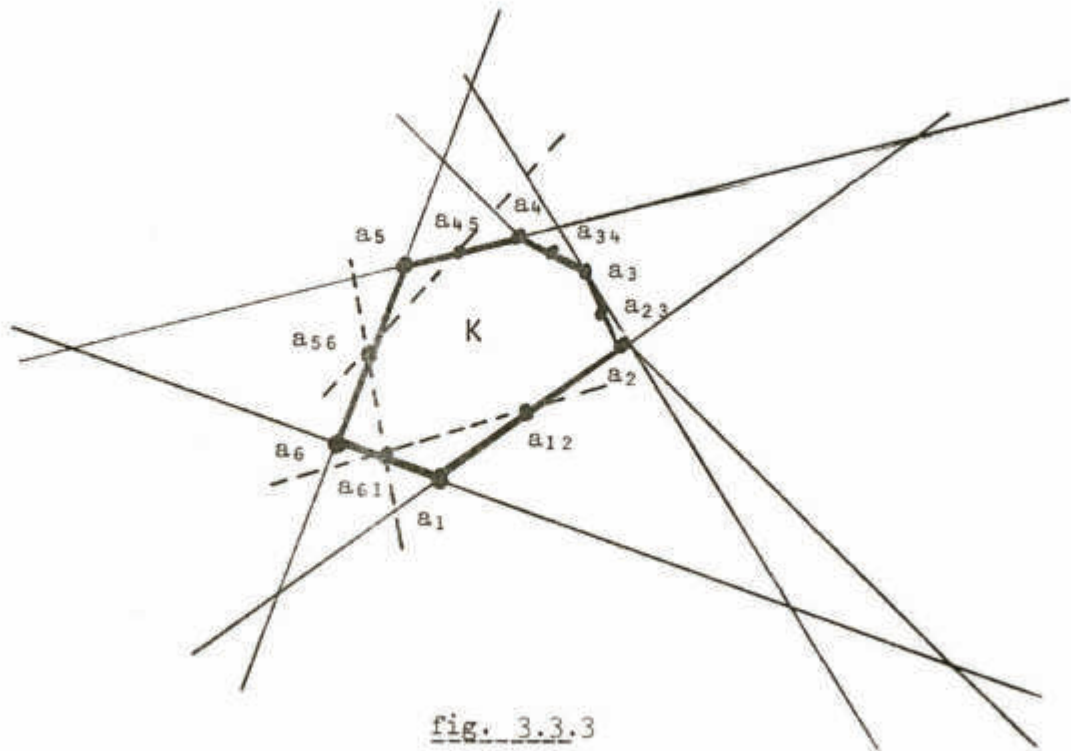
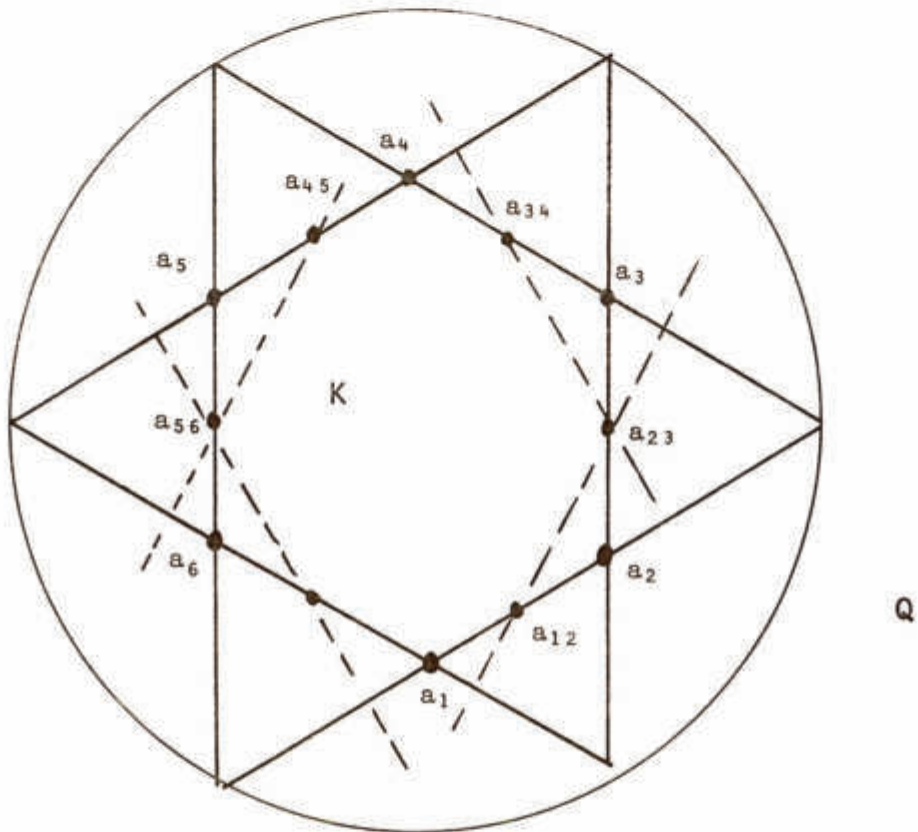


fig. 3.3.3

fig.3.3.4

3.4 ELEMENT FINI RATIONNEL DE LAGRANGE DE DEGRE 3 SUR UN

HEXAGONE REGULIER

Dans ce paragraphe K est un hexagone régulier, de sommets $a_i \in I = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. On note $a_{i,i,i+1}$ (resp. $a_{i+1,i+1,i}$) le point défini par $a_{i,i,i+1} = \frac{1}{3}(2a_i + a_{i+1})$ (resp. par $a_{i+1,i+1,i} = \frac{1}{3}(a_i + 2a_{i+1})$) et on désigne par q l'élément de $P_2(\mathbb{R}^2)$ défini pour tout $x = (x_1, x_2)$ par

$$(3.4.1) \quad \left| \begin{array}{l} q(x) = \frac{3}{4} - \left(\frac{x_1}{h}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{h}\right)^2 \end{array} \right. ,$$

où h est le diamètre de K et où $q(x) = 0$ est l'équation du cercle Q passant par les 6 points diagonaux extérieurs, situés à distance finie.

Soient d'autre part Γ le cercle passant par les 12 points $a_{i,i,i+1}$ et $a_{i+1,i+1,i}$, $i \in I$, et γ l'élément de $P_2(\mathbb{R}^2)$ défini pour tout x par

$$(3.4.2) \quad \left| \begin{array}{l} \gamma(x) = \left(\frac{x_1}{h}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{h}\right)^2 - \frac{7}{36} \end{array} \right. .$$

($\gamma(x) = 0$ est une équation de Γ).

Enfin pour tout $i \in I$, $l'_{i+1,i+3}$ (resp. $l'_{i,i+4}$) est un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $l'_{i+1,i+3}(x) = 0$ (resp. $l'_{i,i+4}(x) = 0$) soit une équation de la droite passant par les points $a_{i+1,i+1,i}$ et $a_{i+3,i+3,i+4}$ (resp. $a_{i,i,i+1}$ et $a_{i+4,i+4,i+3}$).

Soit alors P l'espace vectoriel engendré par les fonctions w_i , $w_{i,i,i+1}$ et $w_{i+1,i+1,i}$, $i \in I$, définies sur K par

$$(3.4.3) \quad \left| \begin{array}{l} w_i = c_i \frac{l_{i+2} l_{i+3} l_{i+4} l_{i+5} \gamma}{q} , \\ w_{i,i,i+1} = c_{i,i,i+1} \frac{l_{i+2} l_{i+3} l_{i+4} l_{i+5} l_i l'_{i+1,i+3}}{q} , \\ w_{i+1,i+1,i} = c_{i+1,i+1,i} \frac{l_{i+2} l_{i+3} l_{i+4} l_{i+5} l_i l'_{i,i+4}}{q} , \end{array} \right.$$

où les constantes c_i , $c_{i,i,i+1}$ et $c_{i+1,i+1,i}$ sont telles que $w_i(a_i) = w_{i,i,i+1}(a_{i,i,i+1}) = w_{i+1,i+1,i}(a_{i+1,i+1,i}) = 1$.

Soit Σ l'ensemble

$$(3.3.4) \quad \left| \Sigma = \{v \mapsto v(a_i), v \mapsto v(a_{i,i,i+1}), v \mapsto v(a_{i+1,i+1,i}), i \in I\} . \right.$$

Il est clair que les fonctions w_i , $w_{i,i,i+1}$ et $w_{i+1,i+1,i}$, $i \in I$, sont les fonctions de base de P relativement à Σ et donc que (K, P, Σ) est un élément fini.

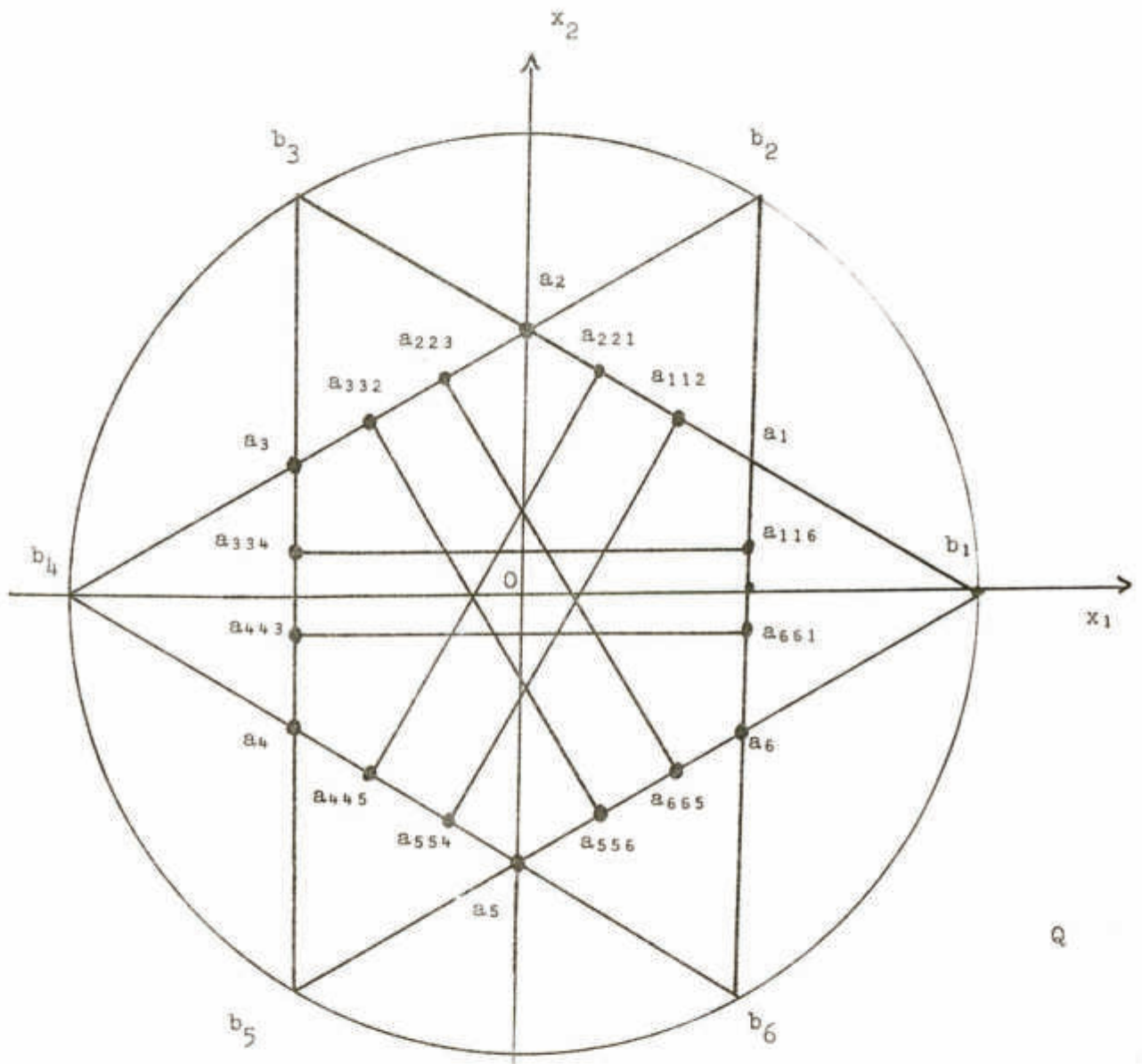


fig.3.4.1

Il vient alors le

Théorème 3.4.1

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (3.4.3) et (3.4.4) est de degré 3 .

Démonstration

On vérifie immédiatement, en utilisant la proposition 3.1.1 que pour tout $i \in I$ et pour tout $j \in J$

$$(3.4.5) \quad \left| w_i \Big|_{d_j^*} \in P_3(d_j^*), w_{i,i,i+1} \Big|_{d_j^*} \in P_3(d_j^*), w_{i+1,i+1,i} \Big|_{d_j^*} \in P_3(d_j^*) \right. ,$$

où $d_j^* = d_j \cap \mathbb{C}_{\mathbb{R}^2}^Q$.

Soit $\psi \in P_3(\mathbb{R}^2)$. Il vient

$$\psi - \Pi\psi = \psi - \sum_{i \in I} [\psi(a_i)w_i + \psi(a_{i,i,i+1})w_{i,i,i+1} + \psi(a_{i+1,i+1,i})w_{i+1,i+1,i}] = \frac{v}{q} ,$$

avec $v \in P_6(\mathbb{R}^2)$.

D'après les relations (3.4.5) et compte tenu de la définition de Π on a

$$\forall i \in I \quad \frac{v}{q} \Big|_{d_i^*} \in P_3(d_i^*) \text{ et } \frac{v}{q}(a_{i-1}) = \frac{v}{q}(a_i) = \frac{v}{q}(a_{i,i,i+1}) = \frac{v}{q}(a_{i+1,i+1,i}) = 0 ,$$

d'où l'on déduit, puisque $q \neq 0$ sur K , l'existence d'une constante c telle que sur K ,

$$(3.4.6) \quad \left| v = c l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 l_6 \right. .$$

Supposons maintenant, ce qui ne change rien à la généralité du problème, que les axes de coordonnées \vec{Ox}_1 et \vec{Ox}_2 sont portés par b_4b_1 et a_5a_2 . On peut alors choisir pour expression des $l_i(x)$ et des $l_{i,j}(x)$,

$$(3.4.7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} l_1(x) = \frac{x_1}{h} - \frac{\sqrt{3}}{4} & , \quad l_2(x) = \frac{x_1}{h} + \frac{x_2\sqrt{3}}{h} - \frac{\sqrt{3}}{2} , \\ l_3(x) = \frac{x_1}{h} - \frac{x_2\sqrt{3}}{h} + \frac{\sqrt{3}}{2} & , \quad l_4(x) = \frac{x_1}{h} + \frac{\sqrt{3}}{4} , \\ l_5(x) = \frac{x_1}{h} + \frac{x_2\sqrt{3}}{h} + \frac{\sqrt{3}}{2} & , \quad l_6(x) = \frac{x_1}{h} - \frac{x_2\sqrt{3}}{h} - \frac{\sqrt{3}}{2} , \\ l'_{1,5}(x) = \frac{x_1}{h} - \frac{x_2}{h\sqrt{3}} - \frac{1}{6\sqrt{3}} & , \quad l'_{2,4}(x) = \frac{x_1}{h} - \frac{x_2}{h\sqrt{3}} + \frac{1}{6\sqrt{3}} , \\ l'_{2,6}(x) = \frac{x_1}{h} + \frac{x_2}{h\sqrt{3}} - \frac{1}{6\sqrt{3}} & , \quad l'_{3,5}(x) = \frac{x_1}{h} + \frac{x_2}{h\sqrt{3}} + \frac{1}{6\sqrt{3}} , \\ l'_{1,3}(x) = \frac{x_2}{h} - \frac{1}{12} & , \quad l'_{6,4}(x) = \frac{x_2}{h} + \frac{1}{12} . \end{array} \right.$$

Considérons alors les termes de plus haut degré (6e) de v et de $q(\psi - \Pi\psi)$. On vérifie immédiatement que le terme du 6e degré de v par rapport à l'ensemble des 2 variables x_1, x_2 est

$$\frac{1}{h^6} \mathcal{C} x_1^2 (x_1^2 - 3x_2^2)^2 .$$

Le terme du 6e degré de $q(\psi - \Pi\psi)$ par rapport à l'ensemble des deux variables x_1, x_2 , vient uniquement du numérateur de $\Pi\psi$ (car $\psi \in (P_5(\mathbb{R}^2))$). Compte tenu des relations (3.4.3) et (3.4.7) le terme du 6e degré du numérateur de $\Pi\psi$ est

$$\frac{1}{h^6} \left[A(x_1 - x_2 \sqrt{3})(x_1^2 + x_2^2) + Bx_1(x_1^2 + x_2^2) + C(x_1 + x_2 \sqrt{3})(x_1^2 + x_2^2) \right. \\ \left. + Dx_1(x_1 - x_2 \sqrt{3})\left(x_1 - \frac{x_2}{\sqrt{3}}\right) + Ex_1(x_1 + x_2 \sqrt{3})\left(x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{3}}\right) + F(x_1^2 - 3x_2^2)x_2 \right] x_1(x_1^2 - 3x_2^2)$$

avec

$$A = c_1\psi(a_1) + c_4\psi(a_4), \quad B = c_2\psi(a_2) + c_5\psi(a_5), \quad C = c_3\psi(a_3) + c_6\psi(a_6)$$

$$D = c_{112}\psi(a_{112}) + c_{221}\psi(a_{221}) + c_{445}\psi(a_{445}) + c_{554}\psi(a_{554}),$$

$$E = c_{223}\psi(a_{223}) + c_{332}\psi(a_{332}) + c_{556}\psi(a_{556}) + c_{665}\psi(a_{665}),$$

$$F = c_{334}\psi(a_{334}) + c_{443}\psi(a_{443}) + c_{661}\psi(a_{661}) + c_{116}\psi(a_{116}).$$

Identifiant les termes en x_1^6 et $x_1^2 x_2^4$ de v et $q(\psi - \Pi\psi)$, on trouve

$$\begin{cases} -(A + B + C + D + E) = C \\ -3(A + B + C + D + E) = 9C \end{cases}$$

d'où $C = 0$ et donc, en utilisant (3.4.6), $P \supset P_3(K)$.

D'autre part il est clair que $P \not\subset P_4(K)$: il suffit pour cela de considérer les relations (3.4.5) et de choisir par exemple $\psi = \ell_i^4$; alors $\Pi \ell_i^4 \Big|_{d_{i+1}^*} \in P_3(d_{i+1}^*)$ tandis que $\ell_i^4 \Big|_{d_{i+1}^*}$ possède des termes du 4e degré, d'où le résultat. \square

Remarque 3.4.1

On peut effectuer la démonstration du théorème 3.4.1 d'une autre

manière en vérifiant que tout polynôme ψ appartenant à $P_3(\mathbb{R}^2)$ vérifie l'identité suivante

$$(3.4.8) \quad \left| \begin{aligned} & \psi(x_1, x_2) + \psi(-x_1, x_2) + \psi(-x_1, -x_2) + \psi(x_1, -x_2) \\ & - 2[\psi(0, 2x_2) + \psi(0, -2x_2)] - 3\left[\psi\left(\frac{2}{3}x_1, \frac{4}{3}x_2\right) - \psi\left(\frac{x_1}{3}, \frac{5}{3}x_2\right) + \right. \\ & \quad \left. + \psi\left(-\frac{2}{3}x_1, \frac{4}{3}x_2\right) - \psi\left(-\frac{x_1}{3}, \frac{5}{3}x_2\right) + \psi\left(-\frac{2}{3}x_1, -\frac{4}{3}x_2\right) \right. \\ & \quad \left. - \psi\left(-\frac{x_1}{3}, -\frac{5}{3}x_2\right) + \psi\left(\frac{2}{3}x_1, -\frac{4}{3}x_2\right) - \psi\left(\frac{x_1}{3}, -\frac{5}{3}x_2\right)\right] = 0 . \end{aligned} \right.$$

Il suffit alors de calculer les coefficients intervenant dans l'expression des fonctions de base, soit

$$c_1 = c_4 = c_3 = c_6 = -8 \quad , \quad c_2 = c_5 = +4$$

$$c_{221} = c_{223} = c_{554} = c_{556} = -c_{112} = -c_{445} = -c_{332} = -c_{665} = -24.$$

Alors l'identité (3.4.8) et l'expression des coefficients ci-dessus entraînent, avec les notations du théorème 3.4.1, que

$$A + B + C + D + E = 0 . \quad \square$$

On a enfin la

Proposition 3.4.1

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (3.4.3) et (3.4.4) est de classe C^0 .

Démonstration

Elle résulte immédiatement des relations (3.4.5) et de la définition de Π .

3.5. ELEMENT FINI RATIONNEL D'HERMITE DE DEGRE 3 SUR UN

HEXAGONE REGULIER

Dans ce paragraphe (comme au §.3.4) K est un hexagone régulier de sommets a_i , $i \in I = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et on désigne également par q l'élément de $P_2(\mathbb{R}^2)$ défini par la relation (3.4.1).

De plus pour tout $i \in I$ et pour tout $j \in I$, $j \neq i$, $i-1$, $i+1$, on désigne par $l_{i,j}$ un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $l_{i,j}(x) = 0$ soit une équation de la droite passant par les points a_i et a_j .

Ainsi on a

$$\begin{aligned} l_{1,3}(x) = l_{3,1}(x) &= \frac{x_2}{h} - \frac{1}{4}, & l_{1,5}(x) = l_{5,1}(x) &= \frac{x_1}{h} - \frac{x_2}{h\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ l_{2,4}(x) = l_{4,2}(x) &= \frac{x_1}{h} - \frac{x_2}{h\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, & l_{2,6}(x) = l_{6,2}(x) &= \frac{x_1}{h} + \frac{x_2}{h\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ l_{3,5}(x) = l_{5,3}(x) &= \frac{x_1}{h} + \frac{x_2}{h\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, & l_{4,6}(x) = l_{6,4}(x) &= \frac{x_2}{h} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Enfin pour tout $i \in I$, on désigne par γ_i l'élément de $P_2(\mathbb{R}^2)$ défini par

$$(3.5.1) \quad \gamma_i(x) = \left(\frac{x_1}{h} - \frac{\lambda_{1,i}}{h} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{h} - \frac{\lambda_{2,i}}{h} \right)^2 - \frac{3}{16},$$

où $(\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i})$ est le milieu du segment $[a_{i-1}, a_{i+1}]$.

On constate que $\gamma_i(x) = 0$ est une équation du cercle de diamètre

$[a_{i-1}, a_{i+1}]$.

Soit alors P l'espace vectoriel engendré par les fonctions w_i^0 , $w_{i,i-1}^1$ et $w_{i,i+1}^1$, $i \in I$, définies sur K par

$$(3.5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_i^0 = c_i^0 \frac{\ell_{i+2} \ell_{i+3} \ell_{i+4} \ell_{i+5} \gamma_i}{q} , \\ w_{i,i-1}^1 = c_{i,i-1}^1 \frac{\ell_{i+1} \ell_{i+2} \ell_{i+3} \ell_{i+4} \ell_{i+5} \ell_{i+3,i-1}}{q} , \\ w_{i,i+1}^1 = c_{i,i+1}^1 \frac{\ell_{i+2} \ell_{i+3} \ell_{i+4} \ell_{i+5} \ell_{i+6} \ell_{i+3,i+1}}{q} , \end{array} \right.$$

où les constantes c_i^0 , $c_{i,i-1}^1$ et $c_{i,i+1}^1$ sont telles que $w_i^0(a_i) = 1$ et que $Dw_{i,i-1}^1(a_i) \cdot (a_{i-1} - a_i) = Dw_{i,i+1}^1(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) = 1$.

Remarque 3.5.1

On constate que la droite d'équation $\ell_{i+3,i-1}(x) = 0$ (respectivement d'équation $\ell_{i+3,i+1}(x) = 0$) est perpendiculaire en a_{i-1} à la droite d_i (respectivement en a_{i+1} à la droite d_{i+1}).

D'autre part on montre que les constantes $c_{i,i-1}^1$ et $c_{i,i+1}^1$ s'écrivent

$$c_{i,i-1}^1 = \frac{1}{\ell_{i+1}(a_{i-1})} \cdot \left(\frac{q}{\ell_{i+2} \ell_{i+3} \ell_{i+4} \ell_{i+5} \ell_{i+3,i-1}} \right) (a_i) ,$$

$$c_{i,i+1}^1 = \frac{1}{\ell_{i+6}(a_{i+1})} \cdot \left(\frac{q}{\ell_{i+2} \ell_{i+3} \ell_{i+4} \ell_{i+5} \ell_{i+3,i+1}} \right) (a_i) .$$

Soit Σ l'ensemble

$$(3.5.3) \quad \Sigma = \{v \mapsto v(a_i), i \in I ; v \mapsto Dv(a_i) \cdot (a_j - a_i), i \in I, j = i-1, i+1\} .$$

On a alors la

Proposition 3.5.1

P et Σ étant définis par (3.5.2) et (3.5.3), (K, P, Σ) est un élément fini.

Démonstration

On vérifie que les fonctions w_i^0 , $w_{i,i-1}^1$ et $w_{i,i+1}^1$ sont les fonctions de base de P relativement à Σ .

Fonctions w_i^0

Des expressions (3.5.2) on déduit immédiatement que

$$(3.5.4) \quad \left| \begin{array}{l} \forall i \in I, \forall j \in I \quad w_i^0(a_j) = \delta_{ij} \\ \forall i \in I, \forall j \in I \quad j \neq i \quad Dw_i^0(a_j) = 0 \end{array} \right. \mathbb{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

D'autre part

$$\begin{aligned} Dw_i^0(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{w_i^0[a_i + \alpha(a_{i+1} - a_i)] - w_i^0(a_i)}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{q}{l_{i+2} l_{i+3} l_{i+4} l_{i+5} \gamma_i} \right) (a_i) \left(\frac{l_{i+2} l_{i+3} l_{i+4} l_{i+5} \gamma_i}{q} \right) [a_i + \alpha(a_{i+1} - a_i)]^{-1} \right] \end{aligned}$$

Compte tenu de la proposition 3.1.1 il vient encore

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \left[\frac{(\ell_{i+2}\gamma_i)[a_i + \alpha(a_{i+1} - a_i)] - (\ell_{i+2}\gamma_i)(a_i)}{(\ell_{i+2}\gamma_i)(a_i)} \right]$$

$$= \frac{1}{(\ell_{i+2}\gamma_i)(a_i)} D(\ell_{i+2}\gamma_i)(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) .$$

Or, en utilisant la définition de ℓ_{i+2} , on a

$$\frac{D(\ell_{i+2}\gamma_i)(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i)}{(\ell_{i+2}\gamma_i)(a_i)} = \frac{-\gamma_i(a_i) + D\gamma_i(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i)}{\gamma_i(a_i)}$$

et par suite, d'après (3.5.1)

$$(3.5.5) \quad \left| \begin{array}{l} Dw_i^0(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) = 0 \end{array} \right.$$

On démontrerait de même que

$$(3.5.6) \quad \left| \begin{array}{l} Dw_i^0(a_i) \cdot (a_{i-1} - a_i) = 0 \end{array} \right.$$

Fonctions $w_{i,i-1}^1$

Des expressions (3.5.2) on déduit immédiatement que

$$(3.5.7) \quad \left| \begin{array}{l} \forall i \in I, \forall j \in I \quad w_{i,i-1}^1(a_j) = 0, \\ \forall i \in I, \forall j \in I, j \neq i \quad Dw_{i,i-1}^1(a_j) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \mathbb{R} \\ Dw_{i,i-1}^1(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) = 0. \end{array} \right.$$

D'autre part, par construction

$$(3.5.8) \quad \left| \quad Dw_{i,i-1}^1(a_i) \cdot (a_{i-1} - a_i) = 1 \right.$$

On démontrerait de même que

$$(3.5.9) \quad \left| \begin{array}{l} \forall i \in I, \forall j \in I \quad w_{i,i+1}^1(a_j) = 0, \\ \forall i \in I, \forall j \in I, j \neq i \quad Dw_{i,i+1}^1(a_j) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})}, \\ Dw_{i,i+1}^1(a_i) \cdot (a_{i-1} - a_i) = 0, \\ Dw_{i,i+1}^1(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) = 1. \end{array} \right.$$

Les relations (3.5.4), (3.5.5), (3.5.6), (3.5.7), (3.5.8) et (3.5.9) prouvent le résultat. \square

Notons un résultat préliminaire.

Proposition 3.5.2

Toute fonction polynôme ψ appartenant à $P_3(\mathbb{R}^2)$ vérifie l'identité suivante : pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} & 4[\psi(0, 2x_2) + \psi(0, -2x_2)] - 2[\psi(x_1, x_2) + \psi(-x_1, x_2) + \psi(-x_1, -x_2) + \psi(x_1, -x_2)] \\ & + [\psi'_{x_1}(x_1, x_2) - \psi'_{x_1}(-x_1, x_2) - \psi'_{x_1}(-x_1, -x_2) + \psi'_{x_1}(x_1, -x_2)]x_1 \\ & - [\psi'_{x_2}(x_1, x_2) + \psi'_{x_2}(-x_1, x_2) - \psi'_{x_2}(-x_1, -x_2) - \psi'_{x_2}(x_1, -x_2)]x_2 \end{aligned}$$

$$- 2[\psi'_{x_2}(0, 2x_2) - \psi'_{x_2}(0, -2x_2)]x_2 = 0$$

Démonstration

La vérification est immédiate. \square

On a alors le

Théorème 3.5.1

L'élément fini (K, P, Σ) défini par (3.5.2) et (3.5.3) est de degré 3.

Démonstration

Soit $\psi \in P_3(K)$. On a, si Π désigne l'opérateur de P-interpolation d'Hermite relativement à Σ

$$\psi - \Pi\psi = \psi - \left[\sum_{i \in I} \psi(a_i) w_i^0 + \sum_{\substack{i \in I \\ j=i-1, i+1}} [D\psi(a_i) \cdot (a_j - a_i)] w_{i,j}^1 \right]$$

soit encore

$$\psi - \Pi\psi = \frac{v}{q} \quad \text{avec } v \in P_6(\mathbb{R}^2).$$

On raisonne alors comme dans la démonstration du théorème 3.4.1 : on identifie les termes en x_j^6 de $q(\psi - \Pi\psi)$ et de v .

Compte tenu de la proposition 3.1.1 et des relations (3.5.2) on a :

$$(3.5.10) \quad \left| \forall i \in I, \forall j \in I \quad w_i^0 \Big|_{d_j^*} \in P_3(d_j^*), w_{i,i-1}^1 \Big|_{d_j^*} \in P_3(d_j^*), w_{i,i+1}^1 \Big|_{d_j^*} \in P_3(d_j^*) \right.$$

où ici également $d_j^* = d_j \cap \mathbb{C}_{\mathbb{R}^2}^{\mathbb{Q}}$.

Des relations (3.5.10) on déduit en utilisant la définition de Π que

$$(3.5.11) \quad \left| \quad \forall i \in I \quad \frac{v}{q} \Big|_{d_i^*} = v_i \in P_3(d_i^*) \quad , \right.$$

avec

$$(3.5.12) \quad \left| \quad v_i(a_{i-1}) = v_i(a_i) = v'_i(a_{i-1}) = v'_i(a_i) = 0 \quad . \right.$$

Comme q est non nul sur K , on déduit donc des relations (3.5.11) et (3.5.12) l'existence d'une constante C telle que

$$v = C l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 l_6 \quad .$$

D'après la démonstration du théorème 3.4.1 on sait que le coefficient du terme en x_1^6 de v est $\frac{1}{h^6} C$.

D'autre part le terme en x_1^6 de $q(\psi - \Pi\psi)$ ne peut provenir que du numérateur de $-\Pi\psi$. Etant données l'expression de $\Pi\psi$ et les relations (3.5.2) le coefficient du terme en x_1^6 de $q(\psi - \Pi\psi)$ est

$$(3.5.13) \quad \left| \quad -\frac{1}{h^6} \left[\sum_{i \in I}^6 c_i^0 \psi(a_i) + c_{1,2}^1 D\psi(a_1) \cdot (a_2 - a_1) + c_{2,1}^1 D\psi(a_2) \cdot (a_1 - a_2) \right. \right. \\ \left. \left. + c_{2,3}^1 D\psi(a_2) \cdot (a_3 - a_2) + c_{3,2}^1 D\psi(a_3) \cdot (a_2 - a_3) + c_{4,5}^1 D\psi(a_4) \cdot (a_5 - a_4) \right. \right. \\ \left. \left. + c_{5,4}^1 D\psi(a_5) \cdot (a_4 - a_5) + c_{5,6}^1 D\psi(a_5) \cdot (a_6 - a_5) + c_{6,5}^1 D\psi(a_6) \cdot (a_5 - a_6) \right] \quad . \right.$$

Le calcul des constantes intervenant dans les expressions des fonctions de base (cf. relations (3.5.2)) donne

$$(3.5.14) \left\{ \begin{array}{l} c_1^0 = c_3^0 = c_4^0 = c_6^0 = \frac{32}{9}, \quad c_2^0 = c_5^0 = -\frac{64}{9}, \\ c_{1,2}^1 = c_{3,2}^1 = c_{4,5}^1 = c_{6,5}^1 = \frac{16}{9} = -c_{2,1}^1 = -c_{2,3}^1 = -c_{5,4}^1 = -c_{5,6}^1. \end{array} \right.$$

Compte tenu de (3.5.14) le coefficient de x_1^6 dans $q(\psi - \Pi\psi)$ s'écrit donc

$$\begin{aligned} & -\frac{16}{9h} \left\{ 2[\psi(a_1) + \psi(a_3) + \psi(a_4) + \psi(a_6)] - 4[\psi(a_2) + \psi(a_5)] \right. \\ & \quad + [D\psi(a_1) \cdot (a_2 - a_1) - D\psi(a_2) \cdot (a_1 - a_2) - D\psi(a_2) \cdot (a_3 - a_2) + D\psi(a_3) \cdot (a_2 - a_3)] \\ & \quad \left. + D\psi(a_4) \cdot (a_5 - a_4) - D\psi(a_5) \cdot (a_4 - a_5) - D\psi(a_5) \cdot (a_6 - a_5) + D\psi(a_6) \cdot (a_5 - a_6) \right\} \end{aligned}$$

d'où, comme $a_5 - a_4 = a_1 - a_2$ et $a_5 - a_6 = a_3 - a_2$,

$$(3.5.15) \left\{ \begin{array}{l} \frac{16}{9h} \left\{ 4[\psi(a_2) + \psi(a_5)] - 2[\psi(a_1) + \psi(a_3) + \psi(a_4) + \psi(a_6)] \right. \\ \quad + [D\psi(a_1) - D\psi(a_5)] \cdot (a_1 - a_2) + [D\psi(a_3) - D\psi(a_6)] \cdot (a_3 - a_2) \\ \quad \left. + [D\psi(a_2) - D\psi(a_5)] \cdot (-a_2) \right\} = \frac{C}{h^6}. \end{array} \right.$$

Appliquant alors les résultats de la proposition 3.5.2 aux sommets a_i de l'hexagone régulier, comme $\psi \in P_3(K)$, on déduit de (3.5.15) que $C = 0$ et par suite que $P \supset P_3(K)$.

De plus, d'après (3.5.10) il est clair que $P \not\subset P_4(K)$, d'où le résultat. \square

On a enfin la

Proposition 3.5.3.

L'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 sur un hexagone régulier est de classe C^0 .

Démonstration

Résulte immédiatement des relations (3.5.10) et de la définition de Π . \square

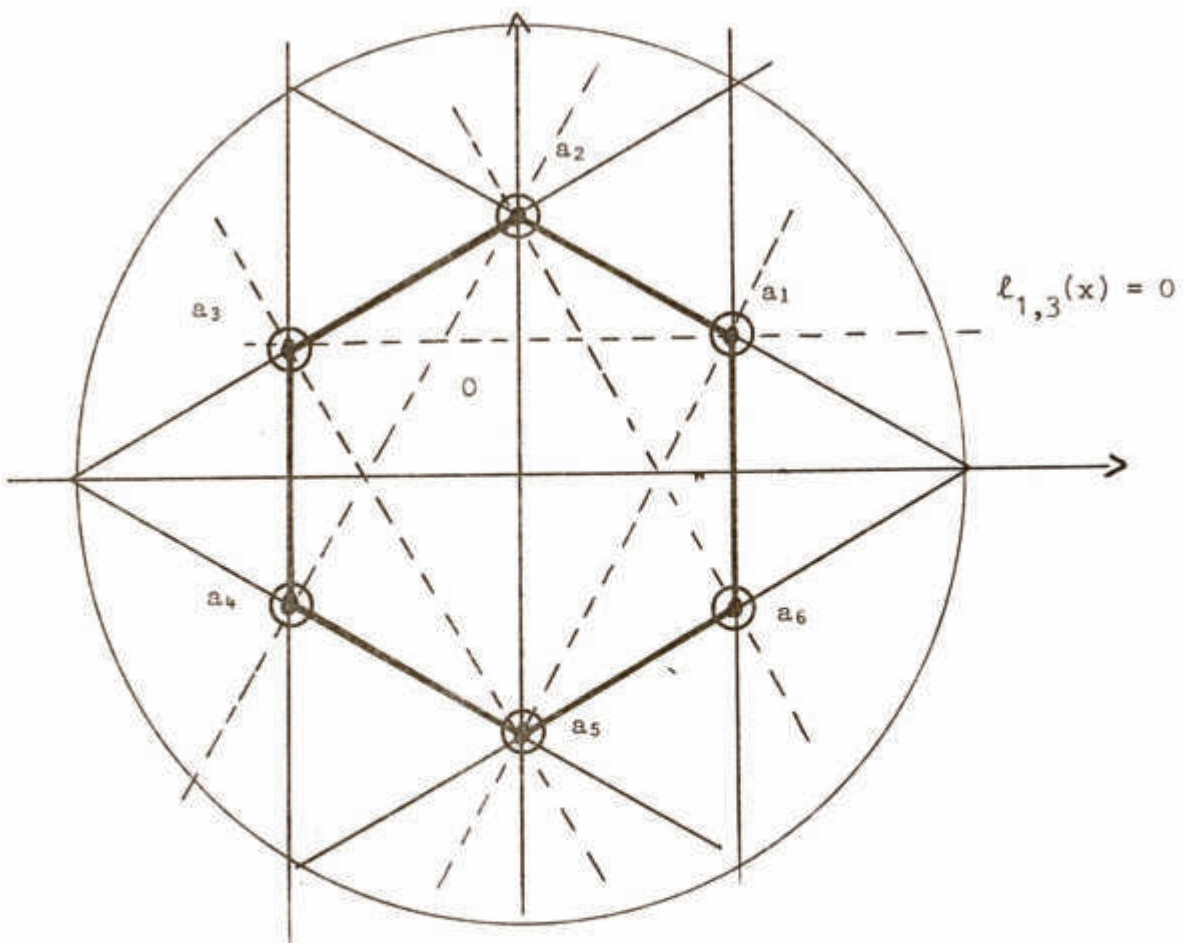


fig.3.5.1



Chapitre 4

-

ESTIMATIONS DE L'ERREUR D'INTERPOLATION CONCERNANT LES ELEMENTS FINIS DROITS POLYNOMIAUX ET RATIONNELS

--

Dans ce chapitre, on donne des majorations de l'erreur d'interpolation $v - \Pi v$ en semi-normes $[\cdot]_{m,p,K}$ dans le cas d'un certain nombre d'éléments finis polynomiaux standard (cf. par exemple, CIARLET [26], RAVIART [68]), ainsi que dans celui des éléments rationnels de Wachspress étudiés aux chapitres 2 et 3. toutes les estimations indiquées sont déduites des théorèmes 1.2.1, 1.3.1 ou 1.3.2.

On montre que les ordres asymptotiques des majorations de l'erreur d'interpolation obtenues sont optimaux.

4.1. UNE INEGALITE INVERSE POUR DES FONCTIONS RATIONNELLES

Commençons par donner une inégalité de Markov concernant des fonctions rationnelles sur un convexe compact K de \mathbb{R}^2 , généralisant celui donné dans APPRATO-ARCANGELI-GOUT [6] (lemme 5.1) (cf. également lemme 3.1 de GOUT [50]) ; toutes ces propriétés prolongent un résultat dû à WILHELMSEN [86] et sont évidemment à rapprocher des résultats de COATMELEC [32] et des inégalités inverses données par CIARLET [26].

Soient δ la distance euclidienne dans \mathbb{R}^2 , K un convexe compact de \mathbb{R}^2 et λ_K la "largeur" de K définie par

$$\lambda_K = \text{Inf } \delta(d', d'') ,$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des paires (d', d'') de droites d'appui à K distinctes et parallèles.

Il vient alors la

Proposition 4.1.1

Soient K un convexe compact de \mathbb{R}^2 , d'intérieur non vide, λ_K la largeur de K , r et j deux entiers donnés ≥ 0 , $\psi \in P_r(\mathbb{R}^2)$ et $q \in P_j(\mathbb{R}^2)$, et w la fonction définie sur K par

$$w = \frac{\psi}{q}$$

où $q \neq 0$ sur K .

Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $C(m, r, v, j) > 0$

indépendante de K telle que

$$(4.1.1) \quad \left| \quad \|\psi\|_{m,\infty,K} \leq \frac{C(m,r,\nu,j)}{\lambda_K^m} \|\psi\|_{0,\infty,K} \quad \right.$$

où ν est une constante telle que $\frac{\|q\|_{0,\infty,K}}{\inf_{x \in K} |q(x)|} \leq \nu$.

Démonstration

On reprend les idées développées dans la démonstration du lemme 5.1 de [6].

D'après un résultat dû à WILHELMSEN [86] on a

$$\|\psi\|_{1,\infty,K} \leq \frac{4r^2}{\lambda_K} \|\psi\|_{0,\infty,K}$$

d'où l'on déduit par itération

$$(4.1.2) \quad \left| \quad \|\psi\|_{m,\infty,K} \leq \frac{C(m,r)}{\lambda_K^m} \|\psi\|_{0,\infty,K} \quad \right.$$

avec $C(m,r) = 4^m \left(\frac{r!}{(r-m)!} \right)^2$ où $0 \leq m \leq r$.

Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, pour tout $x \in K$ on a d'après la formule de Leibniz

$$(4.1.3) \quad \left| \quad \partial_w^\alpha(x) = \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \alpha \\ \beta \in \mathbb{N}^2}} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \psi(x) \partial^{\alpha-\beta} \left(\frac{1}{q} \right)(x) \quad \right.$$

où pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, pour tout $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2$, $\alpha \leq \beta$ est

mis pour

$$\forall i = 1, 2 \quad \beta_i \leq \alpha_i \quad ,$$

et où
$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \binom{\alpha_2}{\beta_2} \quad .$$

On déduit alors des expressions (4.1.3) , pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

$$|w|_{m, \infty, K} \leq \sup_{|\alpha|=m} \left(\sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\psi|_{|\beta|, \infty, K} \left| \frac{1}{q} \right|_{|\alpha|-|\beta|, \infty, K} \right) \quad .$$

Utilisant (4.1.2) et l'inégalité

$$|\psi|_{0, \infty, K} \leq |q|_{0, \infty, K} |w|_{0, \infty, K} \quad ,$$

il vient

$$(4.1.4) \quad \left| |w|_{m, \infty, K} \leq \sup_{|\alpha|=m} \left(\sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{\alpha(|\beta|, r)}{\lambda_K^{|\beta|}} |q|_{0, \infty, K} \left| \frac{1}{q} \right|_{|\alpha|-|\beta|, \infty, K} \right) |w|_{0, \infty, K} \quad . \right.$$

D'autre part, on montre par un raisonnement par récurrence, utilisant la majoration $\frac{|q|_{0, \infty, K}}{\inf_{x \in K} |q(x)|} \leq \nu$, que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe

une constante $C_1(m, j, \nu)$ indépendante de K , telle que :

$$(4.1.5) \quad \left| \left| \frac{1}{q} \right|_{m, \infty, K} \leq \frac{C_1(m, j, \nu)}{\lambda_K^m} \frac{1}{\inf_{x \in K} |q(x)|} \quad . \right.$$

En effet, on vérifie immédiatement que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{q} \right|_{1, \infty, K} &\leq \frac{|q|_{1, \infty, K}}{\inf_{x \in K} |q(x)|^2} \leq \frac{C(1, j)}{\lambda_K} \frac{|q|_{0, \infty, K}}{\inf_{x \in K} |q(x)|} \frac{1}{\inf_{x \in K} |q(x)|} \\ &\leq \frac{\nu C(1, j)}{\lambda_K} \frac{1}{\inf_{x \in K} |q(x)|} . \end{aligned}$$

On suppose alors que les inégalités (4.1.5) sont vérifiées jusqu'à l'ordre $m - 1$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| = m$ on a

$$\partial^\alpha (q \times \frac{1}{q}) = 0 = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta q(x) \partial^{\alpha-\beta} \left(\frac{1}{q} \right) (x)$$

d'où l'on déduit

$$q(x) \cdot \partial^\alpha \left(\frac{1}{q} \right) (x) = - \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \alpha \\ \beta \neq 0}} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta q(x) \partial^{\alpha-\beta} \left(\frac{1}{q} \right) (x)$$

soit encore

$$\sup_{x \in K} \left| \partial^\alpha \left(\frac{1}{q} \right) (x) \right| \leq \left(\sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \alpha \\ \beta \neq 0}} \binom{\alpha}{\beta} |q|_{|\beta|, \infty, K} \left| \frac{1}{q} \right|_{|\alpha| - |\beta|, \infty, K} \right) \frac{1}{\inf_{x \in K} |q(x)|}$$

d'où en utilisant l'hypothèse de récurrence, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| = m$

$$\begin{aligned} \left| \partial^\alpha \left(\frac{1}{q} \right) \right|_{0, \infty, K} &\leq \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \alpha \\ \beta \neq 0}} \binom{\alpha}{\beta} \frac{C(|\beta|, j)}{\lambda_K^{|\beta|}} |q|_{0, \infty, K} \frac{C_1(|\alpha| - |\beta|, j, \nu)}{\lambda_K^{|\alpha| - |\beta|}} \frac{1}{(\inf_{x \in K} |q(x)|)^2} \\ &\leq \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \alpha \\ \beta \neq 0}} \binom{\alpha}{\beta} \frac{C(|\beta|, j) C_1(|\alpha| - |\beta|, j, \nu) \nu}{\lambda_K^{|\alpha|}} \frac{1}{\inf_{x \in K} |q(x)|} \end{aligned}$$

et par suite

$$\left| \frac{1}{q} \right|_{m, \infty, K} \leq \frac{C_1(m, j, \nu)}{\lambda_K^m} \frac{1}{\inf_{x \in K} |q(x)|} .$$

A partir des relations (4.1.4) on obtient, compte tenu des majorations (4.1.5) ,

$$|w|_{m, \infty, K} \leq \sup_{|\alpha|=m} \left(\sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{C(|\beta|, r)}{\lambda_K^{|\beta|}} |q|_{0, \infty, K} \frac{C_1(|\alpha| - |\beta|, j, \nu)}{\lambda_K^{|\alpha| - |\beta|}} \frac{1}{\inf_{x \in K} |q(x)|} \right) |w|_{0, \infty, K}$$

d'où il vient

$$|w|_{m, \infty, K} \leq \sup_{|\alpha|=m} \left(\sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{C(|\beta|, r) C_1(m - |\beta|, j, \nu) \nu}{\lambda_K^m} \right) |w|_{0, \infty, K}$$

et l'on obtient (4.1.1) avec

$$C(m, r, j, \nu) = \sup_{|\alpha|=m} \left(\sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} C(|\beta|, r) C_1(m - |\beta|, j, \nu) \right). \quad \square$$

Remarque 4.1.1

Les résultats de la proposition 4.1.1 s'appliquent en particulier aux fonctions de base des éléments finis rationnels de Wachspress sur un polygone convexe K , le polynôme q étant alors suivant les cas le polynôme \mathcal{L} introduit au §.2.1 (ou le polynôme q introduit au §.3.1).

En fait, au lieu de la relation (4.1.1), on utilisera la relation qui s'en déduit trivialement en remplaçant λ_K par ρ_K , maximum des diamètres des cercles contenus dans K .

Lorsque K est un quadrilatère convexe non dégénéré en trapèze

ou en parallélogramme, on a $j = 1$ et l'on peut montrer (cf. lemme 5.1 de [6]) que l'on a

$$C(m,r,1,v_1) = \left(\frac{r!}{(r-m)!}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{v_1}\right) \left(4 + \frac{1}{v_1}\right)^m m! ,$$

où, avec les notations du §.2.1, on a supposé que

$$\inf_{x \in K} \delta(x,d) \geq v_1 h_K . \quad \square$$

Soit maintenant une famille \mathcal{F} d'éléments finis (K,P,Σ) , où les éléments K sont des polyèdres convexes de \mathbb{R}^n , de diamètre h_K et dont le maximum des diamètres des sphères contenues dans K est noté ρ_K .

Si la famille \mathcal{F} est telle que

$$(4.1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad 0 \in \overline{\{h_K, K \in \mathcal{F}\}} \\ \text{(ii)} \quad \exists \sigma > 0, \forall K \in \mathcal{F}, \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma, \end{array} \right.$$

on dit que \mathcal{F} est régulière (la condition (i) est l'hypothèse standard de "non aplatissement" au sens de CIARLET-RAVIART [27]).

On a alors la

Définition 4.1.1

Soient \mathcal{F} une famille régulière (i.e. vérifiant (4.1.6)) d'éléments finis (K,P_K,Σ_K) de degré k et de même type dans \mathbb{R}^n , pour lesquels

Les hypothèses (1.2.1) et (1.2.3) sont vérifiées, et Π_K l'opérateur de P_K -interpolation relativement à Σ_K .

Si, pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour tous nombres $p, q \in [1, +\infty]$ tels que, pour tout $K \in \mathcal{F}$, $W^{k+1, p}(K) \hookrightarrow W^{m, q}(K)$, il existe une constante C , telle que pour tout $K \in \mathcal{F}$,

$$(4.1.7) \quad \left| \forall v \in W^{k+1, p}(K), [v - \Pi_K v]_{m, q, K} \leq C (\text{mes } K)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} [v]_{k+1, p, K} h_K^{k+1-m}, \right.$$

on dit que le second membre de (4.1.7) constitue une majoration uniforme de l'erreur de P_K -interpolation en semi-norme $[\cdot]_{m, p, K}$. \square

Le caractère uniforme, au sens défini ci-dessus, des majorations locales de l'erreur d'interpolation permet alors d'obtenir, par "recollage", des majorations globales, ce que l'on montre dans l'exemple usuel suivant :

Soient $\bar{\Omega}$ un polyèdre convexe non dégénéré de \mathbb{R}^n et $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ une famille régulière de triangulations de $\bar{\Omega}$ par des polyèdres convexes K de même type (cf. 0.3.5) avec $h_K \leq h$; soit \mathcal{F} une famille d'éléments finis (K, P_K, Σ_K) de degré k et de même type associée à la famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ (cf. 0.3.7). Alors si \mathcal{F} vérifie (4.1.7) on montre que pour tout h fixé dans \mathcal{H}

si $1 \leq q \leq p \leq +\infty$

$$(4.1.8) \quad \left| \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} [v - \Pi_K v]_{m, q, K}^q \right)^{1/q} \leq C (\text{mes } \Omega)^{\frac{p-q}{pq}} [v]_{k+1, p, \Omega} h^{k+1-m}, \right.$$

si $p < q \leq +\infty$ et si de plus ("hypothèse inverse")

$$\exists \mu > 0, \forall h, \forall K \in \mathcal{T}_h, \frac{h_K}{h} \leq \mu,$$

$$(4.1.9) \quad \left| \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} [v - \Pi_K v]_{m,k,q}^q \right)^{1/q} \leq C h^{n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} [v]_{k+1,p,\Omega} h^{k+1-m} \right.$$

où les constantes C figurant dans (4.1.8) et (4.1.9) sont indépendantes de h . \square

Il vient enfin la

Définition 4.1.2

Soit \mathcal{F} une famille régulière d'éléments finis (K, P_K, Σ_K) de degré k et de même type dans \mathbb{R}^n , pour lesquels l'hypothèse (1.2.1) est vérifiée, et soit Π_K l'opérateur de P_K -interpolation relativement à Σ_K .

Alors s'il existe une constante C indépendante de K telle que pour tout $K \in \mathcal{F}$, pour tout $v \in W^{k+1,p}(K)$ et pour tout $m=0,1,\dots,k+1$ on ait

$$(4.1.10) \quad \left| [v - \Pi_K v]_{m,p,K} \leq C h_K^{k+1-m} [v]_{k+1,p,K} \right.,$$

on dit que l'entier $k+1-m$ est l'ordre asymptotique des majorations de l'erreur de P_K -interpolation en semi-norme $[\cdot]_{m,p,K}$ sur \mathcal{F} . \square

Il est clair que (4.1.7) se réduit à (4.1.10) lorsque $p = q$. La relation (4.1.9) montre qu'il serait délicat de définir l'ordre asymptotique des majorations d'erreur lorsque $p \neq q$.

Notons également que (4.1.10) entraîne que la famille \mathcal{F} est quasi affine au sens de CIARLET [26] .

Enfin les conditions (4.1.10) impliquent que nécessairement

$$P_K \supset P_k(K) \quad .$$

4.2 HYPOTHESES ET RESULTATS PRELIMINAIRES CONCERNANT LES

ELEMENTS FINIS DE WACHSPRESS

Dans tout ce qui suit, lorsque \mathcal{F} est une famille d'éléments finis rationnels construits sur des polygones convexes à N côtés ($N \geq 4$) définis comme aux chapitres 2 et 3, on supposera que \mathcal{F} vérifie l'hypothèse (cf. [7], [50])

$$(4.2.1) \quad \left| \quad \exists \nu > 0, \quad \forall K \in \mathcal{F}, \quad \frac{|q_K|_{0,\infty,K}}{\inf_{x \in K} |q_K(x)|} \leq \nu, \right.$$

où $q_K(x) = 0$ est une équation de la courbe de degré $N-3$, éventuellement dégénérée, passant par les $\frac{N(N-3)}{2}$ points diagonaux extérieurs (éventuellement rejetés à l'infini).

Cette hypothèse est une condition de "non dégénérescence".

Dans le cas où K est un quadrilatère convexe non dégénéré en trapèze ou en parallélogramme, δ étant la distance euclidienne dans \mathbb{R}^2 , on considèrera la condition

$$(4.2.2) \quad \left| \quad \exists \nu_1 > 0, \quad \forall K \in \mathcal{F} \quad \inf_{x \in K} \delta(x,d) \geq \nu_1 h_K. \right.$$

Lorsque K est un pentagone ou un hexagone, on considèrera de façon analogue l'hypothèse

$$(4.2.3) \quad \left| \quad \begin{aligned} &\exists \nu_2 > 0, \quad \forall K \in \mathcal{F}, \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in I, \quad \forall k \in I, \quad i \neq j, \quad j \neq k, \quad k \neq i, \\ &\delta(a_i, d_{j,k}) \geq \nu_2 h_K \end{aligned} \right.$$

où $d_{j,k}$ (cf. §.3.1) est la droite passant par les points a_j et a_k .

Rappelons maintenant quelques résultats sur les éléments finis de Wachspress sur un quadrilatère, donnés dans APPRATO-ARCANGELI-GOUT [6].
On a d'abord la

Proposition 4.2.1

Soit \mathcal{F} une famille d'éléments finis rationnels de Wachspress quadrilatéraux vérifiant l'hypothèse (4.2.2). Alors si \hat{K} est le carré de référence introduit au §.2.2 on a, pour tout $\hat{x} \in \hat{K}$ et pour tout $K \in \mathcal{F}$

$$1 \leq s(\hat{x}) \leq \frac{\sup_{x \in K} |\ell(x)|}{\inf_{x \in K} |\ell(x)|} \leq 1 + \frac{1}{v_1},$$

et

$$\frac{\text{mes } K}{4} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{v_1}\right)^3} \leq |J_K(\hat{x})| \leq \frac{\text{mes } K}{4} \left(1 + \frac{1}{v_1}\right)^3.$$

Si de plus \mathcal{F} vérifie l'hypothèse (4.1.6) il existe C_1 et $C_2 > 0$, indépendantes de K , telles que pour tout $K \in \mathcal{F}$ et pour tout $\hat{x} \in \hat{K}$,

$$C_1 h_K^2 \leq |J_K(\hat{x})| \leq C_2 h_K^2.$$

Démonstration (cf. Proposition 3.4 de [6])

D'après la proposition 2.2.2, on a, pour tout $\hat{x} \in \hat{K}$, compte tenu de (4.2.2)

$$(4.2.4) \quad \left| s(\hat{x}) \leq \frac{\sup_{x \in K} |\ell(x)|}{\inf_{x \in K} |\ell(x)|} = \frac{\delta(a_4, d)}{\inf_{x \in K} \delta(x, d)} \leq \frac{h_K + \sup_{x \in K} |\delta(x, d)|}{\inf_{x \in K} \delta(x, d)} = 1 + \frac{1}{v_1} \right|$$

D'autre part, utilisant la définition de $J_K(\hat{x})$ et la valeur de $|J_K(\hat{x})|$ donnée dans la proposition 2.2.2 il vient

$$\text{mes } K = \int_K |J_K(\hat{x})| d\hat{x} = 2 (\text{Aire du triangle } b_1 b_2 b_3) \xi_1 \xi_2 \xi_3 \int_K \frac{d\hat{x}}{s^3(\hat{x})},$$

d'où l'on déduit, en utilisant la proposition 2.2.1, la relation (4.2.4) et le fait que $\text{mes } \hat{K} = 4$:

$$\frac{\text{mes } K}{4} \leq 2 (\text{Aire du triangle } b_1 b_2 b_3) \xi_1 \xi_2 \xi_3 \leq \frac{\text{mes } K}{4} \left(1 + \frac{1}{v_1}\right)^3$$

d'où le résultat, d'après la valeur de $|J_K(\hat{x})|$ (cf. proposition 2.2.1) et la relation (4.2.4). \square

On a également la

Proposition 4.2.2

Soit \mathcal{F} une famille d'éléments finis rationnels de Wachspress sur un quadrilatère vérifiant l'hypothèse (4.2.2). Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de K telle que

$$\sup_{\hat{x} \in K} \|DF_K(\hat{x})\| \leq C h_K \quad .$$

Démonstration (cf. Proposition 3.5 de [6])

D'après (2.2.5) on a, vu la définition de F_K , pour tout $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \hat{K}$,

$$x_i = \frac{\hat{\psi}_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{s(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}, \quad i = 1, 2 \quad \text{avec } \hat{\psi}_i \in P_1(\hat{K}).$$

Pour $j = 1, 2$ on a évidemment

$$\frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_j} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} \left(\frac{\hat{\psi}_i - b_{i,3} s}{s} \right) \quad \text{où } (b_{1,3}, b_{2,3}) = b_3 \text{ est défini au §.2.2.}$$

D'où, en utilisant la proposition 2.2.1.,

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_j} \right|_{0, \infty, \hat{K}} \leq \left| \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} (\hat{\psi}_i - b_{i,3} s) \right|_{0, \infty, \hat{K}} + |s|_{1, \infty, \hat{K}} \left| \hat{\psi}_i - b_{i,3} s \right|_{0, \infty, \hat{K}}.$$

Or d'après un résultat dû à WILHELMSEN [86] on a

$$\left| \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} (\hat{\psi}_i - b_{i,3} s) \right|_{0, \infty, \hat{K}} \leq 2 \left| \hat{\psi}_i - b_{i,3} s \right|_{0, \infty, \hat{K}},$$

et

$$|s|_{1, \infty, \hat{K}} \leq 2 |s|_{0, \infty, \hat{K}},$$

d'où, d'après la proposition 4.2.1.

$$\left| \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} (\hat{\psi}_i - b_{i,3} s) \right|_{0, \infty, \hat{K}} \leq 2 \left| \hat{\psi}_i - b_{i,3} s \right|_{0, \infty, \hat{K}} = 2 |s \cdot (x_i - \alpha_{i,3})|_{0, \infty, \hat{K}} \leq 2 \left(1 + \frac{1}{v_1}\right) h_K$$

et

$$|s|_{1, \infty, \hat{K}} \leq 2 \left(1 + \frac{1}{v_1}\right).$$

Ainsi pour $1 \leq i, j \leq 2$, on a

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_j} \right|_{0, \infty, \hat{K}} \leq 2 \left(1 + \frac{1}{v_1}\right) \left(2 + \frac{1}{v_1}\right) h_K,$$

et le résultat suit. \square

Remarque 4.2.1

Supposant que la famille \mathcal{F} d'éléments finis quadrilatéraux de Wachspress vérifie l'hypothèse supplémentaire de "non dégénérescence en parallélogrammes"

$$(4.2.5) \quad \left| \quad \exists \mu > 0, \quad \forall K \in \mathcal{F} \quad ; \quad \inf_{x \in K} \delta(x, d) \leq \mu h_K \right.$$

(il est facile de construire des familles d'éléments finis satisfaisant (4.2.5) on peut montrer le résultat suivant (cf. remarque 3.2 de [6])

$$(4.2.6) \quad \left| \quad \exists C > 0, \quad \forall K \in \mathcal{F} \quad ; \quad \sup_{\hat{x} \in K} \|D^2 F_K(\hat{x})\| \geq C h_K \quad . \right.$$

On en déduit que la situation des éléments finis rationnels de Wachspress est différente de celle des éléments finis isoparamétriques usuels. En effet dans le cas des "triangles ou des quadrilatères isoparamétriques de type (k)" cf. [26] par exemple, si on note \hat{K} l'élément de référence, K l'élément isoparamétrique courant, \hat{K}' l'élément droit dont les sommets sont ceux de K , h le diamètre de \hat{K}' et F l'application isoparamétrique telle que $K = F(\hat{K}')$, on a (cf. [28]), des inégalités de la forme

$$(4.2.7) \quad \left| \quad \sup_{\hat{x} \in K} \|D^\ell F(\hat{x})\| \leq C_\ell h^\ell, \quad 1 \leq \ell \leq k+1, \quad \right.$$

où les constantes C_ℓ sont des constantes indépendantes de h et de K , les relations (4.2.7) étant contradictoires avec une inégalité du type (4.2.6). \square

Soit aussi la

Proposition 4.2.3

Soit une famille d'éléments finis de Wachspres sur un quadrilatère vérifiant l'hypothèse (4.1.6). Alors les hypothèses (4.2.1) et (4.2.2) sont équivalentes sur \mathcal{F} .

Démonstration

Il est clair que si \mathcal{F} vérifie l'hypothèse (4.2.2) on a, compte tenu des notations du §.2.1 de la relation (4.2.4)

$$\frac{|q_K|_{0,\infty,K}}{\inf_{x \in K} |q_K(x)|} = \frac{\delta(a_4, d)}{\inf_{x \in K} \delta(x, d)} \leq 1 + \frac{1}{v_1}$$

Inversement, supposons que la famille \mathcal{F} vérifie l'hypothèse (4.2.1). Alors

$$\frac{|q_K|_{0,\infty,K}}{\inf_{x \in K} |q_K(x)|} = \frac{\delta(a_4, d)}{\inf_{x \in K} \delta(x, d)} \leq v$$

d'où

$$\inf_{x \in K} \delta(x, d) \geq \frac{1}{v} \delta(a_4, d) \geq \frac{\rho_K}{v},$$

et le résultat, puisque d'après (4.1.6), $\rho_K \geq \frac{h_K}{\sigma}$. \square

Rappelons enfin la

Proposition 4.2.4

Soit \mathcal{F} une famille d'éléments finis rationnels quadrilatéraux de Wachspres, vérifiant l'hypothèse (4.2.2).

Si, pour tout $K \in \mathcal{F}$, $d_{1,3}$ (resp. $d_{2,4}$) est la diagonale intérieure de K passant par les points a_1 et a_3 (resp. a_2 et a_4), alors

$$\forall K \in \mathcal{F} \quad \inf_{i \in I} \delta(a_i, d_{i+1, i+3}) \geq \frac{v_1}{2 + v_1} \rho_K .$$

Démonstration (cf. Lemme 5.2 de [6]). \square

On va maintenant montrer quelques résultats (cf. GOUT [50]) concernant les familles d'éléments finis de Wachspress pentagonaux et hexagonaux permettant de prouver l'existence d'hypothèses de type géométrique analogues à l'hypothèse (4.2.1).

Soit tout d'abord la

Remarque 4.2.2

Intuitivement l'hypothèse (4.2.3) apparaît comme une traduction géométrique de l'hypothèse (4.2.1) de non dégénérescence, de fait c'est ce que l'on peut montrer, par exemple, dans le cas (très) particulier suivant.

Soit \mathcal{F} une famille de pentagones K convexes fermés, non dégénérés, de sommets a_i , $i \in I$, tels que $a_i = F_K(\hat{a}_i)$, les points $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$, et \hat{a}_4 étant fixés, et que le point \hat{a}_5 , variable, appartienne à une droite convenable fixée \hat{d}_5 passant par \hat{a}_4 avec

$$\delta(\hat{a}_4, \hat{a}_5) \leq \delta(\hat{a}_1, \hat{a}_5) ,$$

les points \hat{a}_1, \hat{a}_2 et \hat{a}_5 étant situés dans le même demi-plan fermé ayant pour frontière la droite \hat{d}_4 ; l'application F_K est une similitude de

rapport h_K .

Alors si \mathcal{F} vérifie l'hypothèse (4.2.1), \mathcal{F} vérifie l'hypothèse (4.2.3), la démonstration s'effectuant par un raisonnement par l'absurde.

Supposons en effet que la famille \mathcal{F} ne vérifie pas (4.2.3). Il existe alors une suite $\{K_n\}$ de pentagones (appartenant à \mathcal{F}) de sommets $a_{i,n}$, $i \in I$, les points diagonaux extérieurs étant notés $b_{i,n}$, $i \in I$. Notons que si $\hat{a}_{5,n}$ (par hypothèse) et les points $\hat{b}_{2,n}$ et $\hat{b}_{5,n}$ ne sont pas fixes, en revanche les points $\hat{b}_{1,n}$, $\hat{b}_{3,n}$ et $\hat{b}_{4,n}$ le sont. Alors compte tenu des hypothèses sur \mathcal{F} , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{Inf}[\delta(a_{5,n}, d_{2,4,n}), \delta(a_{5,n}, d_{1,4,n}), \delta(a_{4,n}, d_{2,5,n}), \delta(a_{4,n}, d_{3,5,n})] < \frac{h_K}{n}$$

soit encore, en utilisant la définition de F_{K_n} , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Inf}[\delta(\hat{a}_{5,n}, \hat{d}_{2,4}), \delta(\hat{a}_{5,n}, \hat{d}_{1,4}), \delta(\hat{a}_{4,n}, \hat{d}_{2,5,n}), \delta(\hat{a}_{4,n}, \hat{d}_{3,5,n})] < \frac{1}{n}.$$

Par suite, quand n tend vers $+\infty$, $\hat{a}_{5,n}$ tend vers \hat{a}_4 , et simultanément les points $\hat{b}_{5,n}$ et $\hat{b}_{2,n}$ tendent respectivement vers les points \hat{a}_4 et le point \hat{b}_2 intersection des droites \hat{d}_1 et \hat{d}_3 .

D'où l'on déduit qu'à la limite, la conique passant par les cinq points limites des points $\hat{b}_{i,n}$, $i \in I$ (lorsque n tend vers $+\infty$) est la conique dégénérée en deux droites : \hat{d}_5 et la droite passant par les points $\hat{b}_{3,n}$ et \hat{b}_2 .

Les polynômes q_{K_n} intervenant dans les équations $q_{K_n}(x) = 0$

des coniques Γ_n passant par les cinq points $b_{i,n}$ ($i \in I$), dépendant continuellement de ces points, on a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|q_{K_n} \circ F_{K_n}|_{0, \infty, \hat{K}_n}}{\text{Inf}_{\hat{x} \in \hat{K}_n} |(q_{K_n} \circ F_{K_n})(\hat{x})|} = +\infty$$

d'où la contradiction avec l'hypothèse (4.2.1) et le résultat. \square

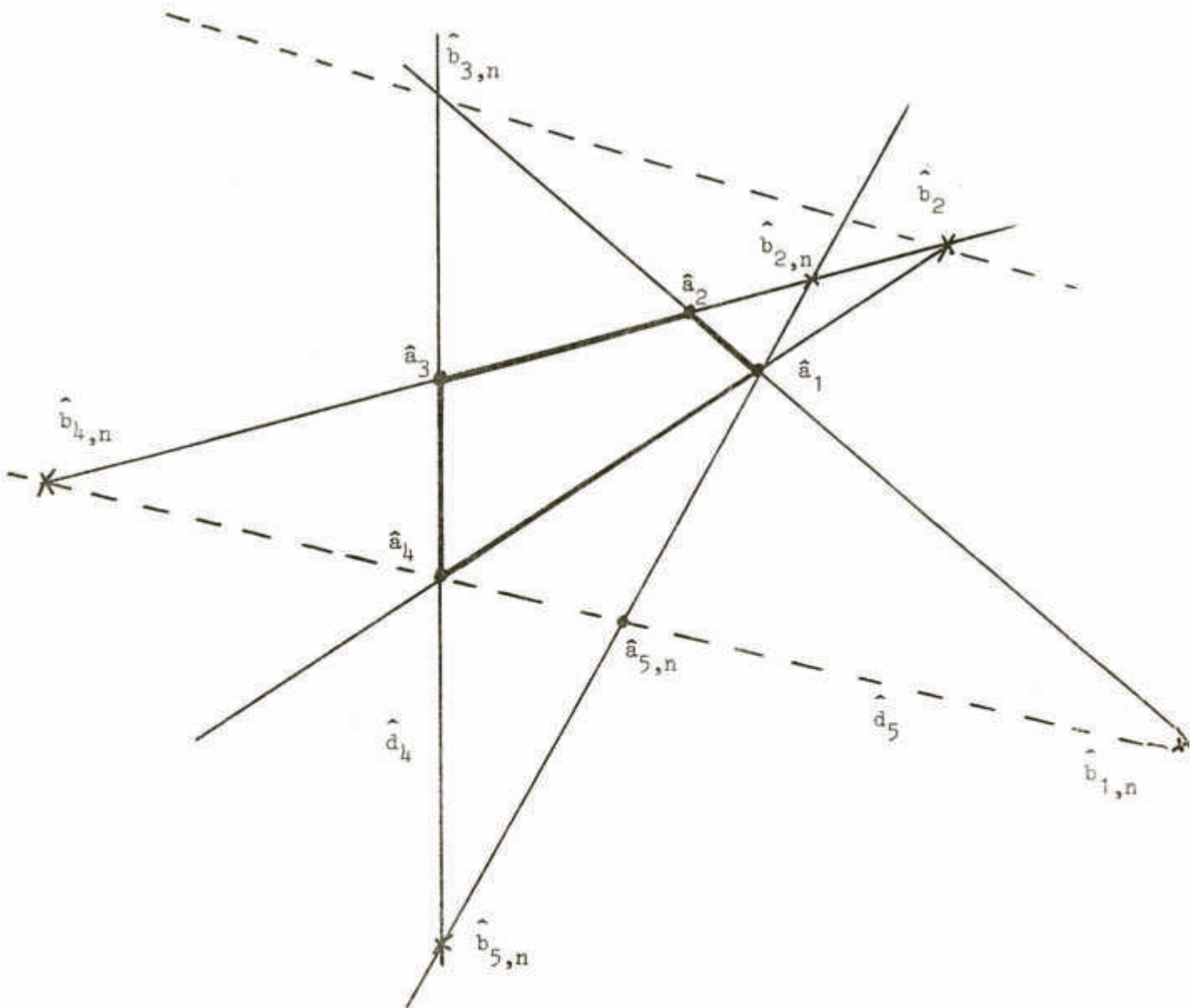


fig.4.2.1

On montre maintenant la

Proposition 4.2.5

Soit \mathcal{F} une famille d'éléments finis K (pentagonaux ou hexagonaux de Wachspress) vérifiant les hypothèses (4.1.6) et (4.2.3). Alors il existe θ_0 et θ_1 , avec $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ et $\theta_0 < \theta_1 < \pi$ tels que

$$(4.2.8) \quad \left| \forall K \in \mathcal{F}, \forall \theta_K \text{ angle intérieur de } K, \theta_0 < \theta_K < \theta_1 \right.$$

Démonstration

Soient $K \in \mathcal{F}$ et a_i l'un des sommets de K . Par définition de ρ_K il existe un cercle de diamètre ρ_K inclus dans K . Menant de a_i les tangentes à ce cercle, appelant H_1 et H_2 les points de contacts et θ_i l'angle $\widehat{a_{i-1} a_i a_{i+1}}$ intérieur à K , on a $\theta = \widehat{H_1 a_i H_2} \leq \widehat{a_{i-1} a_i a_{i+1}} = \theta_K$.

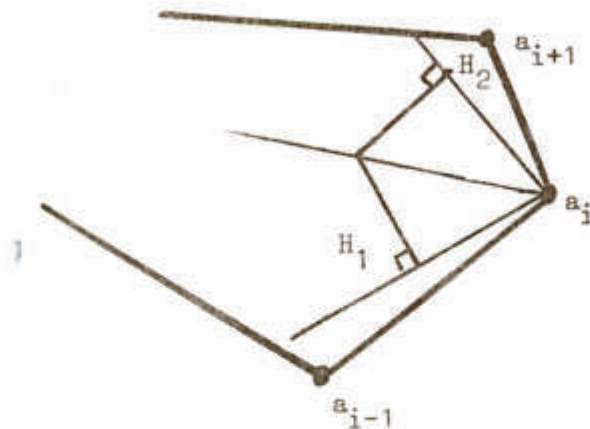


fig.4.2.2

Il vient, d'après (4.1.6)

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{1}{2} \rho_K}{\delta(a_i, H_1)} \geq \frac{\frac{1}{2} \rho_K}{h_K} \geq \frac{1}{2\sigma} .$$

Comme $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\Pi}{2}$, après avoir effectué le même raisonnement pour les autres angles du pentagone (ou de l'hexagone) on en déduit l'existence de θ_0 , $0 < \theta_0 < \frac{\Pi}{2}$ tel que, pour tout $K \in \mathcal{F}$

$$\theta_0 \leq \theta_K \quad .$$

Considérons maintenant la diagonale intérieure $d_{i-1,i+1}$ de K .

D'après (4.2.3), $\delta(a_i, d_{i-1,i+1}) \geq v_2 h_K$. Désignant par \mathcal{F} le demi-plan fermé de frontière $d_{i-1,i+1}$ contenant a_i , a_i appartient à l'ensemble $\{x \in \mathcal{F}, \delta(x, d_{i-1,i+1}) \geq v_2 h_K\}$ qui est le demi plan fermé contenant a_i de frontière $\Delta = \{x \in \mathcal{F}, \delta(x, d_{i-1,i+1}) = v_2 h_K\}$.

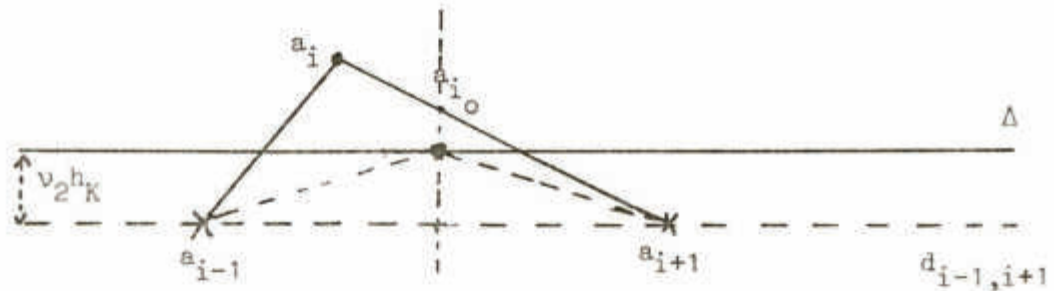


fig.4.2.3

Soit a_{i0} l'intersection de Δ et de la médiatrice du segment d'extrémités a_{i-1} et a_{i+1} , alors

$$\widehat{a_{i-1}a_i a_{i+1}} \leq \widehat{a_{i-1}a_{i0} a_{i+1}} = \theta'_1 < \Pi$$

Or

$$\operatorname{tg} \frac{\theta'_1}{2} = \frac{\frac{1}{2} \delta(a_{i-1}, a_{i+1})}{v_2 h_K} \leq \frac{\frac{1}{2} h_K}{v_2 h_K} = \frac{1}{2v_2}$$

Comme $0 < \frac{\theta'_1}{2} < \frac{\Pi}{2}$, effectuant un raisonnement analogue pour les autres

sommets de K on en déduit :

$$\exists \theta_1, 0 < \theta_1 < \pi, \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} = \frac{1}{2\nu_2}, \quad \forall K \in \mathcal{F} \quad \theta_K \leq \theta_1,$$

ce qui termine la démonstration. \square

Il vient alors la

Proposition 4.2.6

Soit \mathcal{F} une famille d'éléments finis K (pentagonaux ou hexagonaux de Wachpress) vérifiant les hypothèses (4.1.6) et (4.2.3). Alors \mathcal{F} vérifie

$$(4.2.9) \quad \left| \begin{array}{l} \exists \nu_3 > 0, \forall K \in \mathcal{F}, \forall i \in I, \forall j \in I, j \neq i, i+1, \delta(a_i, d_j) \geq \nu_3 h_K \end{array} \right.$$

où $I = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ si K est un pentagone et $I = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ si K est un hexagone.

Démonstration

Soit a_i l'un des sommets de K ; \mathcal{F} , vérifiant (4.1.6) et (4.2.3), vérifie aussi (4.2.8) d'après la proposition 4.2.5. Considérons alors $\delta(a_i, d_{i+2})$.

Si l'angle $\widehat{a_i a_{i+1} a_{i+2}}$ est aigu, on a

$$\delta(a_i, d_{i+2}) \geq \delta(a_i, d_{i-1, i+1}) \geq \nu_2 h_K.$$

Si l'angle $\widehat{a_i a_{i+1} a_{i+2}}$ est obtus il vient

$$\sin(\widehat{a_i a_{i+1} a_{i+2}}) = \frac{\delta(a_i, d_{i+2})}{\delta(a_i, a_{i+1})} \leq \frac{\delta(a_i, d_{i+2})}{\delta(a_i, d_{i-1, i+1})}.$$

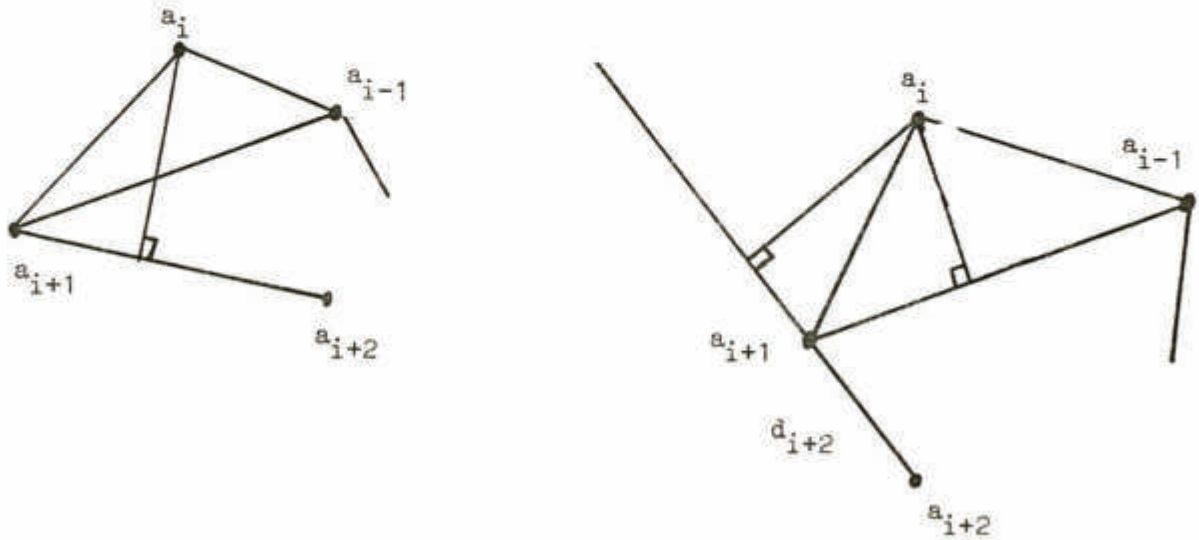


fig.4.2.4

D'après (4.2.3) et (4.2.8) on a

$$\delta(a_i, d_{i+2}) \geq v_2 h_K \text{Min}(\sin \theta_0, \sin \theta_1) .$$

On obtiendrait un résultat analogue pour $\delta(a_i, d_{i-1})$.

De plus, utilisant la convexité de K , menant des parallèles aux côtés de K (autres que d_{i-1} , d_i , d_{i+1} et d_{i+2}) passant par les points a_{i-1} ou a_{i+1} et avec les résultats précédents, on obtient, pour $j \neq i$, $j \neq i + 1$

$$\begin{aligned} \delta(a_i, d_j) &\geq \text{Inf}(\delta(a_i, d_{i-1, i+1}), \delta(a_i, d_{i-1}), \delta(a_i, d_{i+1})) \\ &\geq v_2 h_K \text{Min}(\sin \theta_0, \sin \theta_1) \end{aligned}$$

d'où le résultat avec $v_3 = v_2 \text{Min}(\sin \theta_0, \sin \theta_1)$. \square

Remarque 4.2.3

Dans le cas du pentagone régulier on a

$$\frac{|q_K|_{0, \infty, K}}{\inf_{x \in K} |q_K(x)|} = 1 + \frac{1}{8 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}},$$

et dans celui de l'hexagone régulier

$$\frac{|q_K|_{0, \infty, K}}{\inf_{x \in K} |q_K(x)|} = \frac{3}{2}, \quad \square$$

4.3 APPLICATIONS A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS DROITS

POLYNOMIAUX

Dans ce paragraphe on applique les résultats des théorèmes 1.2.1, 1.3.1 et 1.3.2 à la méthode des éléments finis droits polynomiaux sur des n -simplexes en se plaçant dans le cadre de la théorie affine dans \mathbb{R}^n (cf. CIARLET [26], CIARLET-RAVIART [27], RAVIART [68]), ce qui exclut donc, en principe, le cas où l'on utilise des degrés de liberté faisant intervenir des dérivées normales.

Certains des résultats numériques donnés ici figurent dans ARCANGELI-GOUT [8], d'autres dans GOUT [45] ou [46].

4.3.1 Application du théorème 1.2.1 à la méthode des éléments finis droits polynomiaux

Supposons que \mathcal{F} soit une famille affine (cf. 0.3.4) régulière d'éléments finis construits sur des n -simplexe droits, les hypothèses (1.2.1), (1.2.2) et (1.2.3) étant supposées vérifiées.

L'application du théorème 1.2.1 donne alors avec $\bar{\Omega} = K \in \mathcal{F}$, pour tout $u \in W^{k+1,p}(K)$, pour tout $m = 0, 1, \dots, k+1$, des majorations du type (4.1.10) avec

$$C = C(n, k, m, p, s, \sigma) .$$

Il suffit pour le vérifier, d'utiliser un changement de variables qui ramène le calcul des $[p_i^0]_{m, \infty, K}$ et $[p_{ij}^r]_{m, \infty, K}$ (cf. relations

(1.2.13)) à un calcul dans un n -simplexe de référence.

Lorsque, comme c'est souvent le cas dans les applications, les ξ_{ij}^r ont pour différentes composantes des vecteurs dont l'origine et l'extrémité sont des noeuds a_i^r (donc dans K), on a alors pour tout $r=0,1,\dots,s$

$$(4.3.1) \quad \left| \quad \left((\xi_{ij}^r) \right) \leq h^r \quad 1 \leq i \leq N_r, \quad 1 \leq j \leq d_{ir} \right.$$

Alors pour $m = 0,1,\dots,k$, les relations (1.2.13) s'écrivent

$$(4.3.2) \quad \left| \quad [u-\Pi u]_{m,p,K} \leq \left\{ \frac{1}{k!} \frac{\sum_{i=1}^{N_0} [p_i^0]_{m,\infty,K}}{[q(k+1-\frac{n}{p})]^{1/q} [p(k+1)]^{1/p}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \frac{\left(\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} [p_{ij}^r]_{m,\infty,K} \right)}{[q(k+1-r-\frac{n}{p})]^{1/q} [p(k+1-r)]^{1/p}} \right\} [u]_{k+1,p,K} h_K^{k+1}$$

où $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Si, en particulier, les fonctions de base p_i^0 et p_{ij}^r sont explicitées sous la forme

$$p_i^0(x) = f_i^0(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)), \quad 1 \leq i \leq N_0$$

$$p_{ij}^r(x) = f_{ij}^r(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)), \quad 1 \leq r \leq s, \quad 1 \leq i \leq N_r, \quad 1 \leq j \leq d_{ir}$$

où les fonctions f_i^0 et f_{ij}^r sont de classe C^k , indépendantes de Σ et de K (ce qui est vérifié en théorie affine) et où $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)$ désignent les coordonnées barycentriques de x par rapport aux sommets du

n -simplexe K , on obtient, à partir des majorations (4.3.2) et en utilisant la propriété (cf. CIARLET-WAGSCHAL [30])

$$\|D\lambda_j\| \leq \frac{1}{\rho} \quad , \quad 1 \leq j \leq n+1 \quad ;$$

les relations

$$(4.3.3) \quad \left[\begin{array}{l} [u - \Pi u]_{m,p,K} \leq \frac{1}{k!} \frac{\sum_{i=1}^{N_0} [\text{Max}(\sum_{x \in K} \frac{m!}{|\alpha|} |\partial^{\alpha} \Gamma_i^0(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x))|)]}{[q(k+1 - \frac{n}{p})]^{1/q} [p(k+1)]^{1/p}} [u]_{k+1,p,K} \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} \\ + \sum_{r=1}^s \frac{1}{(k-r)!} \frac{\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{i,r}} \text{Max}(\sum_{x \in K} \frac{m!}{|\alpha|} |\partial^{\alpha} \Gamma_{ij}^r(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x))|)}{[q(k+1-r - \frac{n}{p})]^{1/q} [p(k+1-r)]^{1/p}} [u]_{k+1,p,K} \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} \end{array} \right.$$

où ici $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$.

On constate alors que le second membre de (4.3.3) est, de fait, indépendant de K , puisque \mathcal{F} est une famille affine : l'utilisation des coordonnées barycentriques montre qu'il ne dépend que d'un n -simplexe fixe. On a donc bien des relations du type (4.1.10), en utilisant l'hypothèse (4.1.6). On retrouve ainsi le théorème 6 de CIARLET-RAVIART [27]. \square

On vérifie ainsi d'autre part que les formules (1.2.13) du théorème 1.2.1 conduisent à des majorations uniformes de l'erreur d'interpolation au sens de la définition 4.1.1. \square

On peut noter également que, dans le cas d'une famille affine régulière d'éléments finis droits polynomiaux construits sur des n -simplexes,

Le théorème 1.2.1 montre que l'ordre asymptotique des majorations de l'erreur d'interpolation (au sens de la définition 4.1.2) est $k + 1 - m$.

4.3.2 Application des théorèmes 1.3.1 et 1.3.2 à la méthode des éléments finis droits polynomiaux

Comme dans le paragraphe 4.3.1 on se place en théorie affine. Il est clair que les théorèmes 1.3.1 et 1.3.2 s'appliquent à la méthode des éléments finis droits.

Soit \mathcal{F} une famille régulière d'éléments finis polynomiaux construits sur des n -simplexes.

Supposons alors que les conditions d'application du théorème 1.3.1 soient réalisées et soit $u \in W^{k+1,p}(K)$.

Si les relations (4.3.1) sont vérifiées et si les fonctions de base p_i^0 et p_{ij}^r s'expriment de la même façon qu'au paragraphe 4.3.1 on obtient pour tout $q \geq 1$, pour tout entier $m \geq 0$ tel que $k+1 > m + \frac{n}{p}$:

$$(4.3.4) \quad \left| [u - \Pi u]_{m,q,K} \right| \leq \left\{ \frac{(\text{mes } K)^{1/q-1/p}}{(k-m)! [p'(k+1-m-\frac{n}{p})]^{1/p'} [p(k+1-m)]^{1/p}} + C_1 \sigma^m \right\} [u]_{k+1,p,K}^{h_K^{k+1-m}}$$

où $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ et

$$C_1 = C_1(n,k,m,p,q,s,K)$$

$$(4.3.5) \quad \left| \begin{aligned} &= \frac{(\text{mes}K)^{-\frac{1}{p}}}{k!} \frac{\sum_{i=1}^{N_0} \left\{ \int_K \left[\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^{\alpha} r_i^0(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x))| \right]^q dx \right\}^{\frac{1}{q}}}{[p'(k+1 - \frac{n}{p})]^{1/p'} [p(k+1)]^{1/p}} \\ &+ \sum_{r=1}^s \frac{(\text{mes}K)^{-\frac{1}{p}}}{(k-r)!} \frac{\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{d_{ir}} \left\{ \int_K \left[\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^{\alpha} r_{ij}^r(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x))| \right]^q dx \right\}^{\frac{1}{q}}}{[p'(k+1-r - \frac{n}{p})]^{1/p'} [p(k+1-r)]^{1/p}} \end{aligned} \right.$$

Pour calculer les constantes définies par les relations (4.3.5) on peut utiliser les formules,

$$(4.3.6) \quad \left| \int_K (\lambda_1(x))^{v_1} \dots (\lambda_{n+1}(x))^{v_{n+1}} dx = \frac{v_1! \dots v_{n+1}!}{(v_1+v_2+\dots+v_{n+1}+n)!} n!(\text{mes}K) \right.$$

(cf. par exemple ZIENKIEWICZ [89], où K est un n -simplexe, $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)$ les coordonnées barycentriques de x par rapport aux sommets de K et où $v_1, \dots, v_{n+1} \in \mathbb{N}$.

Les fonctions de base étant polynomiales par définition de \mathcal{F} on obtient donc encore, à partir des formules (4.3.4), (4.3.5) et compte tenu des relations (4.3.6), des majorations du type (4.1.7) avec $\mathcal{C} = \mathcal{C}(n, k, m, p, q, s, \sigma)$, donc uniformes au sens de la définition 4.1.1.

D'autre part, faisant $p = q$ dans les relations (4.1.7) on constate que l'ordre asymptotique des majorations de l'erreur de P_K - interpolation en semi-normes $[]_{m, p, K}$ est $k+1-m$. \square

\mathcal{F} étant toujours une famille affine régulière d'éléments finis K polynomiaux construits sur des n -simplexes, l'application du théorème 1.3.2 donne également pour tout $v \in W^{k+1,p}(K)$ et pour tout $m = 0, 1, \dots, k+1$, des majorations du type (4.1.7), avec $p = q$, donc uniformes au sens de la définition 4.1.1.

Il suffit, par un raisonnement analogue à celui qui précède de majorer les quantités $[p_i^o]_{m,p,\Omega}$ et $[p_{ij}^r]_{m,p,\Omega}$.

Pour cela, on utilise les relations (4.3.6) pour le calcul des expressions $[p_i^o]_{m,p,K}$ et $[p_{ij}^r]_{m,p,K}$ et l'on montre que l'on a

$$[p_i^o]_{m,p,K} \leq C_i^o \frac{(\text{mes } K)^{1/p}}{\rho_K^m},$$

$$[p_{ij}^r]_{m,p,K} \leq C_{ij}^r \frac{(\text{mes } K)^{1/p}}{\rho_K^m},$$

d'où des relations du type (4.1.10).

Comme dans le cas précédent, l'ordre asymptotique des majorations de l'erreur de P_K -interpolation est $k + 1 - m$.

4.3.3 Exemples numériques

On adopte dans ce paragraphe la terminologie de CIARLET [28] pour la désignation des éléments finis utilisés.

Certains des résultats numériques donnés ici l'ont été également dans [8] , [44] , [45] mais ils sont améliorés, compte tenu des remarques 1.1.2 et 1.1.3.

Triangle de type (1)

En appliquant le théorème 1.2.1 on obtient pour tout $u \in H^2(K)$

$$[u - \Pi u]_{0,K} \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} [u]_{2,K} h^2 ,$$

$$[u - \Pi u]_{1,K} \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} [u]_{2,K} \frac{h^2}{\rho} .$$

En appliquant le théorème 1.3.1 pour $m = 0$ et le théorème 1.3.2 pour $m = 1$ on obtient pour tout $u \in H^2(K)$

$$[u - \Pi u]_{0,K} \leq 0,8 [u]_{2,K} h^2 ,$$

$$[u - \Pi u]_{1,K} \leq (\sqrt{2} + 1,5 \frac{h}{\rho}) [u]_{2,K} h .$$

Triangle de type (2)

En appliquant le théorème 1.2.1 on a pour tout $u \in H^3(K)$

$$[u - \Pi u]_{0,K} \leq [u]_{3,K} h^3 ,$$

$$[u-\Pi u]_{1,K} \leq 2,5 [u]_{3,K} \frac{h^3}{\rho} ,$$

$$[u-\Pi u]_{2,K} \leq 3,75 [u]_{3,K} \frac{h^3}{\rho^2} .$$

En appliquant le théorème 1.3.1 pour $m = 0,1$ et le théorème 1.3.2 pour $m = 2$ on a pour tout $u \in H^3(K)$

$$[u-\Pi u]_{0,K} \leq 0,3 [u]_{3,K} h^3$$

$$[u-\Pi u]_{1,K} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2} \frac{h}{\rho} \right) [u]_{3,K} h^2$$

$$[u-\Pi u]_{2,K} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} (1+\sqrt{2}) \frac{h^2}{\rho^2} \right) [u]_{3,K} h$$

Triangle de type (3)

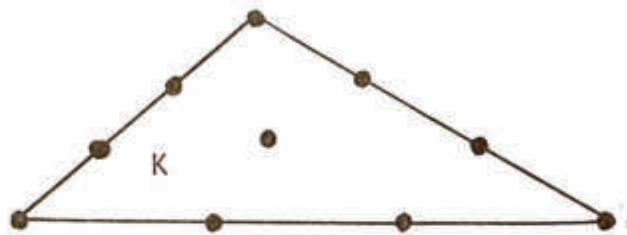


fig.4.3.1

En appliquant le théorème 1.2.1 on obtient pour tout $u \in H^4(K)$

$$[u-\Pi u]_{0,K} \leq \frac{\sqrt{3}}{4} [u]_{4,K} h^4$$

$$[u-\Pi u]_{1,K} \leq \sqrt{3} [u]_{4,K} \frac{h^4}{\rho} ,$$

$$[u-\Pi u]_{2,K} \leq 9,5 [u]_{4,K} \frac{h^4}{\rho^2} ,$$

$$[u-\Pi u]_{3,K} \leq 14 [u]_{4,K} \frac{h^4}{\rho^3} .$$

En appliquant le théorème 1.3.1 pour $m = 0,1,2$ et le théorème 1.3.2 pour $m = 3$ on a

$$[u-\Pi u]_{0,K} \leq \frac{13}{40} [u]_{4,K} h^4$$

$$[u-\Pi u]_{1,K} \leq \left(\frac{1}{9} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{h}{\rho} \right) [u]_{4,K} h^3$$

$$[u-\Pi u]_{2,K} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{11}{2} \frac{h^2}{\rho^2} \right) [u]_{4,K} h^2$$

$$[u-\Pi u]_{3,K} \leq \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{39}{4} \frac{h^3}{\rho^3} \right) [u]_{4,K} h$$

Triangle d'Hermite de type (3)

En appliquant le théorème 1.2.1 on a, pour tout $u \in H^4(K)$ les majorations suivantes

$$[u-\Pi u]_{0,K} \leq \frac{1}{5} [u]_{4,K} h^4 ,$$

$$[u-\Pi u]_{1,K} \leq \frac{4}{3} [u]_{4,K} \frac{h^4}{\rho} ,$$

$$[u-\Pi u]_{2,K} \leq 8,5 [u]_{4,K} \frac{h^4}{\rho^2} ,$$

$$[u-\Pi u]_{3,K} \leq 19,5 [u]_{4,K} \frac{h^4}{\rho^3} .$$

De même, en utilisant le théorème 1.3.1 pour $m = 0, 1, 2$ et le théorème 1.3.2 pour $m = 3$ on obtient pour tout $u \in H^4(K)$

$$[u - \Pi u]_{0,K} \leq \frac{\sqrt{3}}{16} [u]_{4,K} h^4 ,$$

$$[u - \Pi u]_{1,K} \leq \left(\frac{1}{4\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{h}{\rho} \right) [u]_{4,K} h^3 ,$$

$$[u - \Pi u]_{2,K} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{11}{2} \frac{h^2}{\rho^2} \right) [u]_{4,K} h^2 ,$$

$$[u - \Pi u]_{3,K} \leq \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} + 12 \frac{h^3}{\rho^3} \right) [u]_{4,K} h .$$

On peut remarquer que les résultats concernant les deux éléments finis de type (3) sur un triangle sont comparables quant à l'expression des majorations.

Triangle d'Argyris de type (5)

Pour une étude détaillée on renvoie au paragraphe 4 de [45] (cf. également [44]). Indiquons simplement que la méthode utilisée pour obtenir les majorations de l'erreur d'interpolation consiste à ramener cette étude à celle employée pour l'estimation de l'erreur d'interpolation dans le cas de l'élément fini d'Hermite de type (5) (cf. ARGYRIS [10], CIARLET [26], RAVIART [68]).

Finalement par application du théorème 1.2.1, on obtient pour tout $u \in H^6(K)$

$$[u-\Pi u]_{0,K} \leq (0,02 + 0,01 \frac{h}{\rho}) [u]_{6,K} h^6 ,$$

$$[u-\Pi u]_{1,K} \leq (0,11 + 0,12 \frac{h}{\rho}) [u]_{6,K} \frac{h^6}{\rho} ,$$

$$[u-\Pi u]_{2,K} \leq (1,66 + 2,28 \frac{h}{\rho}) [u]_{6,K} \frac{h^6}{\rho^2} ,$$

$$[u-\Pi u]_{3,K} \leq (25,5 + 41 \frac{h}{\rho}) [u]_{6,K} \frac{h^6}{\rho^3} ,$$

$$[u-\Pi u]_{4,K} \leq (185 + 405 \frac{h}{\rho}) [u]_{6,K} \frac{h^6}{\rho^4} ,$$

$$[u-\Pi u]_{5,K} \leq (434 + 152 \frac{h}{\rho}) [u]_{6,K} \frac{h^6}{\rho^5} .$$

Si d'autre part on utilise le théorème 1.3.1 pour $m = 0,1,2,3,4$, et le théorème 1.3.2 pour $m = 5$ il vient

$$[u-\Pi u]_{0,K} \leq (0,006 + 0,015 \frac{h}{\rho}) [u]_{6,K} h^6 ,$$

$$[u-\Pi u]_{1,K} \leq (0,005 + 0,05 \frac{h}{\rho} + 0,12 \frac{h^2}{\rho^2}) [u]_{6,K} h^5 ,$$

$$[u-\Pi u]_{2,K} \leq (0,03 + 0,58 \frac{h^2}{\rho^2} + 2,28 \frac{h^3}{\rho^3}) [u]_{6,K} h^4 ,$$

$$[u-\Pi u]_{3,K} \leq (0,13 + 10 \frac{h^3}{\rho^3} + 41 \frac{h^4}{\rho^4}) [u]_{6,K} h^3 ,$$

$$[u-\Pi u]_{4,K} \leq (0,5 + 100 \frac{h^4}{\rho^4} + 405 \frac{h^5}{\rho^5}) [u]_{6,K} h^2 ,$$

$$[u-\Pi u]_{5,K} \leq (0,012 + 40 \frac{h^5}{\rho^5} + 152 \frac{h^6}{\rho^6}) [u]_{6,K} h .$$

Il est clair que dans ces dernières majorations, certains termes figurant dans les majorations sont "négligeables" devant ceux comportant le facteur $\frac{h}{\rho}$.

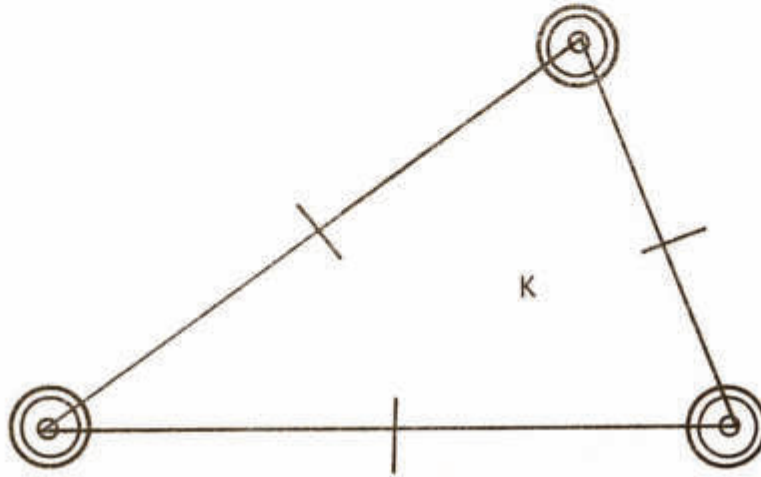


fig.4.3.2

Indiquons enfin quelques exemples numériques sur des éléments finis construits sur des rectangles (on aurait des résultats analogues pour des éléments finis construits sur des parallélogrammes cf. GOUT [44]).

Rectangle de type (1)

En appliquant le théorème 1.2.1 on obtient pour tout $u \in H^2(K)$

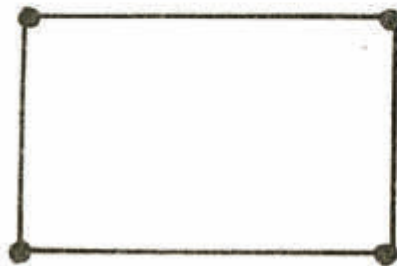
$$[u - \Pi u]_{0,K} \leq \frac{3}{2} [u]_{2,K} h^2 ,$$

$$[u - \Pi u]_{1,K} \leq 4 [u]_{2,K} \frac{h^2}{\rho} ,$$

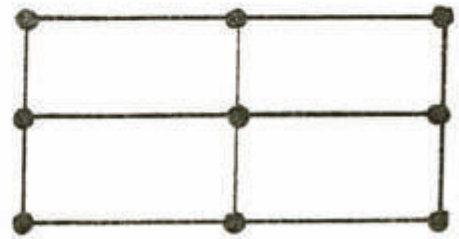
En appliquant le théorème 1.3.1 pour $m = 0$ et le théorème 1.3.2 pour $m = 1$ on a, pour tout $u \in H^2(K)$

$$[u-\Pi u]_{0,K} \leq \frac{2}{3} [u]_{2,K} h^2$$

$$[u-\Pi u]_{1,K} \leq \left(\sqrt{2} + \frac{7}{4} \frac{h}{\rho}\right) [u]_{2,K} h$$



Rectangle de type (1)



Rectangle de type (2)

fig.4.3.3

Rectangle de type (2)

En appliquant le théorème 1.2.1 on a pour tout $u \in H^3(K)$

$$[u-\Pi u]_{0,K} \leq \frac{9}{4} [u]_{3,K} h^3 ,$$

$$[u-\Pi u]_{1,K} \leq 18,5 [u]_{3,K} \frac{h^3}{\rho} ,$$

$$[u-\Pi u]_{2,K} \leq 117 [u]_{3,K} \frac{h^3}{\rho^2} .$$

En appliquant le théorème 1.3.1 pour $m = 0, 1$ et le théorème 1.3.2 pour $m = 2$, il vient pour tout $u \in H^3(K)$

$$[u-\Pi u]_{0,K} \leq 0,5 [u]_{3,K} h^3 ,$$

$$[u-\Pi u]_{1,K} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{7}{4} \frac{h}{\rho}\right) [u]_{3,K} h^2 ,$$

$$[u-\Pi u]_{2,K} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 18 \frac{h^2}{\rho^2} \right) [u]_{3,K} h \quad .$$

Remarque 4.3.1

Dans tous les exemples on constate que les constantes obtenues par application des théorèmes 1.3.1 et 1.3.2 sont meilleures que celles que l'on obtient à partir du théorème 1.2.1.

4.4 APPLICATIONS AUX ELEMENTS FINIS RATIONNELS DE WACHSPRESS

Dans ce paragraphe, on applique les résultats des théorèmes 1.2.1, 1.3.1 et 1.3.2 à des familles d'éléments finis rationnels de Wachspress sur des quadrilatères, des pentagones ou des hexagones convexes fermés du type de ceux construits aux chapitres 2 et 3 .

On donne également quelques exemples numériques, notamment dans le cas où les éléments finis étudiés sont construits sur des hexagones réguliers.

Rappelons que les résultats concernant les éléments finis rationnels quadrilatéraux de Wachspress de degrés 1, 2 et 3 ont été donnés dans APPRATO-ARCANGELI-GOUT [6] et que la plupart des autres résultats figurent dans GOUT [46],[48],[50],[51] .

4.4.1 Cas des éléments finis rationnels de type Wachspress sur un quadrilatère

Dans tout ce paragraphe les quadrilatères K considérés sont définis comme au §.2.1.

Montrons tout d'abord la

Proposition 4.4.1

Soit \mathcal{F} une famille régulière (cf.(4.1.6)) d'éléments finis rationnels de même type dont l'élément fini générique (K,P,Σ) est suivant les cas l'élément fini rationnel de Serendip de degré 1,2,3 ou 4 , ou

L'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 sur un quadrilatère. On suppose de plus que \mathcal{F} vérifie l'hypothèse (4.2.2).

Alors, pour toute fonction de base w d'un élément fini rationnel de Serendip de degré 1, 2, 3 ou 4 ou d'un élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 sur un quadrilatère, il existe une constante $C_w(\sigma, \nu_1)$ indépendante de K telle que

$$(4.4.1) \quad \|w\|_{0,\infty,K} \leq C_w(\sigma, \nu_1) .$$

Démonstration

Pour les démonstrations détaillées concernant les éléments finis rationnels de Serendip de degré 1, 2 ou 3, on renvoie à la démonstration de la proposition 5.1 de [6]. Dans ces trois cas, donnons simplement quelques indications.

Le résultat est immédiat pour l'élément fini rationnel de Serendip de degré 1 où $\|w\|_{0,\infty,K} = 1$ (cf. également [9]).

Élément fini rationnel de Serendip de degré 2

A partir des expressions (2.3.3) des fonctions de base, en utilisant la proposition 4.2.4 et l'hypothèse (4.1.6) on obtient pour tout $i \in I$

$$(4.4.2) \quad \|w_i\|_{0,\infty,K} \leq \frac{2\sigma(2+\nu_1)}{\nu_1} .$$

De même, utilisant les propositions 2.2.1, 2.2.3 et 4.2.1, après avoir utilisé le théorème des accroissements finis et la proposition 4.2.2. on montre que pour tout $i \in I$

$$(4.4.3) \quad \left| \quad \right. \quad \left\| w_{i-1,i} \right\|_{0,\infty,K} \leq \frac{64\sigma^2(2+v_1)^2(1+v_1)^4(1+2v_1)^2}{v_1^8} \quad .$$

Le résultat se déduit des relations (4.4.2) et (4.4.3).

Elément fini rationnel de Serendip de degré 3

A partir des relations 2.4.1, en utilisant le passage à \hat{K} et en tenant compte des propositions 2.2.1, 4.2.1, du théorème des accroissements finis et de la propositions 4.2.2, on obtient le résultat pour les fonctions de base relatives aux sommets de K .

Le cas des fonctions de base relatives aux noeuds intermédiaires se traite par un raisonnement analogue. Pour $w_{2,2,3}$ par exemple on a les majorations

$$\|w_{2,2,3}\|_{0,\infty,K} \leq \left(1 + \frac{1}{v_1}\right)^3 \frac{2}{\delta(\hat{a}_{223}^K, \hat{a}_2) \delta(\hat{a}_{223}^K, \hat{a}_3) \delta(\hat{a}_{223}^K, \hat{a}_{332})}$$

et l'on déduit le résultat, en appliquant le théorème des accroissements finis et en tenant compte de la proposition 4.2.2.

Elément fini rationnel de Serendip de degré 4

- Fonctions de base w_i

Considérons par exemple la fonction de base w_2 . D'après les relations (2.5.2), les propositions 2.2.1 et 4.2.1, on a

$$(4.4.5) \quad \left| \quad \right. \quad \forall x \in K \quad |w_2(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{v_1}\right)^4 |\hat{w}_2^K(\hat{x})| \quad ,$$

où \hat{w}_2^K dépend de K (cf. §.2.5.2) et où $\hat{x} = F_K^{-1}(x)$.

Compte tenu de (2.5.1) il vient

$$\sup_{\hat{x} \in \hat{K}} |\hat{w}_2^K(\hat{x})| \leq \frac{1}{\hat{\gamma}_2^K(\hat{a}_2)} \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} |\hat{\gamma}_2^K(\hat{x})|.$$

Utilisant alors une méthode analogue à celle permettant de démontrer la proposition 5.1 de [6] on désigne par \hat{K} le carré $[0,2] \times [0,2]$ et par τ la translation telle que $\hat{K} = \tau(\tilde{K})$.

Posant alors $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tau^{-1}(\hat{x})$ et

$$(\alpha, 0) = \tau^{-1}(\hat{a}_{223}^K), (\beta, 0) = \tau^{-1}(\hat{a}_{23}^K), (\gamma, 0) = \tau^{-1}(\hat{a}_{332}^K)$$

$$(0, \delta) = \tau^{-1}(\hat{a}_{221}^K), (0, \varepsilon) = \tau^{-1}(\hat{a}_{12}^K), (0, \phi) = \tau^{-1}(\hat{a}_{112}^K).$$

On vérifie que l'on peut alors définir $\hat{\gamma}_2^K$ par :

$$(4.4.6) \quad \left. \begin{aligned} (\hat{\gamma}_2^K \circ \tau)(\tilde{x}) &= \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \frac{\tilde{x}_3}{x_1} + \frac{1}{\delta\varepsilon\phi} \frac{\tilde{x}_3}{x_2} - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma} \frac{\tilde{x}_2}{x_1} - \frac{\varepsilon+\delta+\phi}{\varepsilon\delta} \frac{\tilde{x}_2}{x_2} \\ &- \left[1 - \frac{(\varepsilon-1)(\delta-1)(\phi-1)}{\varepsilon\delta\phi} - \frac{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)}{\alpha\beta\gamma} \right] \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \frac{\tilde{x}_1}{x_1} \\ &+ \frac{\varepsilon\delta+\delta\phi+\phi\varepsilon}{\varepsilon\delta\phi} \frac{\tilde{x}_2}{x_2} - 1, \end{aligned} \right\}$$

et donc que

$$\sup_{\hat{x} \in \hat{K}} |\hat{w}_2^K(\hat{x})| \leq \sup_{\tilde{x} \in \tilde{K}} |(\hat{\gamma}_2^K \circ \tau)(\tilde{x})|.$$

Pour majorer $\hat{\gamma}_2^K$ sur \hat{K} , compte tenu de (4.4.6) et du fait que $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|, |\delta|, |\varepsilon|, |\phi|$ sont majorés par 2, il suffit de montrer que ces quantités sont minorées indépendamment de K . Or, on déduit du théorème des accroissements finis que

$$\delta(a_{223}, a_2) \leq \delta(\hat{a}_{223}^K, \hat{a}_2) \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \|DF_K(\hat{x})\| ,$$

soit encore, compte tenu de (2.5.3)

$$(4.4.7) \quad \left| \alpha \right| = \delta(\hat{a}_{223}^K, \hat{a}_2) \geq \frac{1}{4} \frac{\delta(a_3, a_2)}{\sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \|DF_K(\hat{x})\|} .$$

Utilisant alors les propositions 4.2.2 et 4.2.4 on obtient

$$(4.4.8) \quad \left| \alpha \right| \geq \frac{1}{4} \left(\frac{\nu_1}{2+\nu_1} \rho_K \right) \frac{1}{C h_K} \geq \frac{\nu_1}{4(2+\nu_1)\sigma C}$$

où C est une constante indépendante de K . On a donc le résultat pour $|\alpha|$: on aurait des minoration analogues pour $|\beta|, |\gamma|, |\delta|, |\varepsilon|$ et $|\phi|$. Par suite on vérifie bien (4.4.1) pour w_2 , il en serait de même pour w_1, w_3 et w_4 .

- Fonctions de base $w_{i,i,i+1}, w_{i,i+1}$ et $w_{i+1,i+1,i}$

Il suffit de faire la démonstration pour l'une de ces fonctions de base (le résultat s'étendant sans difficulté aux autres fonctions). Soit la fonction de base $w_{2,2,3}$ par exemple. On a

$$\forall x \in K \quad |w_{2,2,3}(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{v_1}\right)^4 |\hat{w}_{2,2,3}^K(\hat{x})|$$

avec

$$\sup_{\hat{x} \in K} |\hat{w}_{2,2,3}^K(\hat{x})| \leq \frac{1}{\delta(\hat{a}_{2,2,3}^K, \hat{a}_2) \delta(\hat{a}_{2,2,3}^K, \hat{a}_3)} \frac{\sup_{\hat{x} \in K} |\hat{p}_{2,2,3}^K(\hat{x})|}{|\hat{p}_{2,2,3}^K(\hat{a}_{2,2,3}^K)|}$$

où $\delta(\hat{a}_{2,2,3}^K, \hat{a}_2)$ et $\delta(\hat{a}_{2,2,3}^K, \hat{a}_3)$ sont minorés par des quantités ne dépendant que de v_1 et σ (cf. relations (4.4.7) et (4.4.8)).

De même on a

$$\frac{1}{|\hat{p}_{2,2,3}^K(\hat{a}_{2,2,3}^K)|} \sup_{\hat{x} \in K} |\hat{p}_{2,2,3}^K(\hat{x})| \leq C'(v_1, \sigma),$$

car on peut écrire, en reprenant les notations de la démonstration précédente pour la fonction de base w_2 , que

$$(\hat{p}_{2,2,3}^K \circ \tau)(x) = \frac{1}{\beta\gamma} \tilde{x}_1^2 - \frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma} \tilde{x}_1 + \left(\frac{\beta+\gamma-1}{\beta\gamma} - 1\right) \tilde{x}_2 + 1,$$

et que

$$|\hat{p}_{2,2,3}^K(\hat{a}_{2,2,3}^K)| = \frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{\beta\gamma} = \frac{1}{\beta\gamma} \delta(\hat{a}_{2,2,3}^K, \hat{a}_{2,3}^K) \delta(\hat{a}_{2,2,3}^K, \hat{a}_{3,3,2}^K).$$

Utilisant ici également la proposition 4.2.4 après avoir utilisé le théorème des accroissements finis pour $\delta(a_{2,2,3}, a_{2,3})$ et $\delta(a_{2,2,3}, a_{3,3,2})$, on obtient finalement des majorations de $|w_{2,2,3}(x)|$ sur K ne dépendant que de σ et v_1 , d'où le résultat.

- Fonction de base w_{b_3}

On a immédiatement

$$\forall x \in K \quad |w_{b_3}(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{v_1}\right)^4 |\hat{w}_0^K(\hat{x})| \leq \left(1 + \frac{1}{v_1}\right)^4,$$

ce qui termine la démonstration dans ce cas.

Élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 sur un quadrilatère

- Fonction de base w_i^0

On a, d'après les relations (2.6.4), pour tout $i \in I$

$$\|w_i^0\|_{0,\infty,K} \leq \sup_{x \in K} \left| \frac{l(a_i)}{l_{i+2}(a_i)l_{i+3}(a_i)\gamma_i(a_i)} \frac{l_{i+2}(x)l_{i+3}(x)l_i(x)}{l(x)} \right|.$$

Compte tenu des résultats obtenus pour les fonctions de base de l'élément fini de Serendip de degré 1, soit

$$\sup_{x \in K} \left| \frac{l(a_i)}{l_{i+2}(a_i)l_{i+3}(a_i)} \frac{l_{i+2}(x)l_{i+3}(x)}{l(x)} \right| = 1,$$

on a

$$(4.4.9) \quad \left\| w_i^0 \right\|_{0,\infty,K} \leq \sup_{x \in K} \left| \frac{\gamma_i(x)}{\gamma_i(a_i)} \right|.$$

D'après les propositions 2.2.1 et 4.2.1 on obtient

$$(4.4.10) \quad \left\| \sup_{x \in K} \left| \frac{\gamma_i(x)}{\gamma_i(a_i)} \right| \leq \left(1 + \frac{1}{v_1}\right)^2 \sup_{x \in \hat{K}} \left| \frac{\hat{\gamma}_i(\hat{x})}{\hat{\gamma}_i(\hat{a}_i)} \right| \right\|.$$

Considérons alors par exemple la fonction de base correspondant au point a_2 (les résultats sont analogues pour les autres sommets). Si l'on désigne par τ la translation introduite dans la démonstration précédente ($\hat{K} = \tau(\tilde{K})$) il vient, $\hat{\gamma}_2$ étant définie par les relations (2.6.3) et compte tenu que $\hat{a}_2 = \tau(\tilde{0}, \tilde{0})$,

$$(4.4.11) \quad \left| \frac{(\hat{\gamma}_2 \circ \tau)(\tilde{x})}{(\hat{\gamma}_2 \circ \tau)(\tilde{a}_2)} = \tilde{\alpha} \tilde{x}_1^2 + \tilde{\beta} \tilde{x}_2^2 + \tilde{\gamma} \tilde{x}_1 + \tilde{\varepsilon} \tilde{x}_2 + 1 \right.,$$

où $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\varepsilon}$ s'expriment en fonction de $\alpha_2, \beta_2, \delta_2$ et ε_2 donnés dans les relations (2.6.3).

D'après (4.4.9) et (4.4.10) on a

$$\|w_2^0\|_{0, \infty, K} \leq \left(1 + \frac{1}{v_1}\right)^2 \sup_{\tilde{x} \in \tilde{K}} |\tilde{\alpha} \tilde{x}_1^2 + \tilde{\beta} \tilde{x}_2^2 + \tilde{\gamma} \tilde{x}_1 + \tilde{\varepsilon} \tilde{x}_2 + 1|.$$

Utilisant les relations (2.6.3) définissant $\hat{\gamma}_2$, il est possible de calculer les constantes $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\varepsilon}$ données dans (4.4.11), en fonction des coordonnées barycentriques $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 de a_4 par rapport aux sommets du triangle $b_1 b_2 b_3$ (cf. relations (2.2.5)). Il vient

$$\tilde{\alpha} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)}, \quad \tilde{\beta} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)},$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{2} + 3 \frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2} + 3 \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)},$$

avec

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = s(\hat{a}_2) \geq 1.$$

Ainsi pour majorer $|\hat{\alpha}|, |\hat{\beta}|, |\hat{\delta}|$ et $|\hat{\epsilon}|$, il suffit de majorer $|\xi_1|$ et $|\xi_2|$. Or par définition

$$|\xi_1| = \frac{\delta(a_4, [b_2, b_3])}{\delta(b_1, [b_2, b_3])}, \quad |\xi_2| = \frac{\delta(a_4, [b_1, b_3])}{\delta(b_2, [b_1, b_3])},$$

où $[b_2, b_3]$ (respectivement $[b_1, b_3]$) désigne la droite passant par les points b_2 et b_3 (respectivement b_1 et b_3). D'autre part, si ℓ'_{13} (resp. ℓ'_{23}) est un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $\ell'_{13}(x) = 0$ (resp. $\ell'_{23}(x) = 0$) soit une équation de la droite $[b_1, b_3]$ (resp. de la droite $[b_2, b_3]$), on a

$$|\xi_1| \leq \left| \frac{\ell'_{23}(a_4)}{\ell'_{23}(b_1)} \right| \leq \left| \frac{\ell'_{23}(a_4)}{\ell'_{23}(a_1)} \right| = \left| \frac{\hat{\ell}'_{23}(\hat{a}_4)}{\hat{\ell}'_{23}(\hat{a}_1)} \frac{s(\hat{a}_1)}{s(\hat{a}_4)} \right|$$

$$|\xi_2| \leq \left| \frac{\ell'_{13}(a_4)}{\ell'_{13}(b_2)} \right| \leq \left| \frac{\ell'_{13}(a_4)}{\ell'_{13}(a_3)} \right| = \left| \frac{\hat{\ell}'_{13}(\hat{a}_4)}{\hat{\ell}'_{13}(\hat{a}_3)} \frac{s(\hat{a}_3)}{s(\hat{a}_4)} \right|$$

où $\ell'_{13} \text{of}_K = \frac{\hat{\ell}'_{13}}{s}$ et $\ell'_{23} \text{of}_K = \frac{\hat{\ell}'_{23}}{s}$ sur \hat{K} .

Comme

$$\hat{\ell}'_{23}(\hat{a}_4) = \hat{\ell}'_{23}(\hat{a}_1) \quad \text{et} \quad \hat{\ell}'_{13}(\hat{a}_4) = \hat{\ell}'_{13}(\hat{a}_3)$$

il vient d'après la proposition 4.2.1 :

$$(4.4.12) \quad \left| \begin{array}{l} |\xi_1| \leq 1 + \frac{1}{v_1} \quad \text{et} \quad |\xi_2| \leq 1 + \frac{1}{v_1} \end{array} \right. .$$

Ainsi $|\hat{\alpha}|, |\hat{\beta}|, |\hat{\delta}|$ et $|\hat{\epsilon}|$ sont majorés par des constantes

indépendantes de K d'où la relation (4.4.1) pour w_2^0 . On a un résultat analogue pour w_1^0 , w_3^0 et w_4^0 .

- Fonctions de base $w_{i,i+1}^1$ et $w_{i-1,i}^1$

On fait la démonstration pour l'une de ces fonctions de base, les résultats étant analogues pour les autres.

Par définition de $w_{i,i+1}^1$ (cf. (2.6.4)) on a

$$(4.4.12) \quad \left| \forall x \in K \quad |w_{i,i+1}^1(x)| = \left| \frac{\ell(a_i)}{\ell_{i+2}^2(a_i)\ell_{i+3}(a_i)\ell_i(a_{i+1})} \frac{\ell_{i+2}^2(x)\ell_{i+3}(x)\ell_i(x)}{\ell(x)} \right|.$$

Compte tenu des majorations obtenues pour les fonctions de base de l'élément fini de Serendip de degré 1 on a

$$(4.4.13) \quad \left\| w_{i,i+1}^1 \right\|_{0,\infty,K} \leq \sup_{x \in K} \left| \frac{\ell_{i+2}(x)\ell_i(x)}{\ell_{i+2}(a_i)\ell_i(a_{i+1})} \right|.$$

Utilisant alors les propriétés de F_K , en particulier la proposition 2.2.3 on a

$$(4.4.14) \quad \left| \frac{\ell_{i+2}(x)\ell_i(x)}{\ell_{i+2}(a_i)\ell_i(a_{i+1})} = \frac{\hat{\ell}_{i+2}(\hat{x})\hat{\ell}_i(\hat{x})}{\hat{\ell}_{i+2}(\hat{a}_i)\hat{\ell}_i(\hat{a}_{i+1})} \frac{s(\hat{a}_i)s(\hat{a}_{i+1})}{(s(\hat{x}))^2} \right|$$

A partir des relations (4.4.13) et (4.4.14), compte tenu des propositions 2.2.1, 4.2.1 et de la géométrie de \hat{K} , on obtient

$$\left\| w_{i,i+1}^1 \right\|_{0,\infty,\hat{K}} \leq \left(1 + \frac{1}{v_1}\right)^2,$$

ce qui termine la démonstration. \square

On obtient alors le

Théorème 4.4.1

Soit \mathcal{F} une famille régulière (donc vérifiant l'hypothèse (4.1.6)) d'éléments finis rationnels de même type dont l'élément fini générique (K, P_K, Σ_K) est suivant les cas l'élément fini rationnel de Serendip de degré $k = 1, 2, 3$ ou 4 , ou l'élément fini rationnel d'Hermite de degré $k = 3$ sur un quadrilatère. On suppose de plus que \mathcal{F} vérifie l'hypothèse (4.2.2). Soit Π_K l'opérateur de P_K interpolation relativement à Σ_K .

Alors pour tout $m = 0, 1, 2, \dots, k$ il existe une constante C indépendante de K telle que, pour tout $v \in W^{k+1, p}(K)$, avec $k+1 > \frac{2}{p}$ dans le cas des éléments finis rationnels de Serendip et avec $k > \frac{2}{p}$ dans le cas de l'élément fini rationnel d'Hermite, on ait pour tout $K \in \mathcal{F}$

$$(4.4.15) \quad \left| [v - \Pi_K v]_{m, p, K} \leq C [v]_{k+1, p, K} h_K^{k+1-m} \right.$$

Démonstration

On est dans les conditions d'application du théorème 1.2.1 avec $\bar{\Omega} = K$, d'où l'on déduit, quelle que soit la nature de l'élément fini générique de \mathcal{F} (élément fini rationnel de Serendip de degré 1, 2, 3 ou 4 ou élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 sur un quadrilatère), qu'il existe une constante C indépendante de K telle que

$$(4.4.16) \quad \left| [v - \Pi_K v]_{m, p, K} \leq C \left(\sum_{w \in \mathcal{B}} [w]_{m, \infty, K} \right) [u]_{k+1, p, K} h^{k+1} \right.$$

où \mathcal{B} est l'ensemble des fonctions de base w de l'élément fini considéré.

Alors, étant donné les hypothèses sur \mathcal{F} , d'après la proposition 4.1.1 on a, dans tous les cas considérés ici

$$(4.4.17) \quad \left\| w \right\|_{m, \infty, K} \leq \frac{C(m, r, \nu, 1)}{\rho_K^m} \|w\|_{0, \infty, K},$$

où les constantes $C(m, r, \nu, 1)$ sont définies par (4.1.1) (on peut remarquer que d'après la proposition 4.2.3 les hypothèses (4.2.1) et (4.2.2) sont ici équivalentes et que l'on peut donc définir ν en fonction de ν_1).

Le résultat se déduit alors immédiatement des relations (4.4.16), (4.4.17), de l'hypothèse (4.1.6) vérifiée par \mathcal{F} et de la proposition 4.4.1. \square

Remarque 4.4.1

Les relations (4.4.15) montrent que les majorations de l'erreur d'interpolation obtenues sont uniformes au sens de la définition 4.1.1.

D'autre part ces mêmes relations (4.4.15) montrent que l'ordre asymptotique des majorations de l'erreur de P_K -interpolation en semi-norme $[\cdot]_{m, p, K}$ est $k+1-m$, c'est-à-dire identique à celui que l'on obtient avec des éléments finis droits polynomiaux de même degré. \square

4.4.2 CAS DES ELEMENTS FINIS RATIONNELS PENTAGONAUX OU
HEXAGONAUX DE WACHSPRESS

Dans tout ce paragraphe K est un pentagone ou un hexagone défini comme au §.3.1.

On a alors la

Proposition 4.4.2

Soit \mathcal{F} une famille régulière (cf.(4.1.6)) d'éléments finis rationnels de même type dont l'élément fini générique (K,P,Σ) est suivant les cas l'élément fini pentagonal de Wachspress de degré 1 ou 2 , l'élément fini hexagonal de Wachspress de degré 1 ou 2 , l'élément fini rationnel de degré 3 sur un hexagone régulier ou l'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 sur un hexagone régulier. On suppose de plus que \mathcal{F} vérifie les hypothèses (4.2.1) et (4.2.3).

Alors pour toute fonction de base w d'un élément fini pentagonal ou hexagonal de Wachspress de degré 1 ou 2 , ou d'un élément fini rationnel de Lagrange ou d'Hermite de degré 3 sur un hexagone régulier, il existe une constante $C_w(\nu, \sigma, \nu_2, \nu_3)$, indépendante de K telle que

$$(4.4.18) \quad \left| \quad \|w\|_{0,\infty,K} \leq C_w(\nu, \sigma, \nu_2, \nu_3) \right.$$

Démonstration (cf. GOUT [50],[51])

Cas des éléments finis pentagonaux ou hexagonaux de Wachspress de degré 1

On a immédiatement dans ce cas, pour tout $i \in I = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ($N = 5$ ou 6) suivant les cas :

$$(4.4.19) \quad \left| \begin{array}{l} \|w_i\|_{0,\infty,K} = 1 \end{array} \right. ,$$

qui résulte du fait que $w_i \geq 0$ sur K et que, puisque

$$P \supset P_1(K) ,$$

$$\text{on a } \sum_{i=1}^N w_i(x) = 1 .$$

Cas des éléments finis pentagonaux de Wachspress de degré 2

- A partir des relations (3.2.3) on montre, pour tout $i \in I$, que

$$\forall x \in K \quad |w_i(x)| = \left| \left(\frac{q}{\ell_{i+2}\ell_{i+3}\ell_{i+4}\ell'_i} \right)(a_i) \right| \left| \left(\frac{\ell_{i+2}\ell_{i+3}\ell_{i+4}\ell'_i}{q} \right)(x) \right| .$$

Il résulte alors de (3.2.1) et (4.4.19) que

$$\forall x \in K \quad |w_i(x)| = \left| \frac{\ell'_i(x)}{\ell'_i(a_i)} \right| = \frac{\delta(x, d'_i)}{\delta(a_i, d'_i)} \leq \frac{h_K}{\delta(a_i, d'_i)} .$$

Or (cf. notations du §.3.1)

$$\delta(a_i, d'_i) = \frac{1}{2} \delta(a_i, d_{i-1, i+1}) .$$

Comme, de plus, \mathcal{F} vérifie (4.2.3), il vient

$$\delta(a_i, d'_i) \geq \frac{1}{2} v_2 h_K ,$$

et par suite, pour tout $i \in I$

$$(4.4.20) \quad \left| w_i \right|_{0, \infty, K} \leq \frac{2}{v_2}$$

- Toujours à partir des relations (3.2.3) on obtient, pour tout $i \in I$

$$\forall x \in K \quad |w_{i,i+1}(x)| = \left| \left(\frac{q}{\ell_{i+2} \ell_{i+3} \ell_{i+4} \ell_i} \right) (a_{i,i+1}) \left(\frac{\ell_{i+2} \ell_{i+3} \ell_{i+4} \ell_i}{q} \right) (x) \right|.$$

De plus, pour tout $j \in I$, $j \neq i+1$, on a

$$\left| \frac{\ell_j(x)}{\ell_j(a_{i,i+1})} \right| = \frac{\delta(x, d_j)}{\delta(a_{i,i+1}, d_j)} \leq \frac{h_K}{\delta(a_{i,i+1}, d_j)}.$$

Utilisant la proposition 4.2.6 on a

$$\delta(a_{i,i+1}, d_j) \geq \frac{v_3 h_K}{2}.$$

On déduit alors de ce qui précède et compte tenu de l'hypothèse (4.2.1) que

$$(4.4.21) \quad \left| w_{i,i+1} \right|_{0, \infty, K} \leq v \frac{h_K^4}{\left(\frac{v_3 h_K}{2} \right)^4} = \frac{16v}{v_3^4}.$$

Cas des éléments finis hexagonaux de Wachspress de degré 2

- On déduit des relations (3.3.4), (3.3.1) et (4.4.19) que, pour tout $i \in I$

$$\forall x \in K \quad |w_i(x)| = \left| \frac{\ell'_i(x)}{\ell'_i(a_i)} \right| = \frac{\delta(x, d'_i)}{\delta(a_i, d'_i)} \leq \frac{h_K}{\delta(a_i, d'_i)}.$$

Par un raisonnement analogue à celui utilisé dans le cas du pentagone, on

montre que, pour tout $i \in I$

$$(4.4.22) \quad \left| w_i \right|_{0, \infty, K} \leq \frac{2}{\sqrt{2}} \quad .$$

- De même, toujours d'après les relations (3.3.4), en utilisant l'hypothèse (4.2.1) et la proposition 4.2.6 on a pour tout $i \in I$

$$(4.4.23) \quad \left| w_{i, i+1} \right|_{0, \infty, K} \leq \frac{32v}{\sqrt{3}} \quad .$$

Cas des éléments finis rationnels de Lagrange de degré 3 sur un hexagone régulier

- Considérons d'abord les fonctions de base w_i , $i \in I$, correspondantes aux sommets de l'hexagone. On déduit des relations (3.4.3) et des expressions des fonctions de base des éléments finis hexagonaux de Wachspress de degré 1, compte tenu des relations (4.4.19), que

$$\forall x \in K \quad |w_i(x)| \leq \left| \frac{\gamma(x)}{\gamma(a_i)} \right| \quad .$$

D'après (3.4.2) on a immédiatement, pour tout $i \in I$,

$$(4.4.24) \quad \left| w_i \right|_{0, \infty, K} \leq \frac{7}{2} \quad .$$

- Considérons maintenant une fonction de base correspondant à un point $a_{i, i, i+1}$ soit par exemple la fonction de base w_{112} (on obtiendrait des majorations analogues pour les autres fonctions de base en utilisant les symétries ou en effectuant des permutations circulaires).

Des relations (3.4.3) et de la remarque 4.2.3 on déduit, pour tout $x \in K$

$$|w_{112}(x)| \leq \frac{3}{2} \left| \frac{(l_3 l_4 l_5 l_6 l_1 l_{2,4})(x)}{(l_3 l_4 l_5 l_5 l_1 l_{2,4})(a_{112})} \right|$$

Comme, pour tout $j \neq 2$,

$$\left| \frac{l_j(x)}{l_j(a_{112})} \right| \leq \sup_{x \in K} \frac{\delta(x, d_j)}{\delta(a_{112}, d_j)} \leq \frac{h_K}{\delta(a_{112}, d_j)},$$

et que de même

$$\left| \frac{l_{2,4}(x)}{l_{2,4}(a_{112})} \right| \leq \frac{h_K}{\delta(a_{112}, d_{2,4})} = \frac{h_K}{\frac{2}{3} \delta(a_1, d_{2,4})},$$

on obtient d'après l'hypothèse (4.2.3) et la proposition 4.2.6

$$(4.4.25) \quad \left| |w_{112}|_{0, \infty, K} \right| \leq \frac{27^2}{40 \nu_2 \nu_3^5}.$$

Cas des éléments finis rationnels d'Hermite de degré 3 sur un hexagone régulier

- A partir des relations (3.5.2) on montre, comme dans le cas précédent que

$$\forall x \in K \quad |w_i^0(x)| \leq \left| \frac{\gamma_i(x)}{\gamma_i(a_i)} \right|.$$

D'après (3.5.1) on a donc immédiatement, pour tout $i \in I$

$$(4.4.26) \quad \left| |w_i^0|_{0, \infty, K} \right| \leq 3.$$

On considère maintenant une fonction de base $w_{i,i+1}^1$, soit par exemple $w_{1,2}^1$ (on obtiendrait des résultats analogues pour les autres fonctions de base $w_{i,i+1}^1$, $i \in I$, $i \neq 1$, ainsi que pour les fonctions de base $w_{i,i-1}^1$).

D'après la remarque 4.2.3 et compte tenu des relations (3.5.2)

on a

$$|w_{1,2}^1(x)| \leq \frac{3}{2} \left| \frac{l_1(x)}{l_1(a_2)} \right| \left| \frac{(l_3 l_4 l_5 l_6 l_{2,4})(x)}{(l_3 l_4 l_5 l_6 l_{2,4})(a_1)} \right|$$

Il suffit alors d'utiliser l'hypothèse (4.2.3) et la proposition 4.2.6 pour obtenir le résultat suivant, valable pour tout $i \in I$,

$$(4.4.27) \quad \left| \begin{array}{l} |w_{i,i+1}^1|_{0,\infty,K} \leq \frac{3}{2} \frac{1}{v_2 v_3^5} , \\ |w_{i,i-1}^1|_{0,\infty,K} \leq \frac{3}{2} \frac{1}{v_2 v_3^5} . \end{array} \right.$$

Alors les relations (4.4.18) se déduisent des relations (4.4.19), (4.4.20), (4.4.21), (4.4.22), (4.4.23), (4.4.24), (4.4.25), (4.4.26) et (4.4.27). \square

Remarque 4.4.2

Lorsque les éléments finis étudiés sont construits sur des hexagones réguliers, les familles correspondantes \mathcal{F} sont affines et de ce fait les majorations des fonctions de base s'obtiennent simplement.

Notons que dans ce cas les hypothèses (4.1.6), (4.2.1), (4.2.2) et (4.2.3) sont évidemment vérifiées. En particulier

$$\frac{h_K}{\rho_K} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \frac{|q|_{0,\infty,K}}{\inf_{x \in K} |q(x)|} = \frac{3}{2},$$

(cf. remarque 4.2.3) et, d'autre part,

$$v_2 = \frac{1}{4}, \quad v_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad \square$$

Il vient alors le

Théorème 4.4.2

Soit \mathcal{F} une famille régulière (vérifiant donc l'hypothèse (4.1.6)) d'éléments finis rationnels de même type dont l'élément fini générique (K, P_K, Σ_K) est suivant les cas l'élément fini pentagonal ou hexagonal de Wachspress de degré $k = 1$ ou 2 ou l'élément fini rationnel de Lagrange ou d'Hermite de degré $k = 3$ sur un hexagone régulier.

On suppose de plus que \mathcal{F} vérifie les hypothèses (4.2.1) et (4.2.3).

Alors pour tout $m = 0, 1, \dots, k$ il existe une constante C indépendante de K , telle que, pour tout $v \in W^{k+1, p}(K)$ avec $k > \frac{2}{p}$ si \mathcal{F} est une famille d'éléments finis rationnels d'Hermite de degré 3 sur un hexagone régulier et $k + 1 > \frac{2}{p}$ dans tous les autres cas, on ait, pour tout $K \in \mathcal{F}$

$$(4.4.21) \quad \left| [v - \Pi_K v]_{m,p,K} \leq C [v]_{k+1,p,K} h_K^{k+1-m}, \right.$$

où Π_K est l'opérateur de P_K -interpolation relativement à Σ_K .

Démonstration

Etant donné les hypothèses vérifiées par \mathcal{F} , on peut appliquer le théorème 1.2.1 avec $\bar{\Omega} = K$. On en déduit donc, que dans tous les cas envisagés, il existe une constante C indépendante de K telle que

$$(4.4.22) \quad \left| \quad [v - \Pi_K v]_{m,p,K} \leq C \left(\sum_{w \in \mathcal{B}} [w]_{m,\infty,K} \right) [v]_{k+1,p,K} h_K^{k+1} \right.,$$

où \mathcal{B} est l'ensemble des fonctions de base de l'élément fini (K, P_K, Σ_K) générique de la famille \mathcal{F} .

Or, d'après la proposition 4.1.1, on a, pour toute fonction de base w des éléments finis considérés ici

$$(4.4.23) \quad \left| \quad [w]_{m,\infty,K} \leq \frac{C(m,r,v,j)}{\rho_K^m} \|w\|_{0,\infty,K} \right.,$$

où les constantes $C(m,r,v,j)$ sont définies par (4.1.2) avec $j = 2$ si K est un pentagone ou un hexagone régulier et $j = 3$ si K est un hexagone quelconque).

Les relations (4.4.21) se déduisent alors des relations (4.4.22), (4.4.23), de l'hypothèse (4.1.6) et de la proposition 4.4.2. \square

Remarque 4.4.3

Comme dans la remarque 4.3.1 on peut signaler que les majorations de l'erreur d'interpolation données dans (4.4.21) sont uniformes au sens de la définition 4.1.1.

De plus, ces relations montrent que l'ordre asymptotique des majorations de l'erreur de P-interpolation obtenues en semi-norme

$$[\cdot]_{m,P,K} \text{ est } \underline{k+1-m} . \quad \square$$

Remarque 4.4.4

Dans le cas où \mathcal{F} est une famille d'éléments finis rationnels de même type dont l'élément fini générique (K,P,Σ) est suivant les cas l'élément fini rationnel de Wachspress de degré $k = 1, 2$ ou 3 ou l'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 , construits sur un hexagone régulier, on peut expliciter la constante C dans les relations (4.4.21) obtenues par application des théorèmes 1.3.1 et 1.3.2.

Comme tout élément K de \mathcal{F} se déduit de l'hexagone régulier de référence \hat{K} de sommets $\hat{a}_1 = (\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4})$, $\hat{a}_2 = (0, \frac{1}{2})$, $\hat{a}_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4})$, $\hat{a}_4 = (-\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4})$, $\hat{a}_5 = (0, -\frac{1}{2})$, $\hat{a}_6 = (\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4})$, par une similitude de rapport h_K , on a pour toute fonction de base w des éléments finis utilisés

$$(4.4.24) \quad \left| \quad [w]_{m,K} = \frac{(\text{mes } K)^{1/2}}{(\text{mes } \hat{K})^{1/2}} \frac{[w_{\mathcal{F}_K}]_{m,\hat{K}}}{h_K^m} . \right.$$

Alors à partir des relations (1.1.5) et (1.1.9), compte tenu des relations (4.4.24) :

- si \mathcal{F} est une famille d'éléments finis de même type d'élément fini générique l'élément fini rationnel de Wachspress de degré $k = 1, 2$ ou 3 (de type Lagrange), pour $u \in H^{k+1}(K)$ et pour m , $0 \leq m \leq k-1$, on peut prendre

$$c = \frac{1}{(k-m)!} \frac{1}{2\sqrt{(k+1-m)(k-m)}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}^4 \sqrt{3}} \frac{1}{k!} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \left(\sum_{i=1}^{N_0} [w_i^{0 \circ F_K}]_{m, \hat{K}} \right)$$

pour $m = k$, on peut prendre

$$c = \frac{\sqrt{2}}{k!} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}^4 \sqrt{3}} \frac{1}{k!} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \left(\sum_{i=1}^{N_0} [w_i^{0 \circ F_K}]_{k, \hat{K}} \right),$$

- Si \mathcal{F} est une famille d'éléments finis rationnels d'Hermite de degré 3, pour $u \in H^4(K)$ et pour m , $0 \leq m \leq 2$ on peut prendre

$$c = \frac{1}{(3-m)!} \frac{1}{2\sqrt{(4-m)(3-m)}} + \frac{\sqrt{2}}{36^4 \sqrt{3}} \left(\sum_{i=1}^6 [w_i^{0 \circ F_K}]_{m, \hat{K}} \right) \\ + \frac{1}{6^4 \sqrt{3}} \sum_{i \in I} ([w_{i, i+1}^1 \circ F_K]_{m, \hat{K}} + [w_{i, i-1}^1 \circ F_K]_{m, \hat{K}}),$$

pour $m = 3$, on peut prendre

$$c = \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{36^4 \sqrt{3}} \left(\sum_{i=1}^6 [w_i^{0 \circ F_K}]_{3, \hat{K}} \right) \\ + \frac{1}{6^4 \sqrt{3}} \sum_{i \in I} ([w_{i, i+1}^1 \circ F_K]_{3, \hat{K}} + [w_{i, i-1}^1 \circ F_K]_{3, \hat{K}}). \quad \square$$

4.4.3 Exemples numériques

On se limite aux cas des éléments finis rationnels de Wachspress construits sur des hexagones réguliers, et à l'application des théorèmes 1.3.1 et 1.3.2.

Après avoir calculé les semi normes $|w|_{m,K}$ par procédé informatique, utilisé les relations (4.4.25), on obtient successivement, compte tenu des relations (1.2.17), les majorations suivantes :

Elément fini de Wachspress de degré 1 sur un hexagone régulier

Par application du théorème 1.3.1 pour $m = 0$ et du théorème 1.3.2 pour $m = 1$, on a pour tout $u \in H^2(K)$

$$[u - \Pi_K u]_{0,K} \leq 0,88 [u]_{2,K} h_K^2$$

$$[u - \Pi_K u]_{1,K} \leq 3,73 [u]_{2,K} h_K$$

Elément fini de Wachspress de degré 2 sur un hexagone régulier

Par application du théorème 1.3.1 pour $m = 0,1$ et du théorème 1.3.2 pour $m = 2$, on a, pour tout $u \in H^3(K)$

$$[u - \Pi_K u]_{0,K} \leq 0,58 [u]_{3,K} h_K^3$$

$$[u - \Pi_K u]_{1,K} \leq 3,18 [u]_{3,K} h_K^2$$

$$[u - \Pi_K u]_{2,K} \leq 24 [u]_{3,K} h_K$$

Élément fini rationnel de Lagrange de degré 3 sur un hexagone régulier

Par application du théorème 1.3.1 pour $m = 0, 1, 2$ et du théorème 1.3.2

pour $m = 3$, on a, pour tout $u \in H^4(K)$

$$[u - \Pi_K u]_{0,K} \leq 0,23 [u]_{4,K} h_K^4$$

$$[u - \Pi_K u]_{1,K} \leq 1,82 [u]_{4,K} h_K^3$$

$$[u - \Pi_K u]_{2,K} \leq 37 [u]_{4,K} h_K^2$$

$$[u - \Pi_K u]_{3,K} \leq 442 [u]_{4,K} h_K$$

4.5 OPTIMALITE DE L'ORDRE ASYMPTOTIQUE DES MAJORATIONS DE
L'ERREUR D'INTERPOLATION

Dans ce paragraphe, généralisant le résultat obtenu dans ARCANGELI-GOUT-ROYER [9] (théorème 3.3) on montre que l'ordre asymptotique des majorations de l'erreur d'interpolation en semi-norme $[]_{m,p,K}$ (au sens de la définition 4.1.2) obtenu à partir des théorèmes 1.2.1, 1.3.1 et 1.3.2 est optimal.

Pour cela on considère des familles particulières d'éléments finis qui sont des "triangulations" convenables d'un ouvert polygonal de R^2 par des polygones. L'étude qui suit est développée dans R^2 mais reste valable dans le cas des éléments finis droits dans R^n , pour lesquels le résultat obtenu est d'ailleurs déjà connu (cf. par exemple GELINAS [43]).

Soient Ω un ouvert polygonal borné, d'intérieur non vide, de R^2 et \mathcal{H} un ensemble de réels strictement positifs. Soit $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ une famille régulière de triangulations de $\bar{\Omega}$ (cf. 0.3.6) au moyen de polygones convexes fermés à N côtés (N fixé = 3,4,5 ou 6 suivant les cas). On suppose de plus que la famille $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ satisfait aux conditions

- (4.5.1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une famille } (\tilde{\mathcal{T}}_h)_{h \in \mathcal{H}} \text{ et un nombre } \omega > 0 \text{ tels que} \\ \text{(i) } \forall h \in \mathcal{H} \quad , \quad \tilde{\mathcal{T}}_h \subset \mathcal{T}_h \\ \text{(ii) Pour tout } h \text{ fixé dans } \mathcal{H}, \text{ tous les éléments } K \text{ appartenant} \\ \text{à } \tilde{\mathcal{T}}_h \text{ sont égaux à une translation près.} \\ \text{(iii) il existe un polygone convexe fermé } \hat{K} \text{ à } N \text{ côtés, de} \\ \text{diamètre } 1 \text{ tel que} \end{array} \right.$

$$\forall h \in \mathcal{J}, \forall K \in \tilde{\mathcal{T}}_h, K = F_K(\hat{K})$$

où F_K est une homothétie de rapport h_K ,

$$(iv) \forall h \in \mathcal{J}, \text{mes} \left(\bigcup_{K \in \tilde{\mathcal{T}}_h} K \right) > \omega.$$

On a alors le

Théorème 4.5.1

Soient Ω un ouvert polygonal convexe de \mathbb{R}^2 , d'intérieur non vide, $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{J}}$ une famille de triangulations de $\bar{\Omega}$ vérifiant (4.5.1). Soit \mathcal{F} une famille d'éléments finis (K, P_K, Σ_K) de degré k et de même type, associée (cf. 0.3.7) à la triangulation $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{J}}$. On désigne par Π_K l'opérateur de P_K -interpolation relativement à Σ_K .

Alors il existe $\psi \in P_{k+1}(\mathbb{R}^2)$ et, pour tout $p \geq 1$, une constante $C(\psi, p, \omega, k)$ indépendante de h tels que

$$(4.5.2) \quad \forall h \in \mathcal{J}, \left(\sum_{K \in \tilde{\mathcal{T}}_h} |\psi - \Pi_K \psi|_{k+1, p, K}^p \right)^{1/p} \geq C(\psi, p, \omega, k) \omega^{1/p}.$$

Démonstration

Par hypothèse $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{J}}$ vérifie (4.5.1).

Notons $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ l'élément fini de même type que celui des éléments de \mathcal{F} , avec pour $K \in \tilde{\mathcal{T}}_h$,

$$P_K = \hat{P} \circ F_K^{-1}.$$

où F_K est mis pour $F_K|_{\hat{K}}$ avec F_K affine puisque F_K est une homothétie.

De plus l'élément fini $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ étant de degré k il existe $\psi \in P_{k+1}(\mathbb{R}^2)$, homogène de degré $k+1$, tel que

$$(4.5.3) \quad \left| \psi|_{\hat{K}} \notin \hat{P} \right.,$$

et pour tout $K \in \tilde{\mathcal{G}}_h$

$$(4.5.4) \quad \left| \psi \circ F_K^{-1} = \psi_k + \frac{1}{h_K^{k+1}} \psi \text{ sur } K \right.,$$

avec $\psi_k \in P_k(\mathbb{R}^2)$.

Notons maintenant

$$\psi|_K = \psi_K, \quad \psi|_{\hat{K}} = \hat{\psi}_K.$$

Il est clair, d'après (4.5.3) et (4.5.4), que

$$\psi_K \notin P_K.$$

Donc

$$\forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \tilde{\mathcal{G}}_h, \quad \psi_K \notin P_K.$$

Soit $\hat{\Pi}$ l'opérateur de \hat{P} -interpolation relativement à $\hat{\Sigma}$.

F_K étant affine, on a

$$(4.5.5) \quad \left| (\psi_K - \hat{\Pi}_K \psi_K) \circ F_K = \psi_K \circ F_K - \hat{\Pi}(\psi_K \circ F_K) \right.$$

Mais d'après (4.5.4)

$$(4.5.6) \quad \left| \psi_K \circ F_K = h_k^{k+1} \hat{\psi}_K + \hat{\psi}_K \right.$$

où $\hat{\psi}_K \in P_K(\hat{K})$.

Alors comme $\hat{P} \supset P_K(\hat{K})$, il vient d'après (4.5.5) et (4.5.6)

$$(4.5.7) \quad \left| (\psi_K^{-\Pi_K} \psi_K)_{\text{OF}_K} = h_K^{k+1} (\hat{\psi}_K - \hat{\Pi} \hat{\psi}_K) \right.$$

Alors, comme F_K est une homothétie de rapport h_K il vient

$$|(\psi_K^{-\Pi_K} \psi_K)_{\text{OF}_K}|_{k+1, p, K} = h_K^{k+1 - \frac{2}{p}} |\psi_K^{-\Pi_K} \psi_K|_{k+1, p, K}$$

d'où l'on déduit de (4.5.7)

$$|\psi_K^{-\Pi_K} \psi_K|_{k+1, p, K} = h_K^{2/p} |\psi_{\hat{K}}^{-\hat{\Pi}} \hat{\psi}_{\hat{K}}|_{k+1, p, \hat{K}},$$

où, pour tout $h \in \mathcal{J}$ et pour tout $K \in \mathcal{T}_h$

$$|\psi_{\hat{K}}^{-\hat{\Pi}} \hat{\psi}_{\hat{K}}|_{k+1, p, \hat{K}} \neq 0.$$

On en déduit qu'il existe $C(\psi, k)$ telle que pour tout $h \in \mathcal{J}$ et pour tout $K \in \tilde{\mathcal{T}}_h$:

$$(4.5.8) \quad \left| |\psi_K^{-\Pi_K} \psi_K|_{k+1, p, K} \geq C(\psi, k) (\text{mes } K)^{1/p} \right.$$

On obtient alors à partir de (4.5.8) et de l'hypothèse (4.5.1)

$$(4.5.9) \quad \left| \begin{aligned} & \forall h \in \mathcal{J}, \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\psi_K^{-\Pi_K} \psi_K|_{k+1, p, K}^p \right)^{1/p} \\ & \geq \left(\sum_{K \in \tilde{\mathcal{T}}_h} |\psi_K^{-\Pi_K} \psi_K|_{k+1, p, K}^p \right)^{1/p} \geq C(\psi, k) \left(\sum_{K \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \text{mes } K \right)^{1/p} \end{aligned} \right.$$

et d'après (4.5.1) (iv) il vient

$$\forall h \in \mathcal{H} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\psi - \Pi_K \psi|_{k+1, P, K}^P \right)^{1/P} \geq C(\psi, k) \omega^{1/P}$$

d'où les relations (4.5.2) avec

$$C(\psi, P, \omega, k) = C(\psi, k) \omega^{1/P} \quad \square$$

Remarque 4.5.1

Il existe des familles de triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ d'un polygone convexe fermé $\bar{\Omega}$ de \mathbb{R}^2 , du type défini dans (4.5.1).

Par exemple, on peut construire des triangulations \mathcal{T}_h telles que pour tout $h \in \mathcal{H}$

$$\tilde{\mathcal{T}}_h = \tilde{\mathcal{T}}_h \cup \mathcal{T}_h^*$$

avec

$$\tilde{\mathcal{T}}_h = \bigcup_{1 \leq j \leq J} \tilde{\mathcal{T}}_h^j,$$

où les éléments K de $\tilde{\mathcal{T}}_h$ sont égaux à un déplacement près et où, pour j , $1 \leq j \leq J$, $\tilde{\mathcal{T}}_h^j$ vérifie (4.5.1), les éléments de \mathcal{T}_h^* ne servant, si nécessaire, qu'à compléter la triangulation.

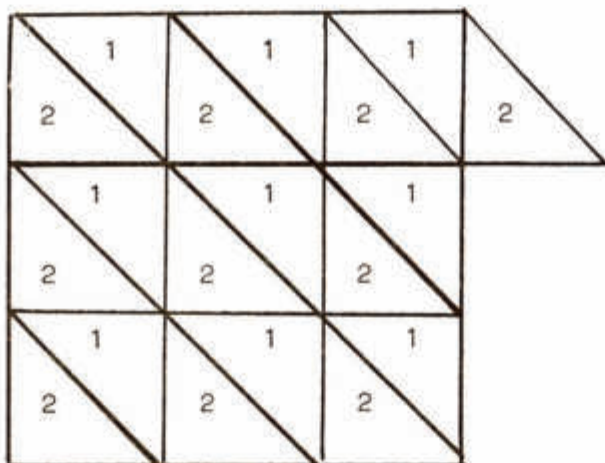
Pour $N = 3$, il suffit de prendre deux types de triangles rectangles isocèles qui sont des demi-carrés (cf. fig. 4.5.1); on a donc $J = 2$.

Pour $N = 4$, on peut considérer un pavage au moyen de quadrilatères indiqués dans la figure 4.5.2. On a $J = 8$. (on peut aussi choisir

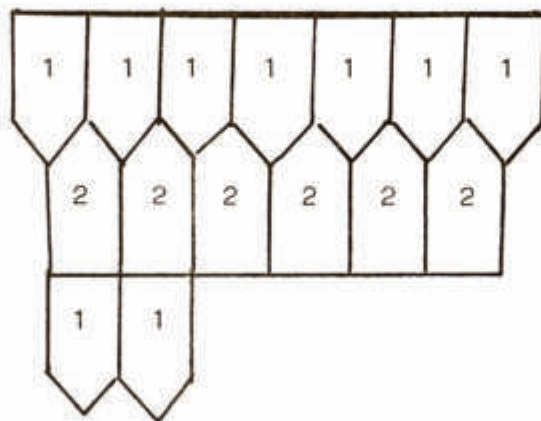
des carrés).

Pour $N = 5$ on peut considérer un pavage au moyen de pentagones de deux types ($J = 2$) (cf. figure 4.5.3).

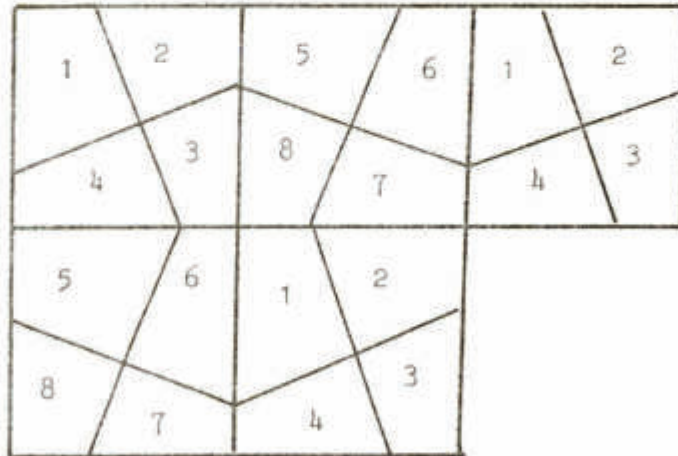
Pour $N = 6$ on peut prendre des hexagones réguliers ($J = 1$).



(fig.4.5.1)



(fig.4.5.3)



(fig. 4.5.2)

Du théorème 4.5.1 on déduit le

Théorème 4.5.2

Soit $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ une famille de triangulations d'un ouvert polygonal borné Ω de \mathbb{R}^2 vérifiant l'hypothèse (4.5.1).

Soit \mathcal{F} une famille d'éléments finis (K, P_K, Σ_K) de degré k pour lesquels l'hypothèse (1.2.1) est vérifiée, associée (cf. (0.3.7)) à la famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$:

On suppose que l'ordre asymptotique des majorations de l'erreur de P_K -interpolation en semi-norme $[\cdot]_{m,p,K}$ sur \mathcal{F} (cf. définition 4.1.2) est $k+1-m$.

Alors cet ordre asymptotique est optimal en ce sens qu'il n'existe pas d'entier $k' > k$ et d'entier m , $0 \leq m \leq k + 1$, pour lesquels on ait des majorations analogues à (4.1.10) avec k' au lieu de k .

Démonstration

(Dans le courant de la démonstration la lettre C désignera diverses constantes indépendantes de K).

Il suffit de raisonner par l'absurde. Supposons qu'il existe un entier $k' > k$ et un entier m , $0 \leq m \leq k + 1$ tels que :

$$(4.5.10) \quad \left| \begin{array}{l} \forall K \in \mathcal{F}, \quad \forall v \in W^{k'+1, p}(K), \\ [v - \Pi_K v]_{m, p, K} \leq C h_K^{k'+1-m} [v]_{k+1, p, K} \end{array} \right.$$

\mathcal{F} étant associée à $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{J}}$ qui vérifie (4.5.1), d'après le théorème 4.5.1 il existe $\psi \in P_{k+1}(\mathbb{R}^2)$ et n'appartenant pas à P_K (pour tout $K \in \mathcal{F}$), tel que, compte tenu des relations (1.2.17) :

$$(4.5.11) \quad \left| \forall h \in \mathcal{J} \left(\sum_{K \in \tilde{\mathcal{T}}_h} [\psi - \Pi_K \psi]_{k+1, p, K}^p \right)^{1/p} \geq C \omega^{1/p} \right.$$

Utilisant alors la relation (4.5.5) et le fait que P_K soit affine (homothétie de rapport h_K), on obtient, pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, compte tenu des relations (1.2.17) ,

$$(4.5.12) \quad \left| \frac{[\psi - \Pi_K \psi]_{k+1, p, K}}{[\psi - \Pi_K \psi]_{m, p, K}} \leq \frac{C}{h_K^{k+1-m}} \frac{[\hat{\psi}_K - \hat{\Pi}_K \hat{\psi}_K]_{k+1, p, \hat{K}}}{[\hat{\psi}_K - \hat{\Pi}_K \hat{\psi}_K]_{m, p, \hat{K}}} \right.$$

Désignant par \hat{E} l'espace de dimension finie, image de $P_{k+1}(\hat{K})$ par $(I-\hat{\Pi})$, donc indépendant de K , on constate que les semi-normes $[\]_{k+1,p,\hat{K}}$ et $[\]_{m,p,\hat{K}}$ sont des normes sur \hat{E} , donc équivalentes. En effet soit $\hat{\theta} \in E$ avec $[\hat{\theta}]_{k+1,p,\hat{K}} = 0$: alors $\hat{\theta} \in P_k(\hat{K})$ et de plus

$$\hat{\theta} = \hat{\psi} - \hat{\Pi}\hat{\psi}, \quad \hat{\psi} \in P_{k+1}(\hat{K}) .$$

Or

$$\hat{\Pi}\hat{\theta} = \hat{\Pi}(\hat{\psi} - \hat{\Pi}\hat{\psi}) = 0 ,$$

donc, comme $\hat{\theta} \in P_k(\hat{K}) \subset \hat{P}$,

$$\hat{\Pi}\hat{\theta} = \hat{\theta} = 0 .$$

On aurait un résultat analogue avec la semi-norme $[\]_{m,p,\hat{K}}$.

On déduit alors de la relation (4.5.12), pour tout $h \in \mathcal{J}$ et pour tout $K \in \mathcal{G}_h$, que

$$(4.5.13) \quad \left| \quad [\psi - \pi_K \psi]_{k+1,p,K} \leq \frac{C}{h_K^{k+1-m}} [\psi - \pi_K \psi]_{m,p,K} \quad . \right.$$

A partir des relations (4.5.10) et (4.5.13) il vient, pour tout $h \in \mathcal{J}$

$$(4.5.14) \quad \left| \quad \left(\sum_{K \in \tilde{\mathcal{G}}_h} [\psi - \pi_K \psi]_{k+1,p,K}^p \right)^{1/p} \leq C h^{k'-k} [\psi]_{k+1,p,\Omega} \quad , \right.$$

car $h_K \leq h$, pour tout $K \in \tilde{\mathcal{G}}_h$.

Comme $k' - k > 0$, la relation (4.5.14) est contradictoire avec les relations (4.5.11), d'où le résultat. \square

Remarque 4.5.2

Se plaçant toujours dans la situation des théorèmes 4.5.1 et 4.5.2 on définit, pour tout $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$, pour tout $m = 0, 1, \dots, k+1$, les semi-normes N_{m,p,\mathcal{T}_h} de l'erreur d'interpolation sur Ω

$$N_{m,p,\mathcal{T}_h}(v) = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} [v - \Pi_K v]_{m,p,K}^p \right)^{1/p} .$$

Supposant vérifiée l'inégalité inverse $\frac{h}{h_K} \leq \mu$ (pour tout $K \in \mathcal{T}_h$), on montre, par un raisonnement analogue à celui utilisé dans la démonstration du théorème 4.5.2, que

$$N_{m,p,\mathcal{T}_h}(v) = O(h^{k+1-m}) ,$$

et que l'on n'a pas pour k' réel, $k' > k$

$$N_{m,p,\mathcal{T}_h}(v) = O(h^{k'+1-m}) .$$

On en déduit donc que l'ordre asymptotique de l'erreur d'interpolation sur Ω en semi-norme N_{m,p,\mathcal{T}_h} est exactement $k + 1 - m$.

Ces résultats sont à rapprocher du théorème 3.2.6 de CIARLET [26] ainsi que de ceux obtenus par GELINAS dans [43] et concernant ce qu'il appelle "approximation d'ordre optimal".

Donnons un résultat (dans un cas particulier) constituant une caractérisation des espaces de Sobolev.

Théorème 4.5.3 (GELINAS [43])

Soient Ω un ouvert polyédrique borné de \mathbb{R}^n , d'intérieur non vide, p un nombre tel que $1 < p \leq +\infty$, k un entier donné, f une fonction appartenant à $W^{m,p}(\Omega)$, $0 \leq m \leq k$.

Alors $f \in W^{k+1,p}(\Omega)$ si et seulement si, pour toute triangulation "presque uniforme" \mathcal{T}_h de Ω en éléments K ($h_K \leq h$),

$$\inf_{\psi \in P_k(\mathcal{T}_h)} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |f - \psi|_{m,p,K}^p \right)^{1/p} \leq M h^{k+1-m},$$

où $P_k(\mathcal{T}_h)$ est l'ensemble des fonctions polynomiales par morceaux, telles que, si $\psi \in P_k(\mathcal{T}_h)$;

$$K \in \mathcal{T}_h, \quad \psi|_K \in P_k(K),$$

et où M est une constante indépendante de \mathcal{T}_h .

Démonstration (cf. GELINAS [43])

Indiquons que pour GELINAS une triangulation presque uniforme de Ω est l'intersection d'une triangulation uniforme (i.e. formée d'éléments tous égaux à un déplacement près) de \mathbb{R}^n avec Ω .



Chapitre 5

EFFET DE L'INTEGRATION NUMERIQUE DANS LA RESOLUTION D'UN PROBLEME D'ORDRE DEUX PAR ELEMENTS FINIS RATIONNELS

--

L'objet de ce chapitre est l'étude de l'effet de l'intégration numérique dans la résolution d'un problème aux limites elliptique d'ordre deux par éléments finis rationnels.

On envisage le cas des éléments finis rationnels quadrilatéraux de Serendip de degré 1, 2 et 3, qui a déjà fait l'objet d'un article d'APPRATO-ARCANGELI [5], ainsi que celui des éléments finis rationnels quadrilatéraux de Serendip de degré 4 et d'Hermite de degré 3 (cf. chapitre 2). Dans ces deux derniers cas la méthode utilisée est analogue à celle de [5]. Enfin on étudie le cas des éléments finis rationnels de Lagrange de degrés 1, 2, 3 et d'Hermite de degré 3 sur un hexagone régulier (cf. chapitre 3).

Dans tous les cas, les méthodes utilisées sont basées essentiellement sur un résultat d'ARCANGELI-GOUT [8], les méthodes usuelles (CIARLET-RAVIART [29]) ne pouvant s'appliquer au cas des éléments finis rationnels.

5.1 RAPPELS

On reprend en grande partie dans ce paragraphe les éléments contenus dans le §.1 de [5] .

5.1.1 Généralités

Soit Ω un ouvert polygonal de \mathbb{R}^2 , convexe, borné, de frontière Γ .

Soient $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, 2$ et $f \in L^2(\Omega)$.

On supposera dans tout ce qui suit que, pour presque tout $x \in \Omega$

$$(5.1.1) \quad \left| \quad \exists \gamma > 0, \forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \gamma \sum_{i=1}^2 \xi_i^2 . \right.$$

On considère alors le problème modèle suivant, qui d'après (5.1.1), admet une solution unique

$$(5.1.2) \quad \left| \quad \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f v dx , \end{array} \right.$$

où $H_0^1(\Omega)$ désigne l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Soit \mathcal{K} un ensemble de réels strictement positifs. Pour tout $h \in \mathcal{K}$ on se donne un sous-espace vectoriel V_{oh} de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$ et on associe au problème exact (5.1.2) le problème discret

$$(5.1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_h \in V_{oh} \\ \forall v_h \in V_{oh} \quad \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \frac{\partial v_h}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f v_h dx \end{array} \right. .$$

Le problème classique auquel nous nous intéressons ici est celui de l'étude de l'erreur dans la résolution de (5.1.3) avec intégration numérique.

Dans la suite, les espaces V_{oh} utilisés sont des espaces d'éléments finis rationnels de Wachspress de même type dont l'élément générique est soit l'élément fini rationnel de Serendip de degré 1, 2, 3 ou 4, soit l'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 sur un quadrilatère, soit l'élément fini rationnel de Lagrange de degré 1, 2 ou 3 sur un hexagone régulier, soit enfin l'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 sur un hexagone régulier.

5.1.2 Rappels

Les notations utilisées dans ce qui suit sont celles des chapitres précédents ainsi que celles de [29] et [85].

\mathcal{K} étant l'ensemble introduit au §.5.1.1, soit $(\mathcal{T}_h)_h \in \mathcal{K}$ une famille régulière de "triangulations" de $\bar{\Omega}$ (donc vérifiant (0.3.6) et (4.1.6)) composée de polygones de même type qui sont

- soit des quadrilatères convexes K , fermés, non dégénérés en trapèzes ou en parallélogrammes,
- soit des hexagones réguliers et des triangles K .

Il est clair en effet qu'on ne peut "triangler" $\bar{\Omega}$ uniquement au moyen d'hexagones réguliers (contenus dans $\bar{\Omega}$) et que si on veut utiliser des hexagones réguliers, il est nécessaire de compléter la "triangulation" au moyen de triangles. On suppose alors que

$$(5.1.4) \quad \left| \begin{array}{l} \bar{\Omega} = \left(\bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K \right) \cup \left(\bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K \right) , \text{ avec} \\ \quad \quad \quad K \text{ hexagone régulier} \quad \quad K \text{ triangle} \\ \\ \text{mes } \Omega^* = O(h) \text{ mes } \bar{\Omega} , \text{ où } \Omega^* = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad K \text{ triangle} \end{array} \right.$$

Dans tout ce qui suit les éléments finis utilisés sont notés (K, P_K, Σ_K) . Ils sont tous (cf. chapitres 2 et 3) de classe C^0 .

Pour tout $h \in \mathcal{H}$, on définit alors par V_h l'espace vectoriel

$$(5.1.5) \quad \left| \quad V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) , \quad \forall K \in \mathcal{T}_h , \quad v_h|_K \in P_K\} \quad , \right.$$

où suivant les cas P_K est l'espace d'interpolation de l'élément fini rationnel de Serendip de degré 1, 2, 3 ou 4, ou de l'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 sur un quadrilatère ou de l'élément fini rationnel de Lagrange de degré 1, 2 ou 3 sur un hexagone régulier ou enfin de l'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 sur un hexagone régulier. Dans ces 2 derniers cas, et compte tenu de (5.1.4), pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, $K \subset \Omega^*$, P_K est un espace de polynômes tel que $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$.

De plus pour tout $v \in C^0(\bar{\Omega})$ on désigne par $\Pi_h v$ le V_h -interpolé de v .

Remarquons enfin que si $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ est une famille de triangulations de $\bar{\Omega}$ en hexagones réguliers et en triangles vérifiant (5.1.4) alors les hexagones réguliers vérifient les hypothèses ((4.1.6),(ii)) et (4.2.1).

5.2 DEFINITION DU PROBLEME NUMERIQUE APPROCHE

5.2.1 Position du problème

Soit $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ une famille de triangulations de $\bar{\Omega}$ de l'un des types indiqués au §.5.1. Supposons $h \in \mathcal{H}$ fixé. Pour $k = 1, 2, 3, 4$ et pour tout espace d'éléments finis V_h utilisé ici (cf. §.5.1.2) on définit l'espace vectoriel

$$(5.2.1) \quad \left| \quad V_{oh} = \{v_h \in V_h \quad , \quad v_h|_{\Gamma} = 0\} \right.$$

où V_h est défini par (5.1.5).

Pour approcher la solution du problème (5.1.3) qui s'écrit encore

$$(5.2.2) \quad \left| \begin{array}{l} u_h \in V_{oh} \\ \forall v_h \in V_{oh} \quad , \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^2 \int_K a_{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \frac{\partial v_h}{\partial x_i} dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f v_h dx \quad , \end{array} \right.$$

on est amené à définir la forme générale d'un problème numérique analogue à (5.1.3) où les intégrales sont remplacées par des approximations numériques : on se donne donc des formules de quadrature numérique sur l'élément courant K de \mathcal{T}_h

$$(5.2.3) \quad \left| \quad \int_K \phi(x) dx \sim \sum_{\lambda=1}^{L_i} \omega_{\lambda,K}^i \phi(b_{\lambda,K}^i) \quad , \quad i = 1, 2 \quad , \right.$$

où l'indice $i = 1$ correspond à l'approximation des intégrales figurant au 1er membre de (5.2.2), l'indice $i = 2$ à celle des intégrales du 2ème membre

et où k est le degré de l'élément fini générique de l'espace V_h .

De plus on note

$$(5.2.4) \quad \left| \forall v, w \in H_0^1(\Omega) \quad a(v, w) = \sum_{i, j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx \right.,$$

$$(5.2.5) \quad \left| \forall w \in H_0^1(\Omega) \quad f(w) = \int_{\Omega} fw dx \right. .$$

De même, supposant les a_{ij} et f suffisamment réguliers, on pose

$$(5.2.6) \quad \left| \forall v_h, w_h \in V_{oh} \quad a_h(v_h, w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\lambda=1}^{L_1} \omega_{\lambda, K}^1 \sum_{i, j=1}^2 (a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i}) (b_{\lambda, K}^1) \right.$$

où v_h et w_h sont respectivement mis pour $v_h|_K$ et $w_h|_K$, et

$$(5.2.7) \quad \left| \forall w_h \in V_{oh} \quad f_h(w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\lambda=1}^{L_2} \omega_{\lambda, K}^2 (fw_h) (b_{\lambda, K}^2) \right. .$$

On définit alors le problème numérique approché

$$(5.2.8) \quad \left| \begin{array}{l} u_h^* \in V_{oh} \\ \forall w_h \in V_{oh} \quad a_h(u_h^*, w_h) = f_h(w_h) \end{array} \right. .$$

Il reste à préciser le choix des poids $\omega_{\lambda, K}^i$ et des noeuds correspondants $b_{\lambda, K}^i$, $i = 1, 2$, dans les formules (5.2.3).

5.2.2 Définition et existence de formules de quadrature numérique

Cas des éléments finis rationnels de Serendip de degrés 1,2,3,4
ou de l'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 sur un quadrilatère

Le cas des éléments finis rationnels de Serendip de degrés 1,2, ou 3 est traité dans [5].

Rappelons, compte tenu des notations de [5], l'expression des poids $\omega_{\lambda,K}^i$ et des noeuds d'intégration $b_{\lambda,K}^i$. Désignant, pour tout $k = 1,2,3,4$, par $(\hat{q}_\lambda)_{1 \leq \lambda \leq 4k^2}$ les fonctions de base de la $Q_{2k-1}(\hat{K})$ interpolation de Lagrange (cf. [26]) et par $(\hat{b}_\lambda)_{1 \leq \lambda \leq 4k^2}$ les noeuds correspondants, on pose pour $i = 1,2$:

$$(5.2.9) \quad \left| \quad \forall \lambda = 1, \dots, L_i = 4k^2 \quad \hat{\omega}_\lambda^i(s) = \int_{\hat{K}} \frac{\hat{q}_\lambda(\hat{x})}{s^{2k+i}(\hat{x})} d\hat{x} \right.$$

et on définit

$$(5.2.10) \quad \left| \quad \forall \lambda = 1, \dots, L_i = 4k^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{\lambda,K}^i = \hat{\omega}_\lambda^i(s) J_K(\hat{b}_\lambda) s^{2k+i}(\hat{b}_\lambda) \quad , \\ b_{\lambda,K}^i = F_K(\hat{b}_\lambda) \quad . \end{array} \right. \right.$$

On montre, pour $k = 1,2,3,4$ (cf. APPRATO-ARCANGELI [5]) qu'il existe un nombre $v_0(k)$ tel que, pour $v \geq v_0(k)$, tous les poids $\omega_{\lambda,K}^1$ soient strictement positifs.

On vérifie que les cas de l'élément fini rationnel de Serendip de degré 4, comme celui de l'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 se

traitent de manière identique.

On suppose désormais que, pour $k = 1, 2, 3, 4$, la famille $(\mathcal{C}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ vérifie, non plus l'hypothèse (4.2.2) mais l'hypothèse

$$(5.2.11) \quad \left| \exists v_1 > 0, v_1 \geq v_0(k), \forall h \in \mathcal{H}, \forall K \in \mathcal{C}_h, \inf_{x \in K} \delta(x, d_K) \geq v_1 h_K \right.$$

Cas des éléments finis rationnels de Lagrange de degré 1, 2 ou 3 sur un hexagone régulier ou de l'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 sur un hexagone régulier

Soient \hat{K} l'hexagone régulier de sommets $\hat{a}_1 = (\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4})$, $\hat{a}_2 = (0, \frac{1}{2})$, $\hat{a}_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4})$, $\hat{a}_4 = (-\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4})$, $\hat{a}_5 = (0, -\frac{1}{2})$, $\hat{a}_6 = (\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4})$, donc de diamètre égal à 1, F_K la transformation affine telle que $F_K(\hat{a}_j) = a_j$ $j \in I = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, où les a_j sont les sommets de l'hexagone K appartenant à \mathcal{C}_h . Il est clair que

$$(5.2.12) \quad \left| J_K(\hat{x}) = \det DF_K(\hat{x}) = h_K^2 \right.$$

Nous allons montrer qu'il existe des formules de quadrature numérique

$$(5.2.13) \quad \left| \int_{\hat{K}} \hat{w}_i(\hat{x}) \hat{\phi}(\hat{x}) d\hat{x} \sim \sum_{\lambda=1}^{L_i} \hat{\omega}_\lambda^i \hat{\phi}(\hat{b}_\lambda^i) \right.$$

où l'indice i est égal à 1 (resp. égal à 2) lorsqu'on étudie le cas du 1er membre (resp. 2ème membre) de (5.2.8) et où la fonction poids \hat{w}_i est définie par

$$(5.2.14) \quad \hat{w}_i(\hat{x}) = \begin{cases} 1/\hat{q}^2(\hat{x}) & \text{si } i = 1 \\ 1/\hat{q}(\hat{x}) & \text{si } i = 2 \end{cases}$$

avec $\hat{q}(\hat{x}) = \frac{3}{4} - \hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2$, vérifiant les conditions suivantes :

$$(5.2.15) \quad \begin{cases} \text{a) (5.2.13) est exacte sur } P_{2k+3}(\hat{K}) \text{ pour } i = 1 \text{ (resp. } P_{2k+2}(\hat{K}) \\ \text{pour } i = 2, \\ \text{b) pour } i = 1, 2, \{\tilde{b}_\lambda^i, 1 \leq \lambda \leq L_i\} \text{ est contenu dans } \hat{K} \text{ et} \\ \{\hat{b}_\lambda^1, 1 \leq \lambda \leq L_1\} \text{ contient un ensemble } P_{k+4}(\hat{K})\text{-unisolvant,} \\ \text{c) } \forall \lambda, 1 \leq \lambda \leq L_1, \hat{\omega}_\lambda^1 > 0, \end{cases}$$

où k désigne le degré de l'élément fini considéré.

Plus généralement on a le

Théorème 5.2.1

Soient \mathcal{K} un compact de \mathbb{R}^2 et w une fonction continue strictement positive sur \mathcal{K} . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une formule de quadrature

$$\int_{\mathcal{K}} w(x)\phi(x)dx \sim \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \omega_\lambda \phi(b_\lambda),$$

exacte sur $Q_k(\mathcal{K})$, telle que l'ensemble $\{b_\lambda, 1 \leq \lambda \leq \Lambda\}$ soit contenu dans \mathcal{K} et contienne un ensemble $Q_k(\mathcal{K})$ -unisolvant et telle que pour tout $\lambda = 1, \dots, \Lambda$, $\omega_\lambda > 0$.

Démonstration

Ce théorème complète des résultats de TCHAKALOFF [78], DAVIS et RABINOWITZ [36] (rappelés également dans STROUD [77]). La démonstration s'inspire de celle de DAVIS [36].

Soient d' un intervalle fermé de \mathbb{R} , $\{b'_i \in d', 1 \leq i \leq k+1\}$ l'ensemble des noeuds d'intégration de la formule d'intégration de Gauss-Legendre, exacte sur $P_{2k+1}(d')$ (donc sur $P_k(d')$) et $A'_i, 1 \leq i \leq k+1$, les coefficients de Gauss correspondants, tous strictement positifs (cf. [36]).

On vérifie immédiatement que l'ensemble $\{b'_i, 1 \leq i \leq k+1\}$ est $P_k(d')$ -unisolvant et on désigne par $\{p'_i, 1 \leq i \leq k+1\}$ l'ensemble des fonctions de base de $P_k(d')$ correspondantes, avec

$$(5.2.16) \quad \left| \quad p'_i = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^{k+1} (x - b'_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{k+1} (b'_i - b'_j)} \quad , \quad i = 1, \dots, k+1 \quad , \right.$$

et

$$(5.2.17) \quad \left| \quad A'_i = \int_{d'} p'_i(x) dx > 0 \quad . \right.$$

On définit de la même façon un intervalle fermé d'' de \mathbb{R} , un ensemble $\{b''_j \in d'', 1 \leq j \leq k+1\}$, des coefficients $A''_j, 1 \leq j \leq k+1$ et un ensemble $\{p''_j, 1 \leq j \leq k+1\}$ de fonctions de base vérifiant des relations analogues aux relations (5.2.16) et (5.2.17).

On considère alors le pavé $D = d' \times d''$ de \mathbb{R}^2 , les points $b_{ij} = (b'_i, b''_j)$ de D , les coefficients $A_{ij} = A'_i A''_j$ et les fonctions $p_{ij} = p_i \otimes p_j$. On vérifie alors que l'ensemble $\{b_{ij}, 1 \leq i, j \leq k+1\}$ est $Q_k(D)$ -unisolvant et que $\{p_{ij}, 1 \leq i, j \leq k+1\}$ est l'ensemble des fonctions de base de $Q_k(D)$ correspondant. De plus les coefficients A_{ij} sont strictement positifs et vérifient

$$(5.2.18) \quad \left| \quad A_{ij} = \int_D p_{ij}(x) dx > 0, \quad 1 \leq i, j \leq k+1. \right.$$

On suppose dans ce qui suit que d' et d'' sont tels que D soit contenu dans \mathcal{K} .

Utilisant alors une méthode analogue à celle utilisée dans le §.5.2.2 on définit D_{ij}^+ et D_{ij}^- , $1 \leq i, j \leq k+1$, par

$$(5.2.19) \quad \left| \quad \begin{aligned} D_{ij}^+ &= \{x \in D, p_{ij}(x) \geq 0\}, \\ D_{ij}^- &= \{x \in D, p_{ij}(x) < 0\}. \end{aligned} \right.$$

On a alors, pour tout $i, j = 1, \dots, k+1$,

$$(5.2.20) \quad \left| \quad \begin{aligned} B_{ij} &= \int_K w(x) p_{ij}(x) dx \\ &\geq \inf_{x \in D} w(x) \int_{D_{ij}^-} |p_{ij}(x)| dx \left(\frac{\int_{D_{ij}^+} p_{ij}(x) dx}{\int_{D_{ij}^-} |p_{ij}(x)| dx} - \frac{\sup_{x \in D} w(x)}{\inf_{x \in D} w(x)} \right) \end{aligned} \right.$$

et si on pose, pour $1 \leq i, j \leq k+1$

$$(5.2.21) \quad \left| \alpha_{ij} = \frac{\int_{D_{ij}^+} p_{ij}(x) dx}{\int_{D_{ij}^-} |p_{ij}(x)| dx} \right. ,$$

on vérifie, compte tenu de la définition des p_{ij} , des relations (5.2.16) et (5.2.18) que les coefficients α_{ij} sont indépendants de D et strictement supérieurs à 1.

Donc, comme $w \in C^0(D)$, si le diamètre $\delta(D)$ de D est assez petit,

$$\forall i, j = 1, \dots, k+1 \quad \frac{\sup_{x \in D} w(x)}{\inf_{x \in D} w(x)} < \alpha_{ij}$$

et par suite

$$(5.2.22) \quad \left| \forall i, j = 1, \dots, k+1 \quad B_{ij} > 0 \right. .$$

Soit $\phi \in Q_k(D)$, on a, pour tout $x \in D$

$$\phi(x) = \sum_{i,j=1}^{k+1} \phi(b_{ij}) p_{ij}$$

d'où en utilisant (5.2.20),

$$(5.2.23) \quad \left| \forall \phi \in Q_k(D) \quad \int_D w(x) \phi(x) dx = \sum_{i,j=1}^{k+1} B_{ij} \phi(b_{ij}) \right. .$$

On utilise alors un raisonnement analogue à celui de DAVIS [36] (cf. également la démonstration du théorème 3.4.1 de [77]).

Soient D_0 un pavé contenu dans K , fixé, p_{ij}^0 les fonctions de base et B_{ij}^0 les coefficients, $1 \leq i, j \leq k+1$, définis à partir d'une formule de quadrature numérique de type (5.2.23) sur D_0 .

Il existe un ensemble $\{D_\ell, 1 \leq \ell \leq L\}$ de pavés contenus dans \mathcal{K} tels que, si on note $\mathcal{K}^* = \mathcal{K} - \left(\bigcup_{\ell=0}^L D_\ell\right)$,

$$(5.2.24) \quad \left| \quad \text{mes } \mathcal{K}^* < \varepsilon \right.$$

où ε est choisi suffisamment petit (ce qui est toujours possible) pour que

$$(5.2.25) \quad \left| \quad \forall i, j = 1, \dots, k+1 \quad B_{ij}^* < B_{ij}^0 \quad \text{où} \quad B_{ij}^* = \int_{\mathcal{K}^*} w(x) p_{ij}^0(x) dx \right.$$

Pour tout $\ell = 1, \dots, L$ on considère comme précédemment des formules de quadrature numérique de type (5.2.23) sur D_ℓ . D'où pour tout $\phi \in Q_k(\mathcal{K})$

$$(5.2.26) \quad \left| \quad \forall \ell = 0, 1, \dots, L \quad \int_{D_\ell} w(x) \phi(x) dx = \sum_{i,j=1}^{k+1} B_{ij}^\ell \phi(b_{ij}^\ell) \right.$$

On a d'autre part pour tout $\phi \in Q_k(\mathcal{K})$

$$(5.2.27) \quad \left| \quad \int_{\mathcal{K}^*} w(x) \phi(x) dx = \sum_{i,j=1}^{k+1} B_{ij}^* \phi(b_{ij}^0) \right.$$

Des relations (5.2.26) et (5.2.27), ainsi que de la définition de \mathcal{K}^* on déduit

$$(5.2.28) \quad \left| \quad \forall \phi \in Q_k(\mathcal{K}) \quad \int_{\mathcal{K}} w(x) \phi(x) dx = \sum_{i,j=1}^{k+1} (B_{ij}^0 - B_{ij}^*) \phi(b_{ij}^0) + \sum_{\ell=1}^L \sum_{i,j=1}^{k+1} B_{ij}^\ell \phi(b_{ij}^\ell) \right.,$$

où, compte tenu de (5.2.22) et (5.2.25) , on a

$$(5.2.29) \quad \left| \quad \forall i, j = 1, \dots, k+1 \quad \forall \ell = 1, \dots, L \quad B_{ij}^{\circ} - B_{ij}^* > 0 \quad \text{et} \quad B_{ij}^{\ell} > 0. \right.$$

Après réindexation, il vient à partir de (5.2.28) et (5.2.29)

$$\forall \phi \in Q_k(\mathcal{K}) \quad , \quad \int_{\mathcal{K}} w(x)\phi(x)dx = \sum_{\lambda=1}^L \omega_{\lambda} \phi(b_{\lambda}) \quad ,$$

les coefficients ω_{λ} étant tous strictement positifs et l'ensemble $\{b_{\lambda} \quad , \quad 1 \leq \lambda \leq L\}$ contenant un ensemble $Q_k(\mathcal{K})$ -unisolvant ce qui achève la démonstration. \square

On déduit alors le

Théorème 5.2.2

Soit \hat{K} l'hexagone régulier défini ci-dessus. Pour tout $k=1,2,3$, pour tout $i=1,2$, il existe une formule de quadrature numérique de type (5.2.13) vérifiant, avec (5.2.14), les conditions (5.2.15). \square

A partir des résultats du théorème 5.2.2 on définit des formules de quadrature de type (5.2.13) sur l'élément courant K de \mathcal{T}_h : pour $i = 1,2$ et pour tout $\lambda = 1, \dots, L_i$ on pose

$$(5.2.30) \quad \left| \quad \omega_{\lambda}^i, K = h_K^2 \hat{\omega}_{\lambda}^i \hat{q}^2(\hat{b}_{\lambda}^i) \quad , \quad b_{\lambda, K}^i = F_K(\hat{b}_{\lambda}^i). \right.$$

5.2.3. Schéma d'étude

Dans la suite, comme dans l'article d'APPRATO-ARCANGELI [5] , on

va suivre la méthode introduite par CIARLET-RAVIART [29] et CIARLET [26] ce qui conduit à examiner successivement :

a) le problème de l'ellipticité uniforme de la forme bilinéaire a_h définie par (5.2.6) ;

b) celui de la majoration, pour $k = 1, 2, 3, 4$, $K \in \mathcal{T}_h$, $i, j = 1, 2$ et $v_h, w_h \in V_{oh}$, des quantités $E_K^1(a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i})$ et $E_K^2(\tau w_h)$ où les formes linéaires E_K^1 et E_K^2 sont définies par

$$(5.2.31) \quad \left| \forall v \in C^0(K) \quad E_K^1(v) = \int_K v \, dx - \sum_{\lambda=1}^{L_1} \omega_{\lambda,K}^1 v(b_{\lambda,K}^1) \right. ,$$

et

$$(5.2.32) \quad \left| \forall v \in C^0(K) \quad E_K^2(v) = \int_K v \, dx - \sum_{\lambda=1}^{L_1} \omega_{\lambda,K}^2 v(b_{\lambda,K}^2) \right. .$$

Dans le cas des éléments finis rationnels de degré k sur un quadrilatère, les coefficients $\omega_{\lambda,K}^i$ et les noeuds $b_{\lambda,K}^i$, $i = 1, 2$, sont définis comme dans [5]. En particulier on a $L_i = 4k^2$, $i = 1, 2$.

Dans le cas des éléments finis rationnels de degré k sur un hexagone régulier, les coefficients $\omega_{\lambda,K}^i$ et les noeuds $b_{\lambda,K}^i$ sont définis par les relations (5.2.30) à partir de formules de quadrature sur \hat{K} de type (5.2.13) vérifiant les relations (5.2.14) et les conditions (5.2.15).

Dans le cas des éléments finis triangulaires les coefficients $\omega_{\lambda,K}^i$ et les noeuds $b_{\lambda,K}^i$ sont définis comme dans la théorie classique de CIARLET-RAVIART [29] .

c) enfin, celui de la majoration de l'erreur $|u-u_h^*|_{1,\Omega}$, u_h^* désignant la solution de (5.2.8).

On suppose dorénavant que pour $k = 1,2,3,4$

$$(5.2.33) \quad \left| \quad \forall i,j = 1,2 \quad a_{ij} \in W^{k,\infty}(\Omega) \quad , \right.$$

$$(5.2.34) \quad \left| \quad f \in W^{k,p}(\Omega) \quad \text{avec} \quad p > \frac{2}{k} \quad . \right.$$

5.3. V_{oh} -ELLIPTICITE UNIFORME DE LA FORME a_h

5.3.1 Cas des éléments finis de Serendip de degré 1,2,3,4 et de l'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 sur un quadrilatère

Dans tout ce paragraphe K est un quadrilatère défini comme dans le §.5.1.

On considère toujours que $h \in \mathcal{H}$ est fixé. On a alors le

Théorème 5.3.1

On suppose vérifiées les hypothèses (5.1.1), (4.1.6), (5.2.11) et (5.2.23). Alors pour $k = 1,2,3,4$ il existe une constante $\beta > 0$ indépendante de h telle que

$$\forall v_h \in V_{oh} \quad , \quad a_h(v_h, v_h) \geq \beta |v_h|_{1,\Omega}^2 \quad ,$$

où V_{oh} est l'espace introduit au §.5.2 et a_h la forme bilinéaire définie par (5.2.6).

Démonstration cf. théorème 4.1 de [5].

On notera que dans le cas de l'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 et dans le cas de l'élément fini rationnel de Serendip de degré 4, on a, comme dans le cas des éléments finis rationnels de degré 1, 2 et 3 :

$$\forall v_h \in V_{oh} \quad \forall i = 1,2 \quad \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \circ F \in \frac{1}{s^{k+1}} Q_k(\hat{K}) \quad .$$

5.3.2 Cas des éléments finis rationnels de Lagrange de degré 1,2 ou 3 ,
ou de l'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3, sur un hexagone
régulier.

Dans ce paragraphe K est un hexagone régulier.

Soit $h \in \mathcal{J}$ fixé. Il vient alors le

Théorème 5.3.2

On suppose vérifiées les hypothèses (5.1.1), (5.1.4) et (5.2.33).
Alors il existe une constante $\beta > 0$ indépendante de h telle que

$$\forall v_h \in V_{oh} \quad a_h(v_h, v_h) \geq \beta |v_h|_{1,\Omega}^2 ,$$

où V_{oh} est l'espace introduit au §.5.2 et a_h la forme bilinéaire
définie par (5.2.6).

Démonstration

On suit les idées de la démonstration du théorème 4.1 de [5].

Soit $k = 1, 2$ ou 3 fixé. Par définition on a pour tout $v_h \in V_{oh}$

$$a_h(v_h, v_h) = \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ K \subset \Omega - \Omega^*}} \left(\sum_{\lambda=1}^{L_1} \omega_{\lambda,K}^1 (a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \frac{\partial v_h}{\partial x_i}) (b_{\lambda,K}^1) \right) + A_h$$

où A_h , compte tenu de (5.1.4) et (5.1.5) est défini par

$$A_h = \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ K \subset \Omega^*}} \left(\sum_{\lambda=1}^{L_1} \omega_{\lambda,K}^1 (a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j}) (b_{\lambda,K}^1) \right) ,$$

et vérifie, d'après l'hypothèse (5.1.1) et les résultats classiques sur l'approximation par éléments finis polynomiaux (cf. CIARLET [26])

$$(5.3.1) \quad \left| \quad A_h \geq \beta_1 |v_h|_{1,\Omega^*}^2 \right.$$

où β_1 est une constante > 0 et indépendante de h .

Comme les poids $\omega_{\lambda,K}^1$ sont positifs d'après (5.2.30), il vient compte tenu de (5.1.1)

$$\forall v_h \in V_{oh}, \quad a_h(v_h, v_h) \geq \gamma \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ K \subset \Omega - \Omega^*}} \sum_{\lambda=1}^{L_1} \omega_{\lambda,K}^1 \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial v_h}{\partial x_i} (b_{\lambda,K}^1) \right]^2 + A_h$$

ou encore, avec (5.2.30),

$$a_h(v_h, v_h) \geq \gamma \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ K \subset \Omega - \Omega^*}} \sum_{\lambda=1}^{L_1} h_K^2 \hat{\omega}_\lambda^1 \hat{q}_\lambda^2 (\hat{b}_\lambda^1) \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{\partial v_h}{\partial x_i} \circ F_K \right) (\hat{b}_\lambda^1) \right]^2 + A_h$$

Désignant par \hat{v}_h la fonction $v_h \circ F_K$ on obtient

$$(5.3.2) \quad \left| \quad \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \circ F_K = \frac{1}{h_K} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \hat{x}_i}, \quad i = 1, 2 \right.$$

d'où

$$a_h(v_h, v_h) \geq \gamma \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ K \subset \Omega - \Omega^*}} \sum_{\lambda=1}^{L_1} \hat{\omega}_\lambda^1 \sum_{i=1}^2 \left[\left(\hat{q} \cdot \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \hat{x}_i} \right) (\hat{b}_\lambda^1) \right]^2 + A_h.$$

On vérifie alors que pour tout $k = 1, 2, 3$, $\frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \hat{x}_i} \cdot \hat{q} \in \frac{P_{k+4}(\hat{K})}{\hat{q}}$,
 espace de dimension finie ; comme (cf. §.5.2.2) l'ensemble $\{\hat{b}_\lambda^1, 1 \leq \lambda \leq L_1\}$

contient un ensemble $P_{k+4}(\hat{K})$ -unisolvant et l'application

$$\hat{v} \mapsto \sum_{\lambda=1}^{L_1} [\hat{v}(b_\lambda^1)]^2$$

est une norme sur $\frac{P_{k+4}(\hat{K})}{\hat{q}}$, il existe donc une constante β_2 indépendante de h et de K , telle que, compte tenu du fait que les poids $\hat{\omega}_\lambda^1$ sont strictement positifs, et que \hat{q} est continue, strictement positive sur \hat{K} , on ait

$$a_h(v_h, v_h) \geq \beta_2 \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ K \subset \Omega - \Omega^*}} \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \hat{x}_i} \right|_{0, \hat{K}}^2 + A_h.$$

Or d'après (5.3.2)

$$\left| \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \hat{x}_i} \right|_{0, \hat{K}}^2 = \left| \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \right|_{0, K}^2,$$

d'où

$$\begin{aligned} a_h(v_h, v_h) &\geq \beta_2 \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ K \subset \Omega - \Omega^*}} |v_h|_{1, K}^2 + A_h \\ &\geq \beta_2 |v_h|_{1, \Omega - \Omega^*}^2 + A_h. \end{aligned}$$

Avec (5.3.1) et posant $\beta = \min(\beta_1, \beta_2)$ il vient

$$\forall v_h \in V_{oh} \quad a_h(v_h, v_h) \geq \beta |v_h|_{1, \Omega}^2. \quad \square$$

5.4 MAJORATIONS DE $E_K^1(a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i})$ ET DE $E_K^2(f w_h)$

Soient $h \in \mathcal{K}$ et $K \in \mathcal{T}_h$ fixés.

5.4.1 Cas des éléments finis de Serendip de degrés 1,2,3,4 ou de l'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 sur un quadrilatère

Dans tout ce §. K est un quadrilatère défini comme au §.2.1.

Il vient le

Théorème 5.4.1

On suppose vérifiées les hypothèses (4.1.6), (5.2.11) et (5.2.33).

Alors pour $k = 1, 2, 3, 4$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de K telle que pour tout $i, j = 1, 2$,

$$\forall v_h, w_h \in V_{oh} \left| E_K^1(a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i}) \right| \leq \frac{C}{k - \frac{2}{p}} |a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j}|_{k,p,K} \left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right\|_{0,q,K} h_K^k$$

avec $p > \frac{2}{k}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et où V_{oh} est l'espace introduit au §.5.2.

Démonstration cf. théorème 5.1 de [5].

On notera que dans tous les cas envisagés on a :

$$- (\phi_{k-1}(a) \frac{\partial w_h}{\partial x_i}) \circ F \in \frac{1}{s^{2k-2}} Q_{2k-1}(\hat{K}),$$

où $\phi_{k-1}(a)$ désigne le polynôme de Taylor à l'ordre $k-1$ au point a de la fonction $a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j}$,

$$- s^{k-1} \left(\frac{\partial w_h}{\partial x_i} \circ F \right) \in Q_k(\hat{K}) \quad .$$

On a également le

Théorème 5.4.2

On suppose vérifiées les hypothèses (4.1.6), (5.2.11) et (5.2.33).

Alors pour tout $k = 1, 2, 3, 4$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de K telle que

$$\forall w_h \in V_{oh} \quad |E_K^2(fw_h)| \leq \frac{C}{k - \frac{2}{p}} |f|_{k,p,K} \|w_h\|_{0,q,K} h_K^k \quad ,$$

avec $p > \frac{2}{k}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et où V_{oh} est l'espace introduit au §.5.2.

Démonstration cf. théorème 5.2 de [5].

On notera que dans tous les cas

$$- \forall w_h \in V_{oh} \quad s^{2k-1}(\phi_{k-1}(a)w_h) \circ F \in Q_{2k-1}(\hat{K}) \quad ,$$

$$- \forall w_h \in V_{oh} \quad s^k(w_h \circ F) \in Q_k(\hat{K}) \quad ,$$

où $\phi_{k-1}(a)$ désigne ici le polynôme de Taylor à l'ordre $k-1$ au point a de la fonction f .

5.4.2 Cas des éléments finis rationnels de Lagrange de degrés 1, 2 ou 3, ou de l'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3 sur un hexagone régulier

Dans tout ce paragraphe K est un hexagone régulier et on notera

que dans ce cas l'hypothèse (4.1.6), et l'hypothèse (4.2.1) de [50], sont vérifiées.

Théorème 5.4.3

On suppose vérifiée l'hypothèse (5.2.33). Alors pour $k = 1, 2$ ou 3 , il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de K telle que pour tout $i, j = 1, 2$, pour tout $v_h \in V_{oh}$ et pour tout $w_h \in V_{oh}$

$$|E_K^1(a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i})| \leq \frac{C}{k - \frac{2}{p}} |a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j}|_{k,p,K} \| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \|_{0,q,K} h_K^k$$

avec $p > \frac{2}{k}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, où V_{oh} est l'espace introduit au §.5.2.

Démonstration

On suit les idées de la démonstration du théorème 5.1 de [5]. Dans le courant de la démonstration C désignera diverses constantes indépendantes de h et de K .

Soit $k = 1, 2$ ou 3 fixé. Il suffit de montrer le théorème sous l'hypothèse $a_{ij} \in C^k(\bar{\Omega})$, le résultat général s'obtenant en raisonnant par densité lorsque $p < +\infty$ et par passage à la limite lorsque $p = +\infty$.

Pour tout $a \in K$, on considère le polynôme de Taylor $\phi_{k-1}(a, \frac{\partial v_h}{\partial x_j}, a)$ à l'ordre $k-1$ au point a de la fonction $a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j}$, noté pour simplifier $\phi_{k-1}(a)$ et l'on a, compte tenu de la définition (5.2.31) de E_K^1 et des résultats (5.2.30)

$$E_K^1(\phi_{k-1}(a) \frac{\partial w_h}{\partial x_i}) = h_K^2 \left\{ \int_{\hat{K}} [(\phi_{k-1}(a) \frac{\partial w_h}{\partial x_i})_{oF}] (\hat{x}) d\hat{x} - \sum_{\lambda=1}^{L_1} \hat{\omega}_\lambda \hat{q}_\lambda^2 (\hat{b}_\lambda^1) ((\phi_{k-1}(a) \frac{\partial w_h}{\partial x_i})_{oF}) (\hat{b}_\lambda^1) \right\} .$$

On vérifie alors que, pour $k = 1, 2, 3$, on a

$$\forall i = 1, 2 \quad (\phi_{k-1}(a) \frac{\partial w_h}{\partial x_i})_{oF} \in \frac{1}{\hat{q}^2} P_{2k+3}(\hat{K}) ,$$

d'où l'on déduit, d'après le théorème 5.2.2 que

$$E_K^1(\phi_{k-1}(a) \frac{\partial w_h}{\partial x_i}) = 0 ,$$

et donc que

$$E_K^1(a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i}) = E_K^1 \left[\left(a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} - \phi_{k-1}(a) \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right) \right] .$$

En utilisant les résultats de [8], on obtient, avec $p > \frac{2}{k}$,

$$\left| E_K^1(a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i}) \right| \leq \frac{C h_K^k}{(k-1)!(k-\frac{2}{p})} |a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j}|_{k,p,K} \left(\left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right\|_{0,q,K} + \left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right\|_{0,\infty,K} \frac{\sum_{\lambda=1}^{L_1} \hat{\omega}_\lambda^1}{(\text{mes } K)^{1/p}} \right)$$

Comme d'autre part $\frac{\partial w_h}{\partial x_i} \circ F \in \frac{1}{\hat{q}^2} P_{k+4}(\hat{K})$ qui est un espace de dimension finie,

$$\left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right\|_{0,\infty,K} = \left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \circ F \right\|_{0,\infty,\hat{K}} \leq C \left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \circ F \right\|_{0,q,\hat{K}} .$$

Or

$$\left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right\|_{0,q,\hat{K}} = \left(\frac{\text{mes } \hat{K}}{\text{mes } K} \right)^{1/q} \left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right\|_{0,q,K},$$

d'où il vient, d'après (5.2.30) ,

$$\left| E_K^1(a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i}) \right| \leq \frac{C h_K^k}{(k-1)!(k-\frac{2}{p})} \left| a_{ij} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \right|_{k,p,K} \left\| \frac{\partial w_h}{\partial x_i} \right\|_{0,q,K} \left(1 + C(\text{mes } \hat{K})^{\frac{1}{q}} \right)$$

et le résultat suit. \square

On a aussi le

Théorème 5.4.4

On suppose vérifiée l'hypothèse (5.2.34). Alors pour tout $k=1,2,3$ il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de K , telle que

$$\forall w_h \in V_{oh}, |E_K^2(f w_h)| \leq \frac{C}{k-\frac{2}{p}} |f|_{k,p,K} \|w_h\|_{0,q,K} h_K^k$$

avec $p > \frac{2}{k}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et où V_{oh} est l'espace introduit au §.5.2.

Démonstration

Dans la suite C désigne diverses constantes indépendantes de h et de K . Le raisonnement est analogue à celui du théorème 5.4.3.

On considère ici le polynôme de Taylor $\phi_{k-1}(a)$ à l'ordre $k-1$ au point a de la fonction f et on utilise d'abord le fait que

$$\forall w_h \in V_{oh} \quad (\phi_{k-1}(a)w_h) \circ F \in \frac{P_{2k+2}(\hat{K})}{\hat{q}},$$

puis le théorème 5.2.2, d'où, pour tout $w_h \in V_{oh}$

$$|E_K^2(fw_h)| = \left| \int_K (f - \phi_{k-1}(a))w_h \, dx - \sum_{\lambda=1}^{L_2} \omega_\lambda^2 [(f - \phi_{k-1}(a))w_h] (b_\lambda^2) \right|.$$

Alors, avec les résultats de [8] on a

$$|E_K^2(fw_h)| \leq \frac{C h_K^k}{(k-1)!(k-\frac{2}{p})} |f|_{k,p,K} \left(\|w_h\|_{0,q,K} + \|w_h\|_{0,\infty,K} \frac{\sum_{\lambda=1}^{L_2} \omega_\lambda^2}{(\text{mes } K)^{1/p}} \right).$$

Comme $w_h \circ F \in \frac{1}{\hat{q}} P_{k+3}(\hat{K})$ qui est un espace de dimension finie

$$\|w_h \circ F\|_{0,\infty,\hat{K}} \leq C \|w_h \circ F\|_{0,q,\hat{K}} = C \left(\frac{\text{mes } \hat{K}}{\text{mes } K} \right)^{1/q} \|w_h\|_{0,q,K},$$

d'où

$$|E_K^2(fw_h)| \leq \frac{C h_K^k}{(k-1)!(k-\frac{2}{p})} |f|_{k,p,K} \|w_h\|_{0,q,K} (1 + (\text{mes } \hat{K})^{1/q}),$$

et le résultat suit.

5.5 MAJORATION DE L'ERREUR $|u-u_h^*|_{1,\Omega}$

Théorème 5.5.1

On suppose vérifiées les hypothèses (5.1.1), (5.1.5), (4.1.6), (5.2.11), (5.2.33) et (5.2.34). Soit V_{oh} l'espace d'éléments finis rationnels de degrés 1,2,3 ou 4 suivant les cas, défini par (5.1.5) et (5.2.1). Soient u la solution du problème (5.1.2) et u_h^* celle du problème défini par (5.2.8).

On suppose que u vérifie la condition de régularité

$$u \in W^{2,p}(\Omega) \quad , \quad p > 2 \quad \text{lorsque } k = 1 \quad , \quad \text{et}$$

$$u \in H^{k+1}(\Omega) \quad \text{lorsque } k = 2,3,4.$$

Alors pour $k = 1,2,3,4$ il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que

$$|u-u_h^*|_{1,\Omega} \leq C \left(|u|_{k+1,\Omega} + \left(\sum_{i,j=1}^2 \|a_{ij}\|_{k,\infty,\Omega} \right) \|u\|_{k+1,p,\Omega} + |f|_{k,p,\Omega} \right) h^k$$

avec $p > 2$ si $k = 1$ et $p = 2$ si $k = 2,3,4$.

Démonstration

Dans la suite C désigne diverses constantes indépendantes de h et de K

1) Pour les éléments finis rationnels de Serendip sur un quadrilatère de degrés 1,2,3 ou 4 et d'Hermite de degré 3, cf. théorème 6.1 de [5], en tenant compte des théorèmes 5.4.1 et 5.4.2 et en remarquant que dans tous

les cas on a

$$(5.5.1) \quad \left| \begin{array}{l} \|\Pi_h v\|_{k+1,p,K} \leq C \|u\|_{k+1,p,K} \end{array} \right.$$

2) Pour les éléments finis rationnels sur un hexagone régulier de degrés 1, 2 ou 3, on procède de manière analogue.

Des relations (5.1.4), (5.2.4), (5.2.6) et (5.2.31) on déduit que

$$(5.5.2) \quad \left| \begin{array}{l} \forall w_h \in V_{oh} \quad |a(\Pi_h u, w_h) - a_h(\Pi_h u, w_h)| \leq \\ \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ K \subset \Omega - \Omega^*}} \sum_{i,j=1}^2 |E_K^1(a_{ij} \frac{\partial \Pi_h u}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i})| + \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ K \subset \Omega^*}} \sum_{i,j=1}^2 |E_K^1(a_{ij} \frac{\partial \Pi_h u}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i})|. \end{array} \right.$$

Compte tenu de (5.2.33), des résultats du chapitre 4 concernant les majorations des fonctions de base des éléments finis rationnels sur un hexagone régulier, du théorème 5.4.3 et des majorations classiques (cf. CIARLET

[26]) de $|E_K^1(a_{ij} \frac{\partial \Pi_h u}{\partial x_j} \frac{\partial w_h}{\partial x_i})|$ lorsque $K \subset \Omega^*$, il vient à partir de

(5.5.2)

$$(5.5.3) \quad \left| \begin{array}{l} \forall w_h \in V_{oh}, |a(\Pi_h u, w_h) - a_h(\Pi_h u, w_h)| \leq \\ C h^k \left(\sum_{i,j=1}^2 \|a_{ij}\|_{k,\infty,\Omega} \right) \|u\|_{k+1,p,\Omega} |w_h|_{1,\Omega} \end{array} \right.$$

De même, à partir de (5.2.32), en utilisant le théorème 5.4.4 et des majorations classiques (cf. CIARLET [26]) de $|E_K^2(fw_h)|$ lorsque $K \subset \Omega^*$, on montre que

$$(5.5.4) \quad \left| \forall w_h \in V_{oh} / |f(w_h) - f_h(w_h)| \leq C h^k |f|_{k,p,\Omega} |w_h|_{1,\Omega} \right. .$$

Enfin d'après (4.4.21) et (1.2.17)

$$(5.5.5) \quad \left| |u - \Pi_h u|_{1,\Omega} \leq C h^k |u|_{k+1,\Omega} \right. .$$

Alors des relations (5.5.3), (5.5.4) et (5.5.5) on déduit le résultat par un raisonnement identique à celui utilisé dans la démonstration du théorème 6.1 de [5] .

5.6. REMARQUES SUR LES EXEMPLES NUMERIQUES

5.6.1 Considérations sur les formules de quadrature

Cas des éléments finis rationnels de Serendip de degrés 1,2,3,4 ou d'Hermite de degré 3 sur un quadrilatère

Les formules d'intégration numérique utilisées sont indiquées dans l'article d'APPRATO-ARCANGELI [5] et rappelées ici dans le §.5.2.

Les calculs effectifs du cas $k = 1$ sont données dans [5].

Il est clair que pour les éléments finis rationnels de degré élevé la complexité des calculs des poids (qui dépendent de K) est un élément qui ne favorise pas leur utilisation.

Cas des éléments finis rationnels de Lagrange de degré 1, 2 ou 3, ou de l'élément fini rationnel d'Hermite de degré 3, sur un hexagone régulier

Le théorème 5.2.1 montre l'existence de formules de quadrature numérique convenables. Mais le problème de la construction effective de formules de quadrature reste posé ; il reste en particulier à trouver les formules de quadrature optimales i.e. faisant intervenir le nombre optimal L_0 de noeuds d'intégration ($L_0 \geq \dim P_{k+4}(\hat{K})$) dans le cas de l'approximation du 1er membre de (5.2.2) si k est le degré des éléments finis rationnels utilisé).

Dans l'annexe ci-jointe on donne une méthode permettant d'obtenir

des formules de quadrature optimales lorsqu'on utilise des éléments finis rationnels de degré 1 .

5.6.2 Essai de comparaison entre éléments finis polynomiaux et éléments finis rationnels

On se place dans la situation particulière suivante : on suppose que pour l'approximation d'un problème elliptique modèle d'ordre deux donné sur un ouvert polygonal Ω de \mathbb{R}^2 (cf. §.5.1 et 5.2), on utilise successivement une méthode par éléments finis triangulaires ou rectangulaires de Lagrange (polynomiaux) et une méthode par éléments finis rationnels de type hexagone régulier de degré 3 .

On considère alors une famille régulière de triangulations (\mathcal{T}_{h_T}) de $\bar{\Omega}$ par des triangles équilatéraux égaux de diamètres h_T , une famille régulière de triangulations (\mathcal{T}_{h_H}) de $\bar{\Omega}$ par des hexagones réguliers égaux de diamètres h_H et une famille régulière de triangulations (\mathcal{T}_{h_C}) de $\bar{\Omega}$ par des carrés égaux de diamètres h_C , ces triangulations contenant également en général (pour pouvoir "triangler" jusqu'au bord) des triangles quelconques, comme indiqué dans les relations (5.1.4) ; on suppose bien entendu que les espaces V_h correspondants aux triangulations ci-dessus vérifient l'hypothèse $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$ ($h = h_T, h_H$ ou h_C suivant les cas).

D'autre part, on désigne par Π_{h_T} (resp. Π_{h_H} ou Π_{h_C}) l'opérateur de V_{h_T} -interpolation (resp. de V_{h_H} -interpolation ou de V_{h_C} -interpolation). De plus, on définit les ouverts Ω_T , Ω_H et Ω_C de telle manière que

$$(5.6.1) \quad \left. \begin{aligned} \bar{\Omega}_T &= \bigcup_{K \in \mathcal{T}_{h_T}} K && , \\ &K \text{ triangle équilatéral} \\ \bar{\Omega}_H &= \bigcup_{K \in \mathcal{C}_{h_H}} K && , \\ &K \text{ hexagone régulier} \\ \bar{\Omega}_c &= \bigcup_{K \in \mathcal{C}_{h_c}} K && . \\ &K \text{ carré} \end{aligned} \right\}$$

On définit également sur $H^1(\Omega)$ la norme $[[\cdot]]_{1,\Omega}$ par

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad [[v]]_{1,\Omega}^2 = [v]_{0,\Omega}^2 + [v]_{1,\Omega}^2 .$$

Position du problème

Le problème que l'on se pose ici est d'essayer d'évaluer dans les différents cas le coût de la résolution numérique du problème, à savoir celui correspondant au temps mis pour construire le système linéaire correspondant au problème numérique approché, ainsi que celui nécessaire à la résolution de ce système (le temps de construction du système étant en général sensiblement moindre que le temps de résolution).

Pour comparer ces coûts, on se fixe un point de départ identique pour les différentes méthodes : on raisonne à majorations de l'erreur d'approximation égales (cf. théorème 5.5.1). Cependant, étant donné que dans

ces majorations, les contributions des erreurs de consistance font intervenir des constantes inconnues, liées à des équivalences de normes (cf. démonstrations des théorèmes 5.4.3 et 5.4.4), on se limite ici à raisonner uniquement, à partir de majorations égales de l'erreur d'interpolation en norme $H^1(\Omega)$.

Alors, si l'on utilise des méthodes d'éléments finis de degré k (et de classe C^0), on obtient, dans le cas des triangulations \mathcal{T}_{h_T} par exemple, pour tout $u \in H^{k+1}(\Omega)$:

$$(5.6.2) \quad \left| \quad \left[[u - \Pi_{h_T} u] \right]_{1, \Omega_T} \leq \mathcal{G}_T [u]_{k+1, \Omega_T} h_T^k \quad , \right.$$

$$(5.6.3) \quad \left| \quad \left[[u - \Pi_{h_T} u] \right]_{1, \Omega - \Omega_T} \leq \mathcal{G}_T^* [u]_{k+1, \Omega - \Omega_T} h_T^k \quad . \right.$$

Il est clair, compte tenu de (5.1.4), que pour h_T suffisamment petit, $[u]_{k+1, \Omega - \Omega_T}$ est négligeable devant $[u]_{k+1, \Omega_T}$, donc que la majoration (5.6.2) est une majoration significative de l'erreur $\left[[u - \Pi_{h_T} u] \right]_{1, \Omega}$, et que l'on peut même sans inconvénient dans (5.6.2) remplacer $[u]_{k+1, \Omega_T}$ par $[u]_{k+1, \Omega}$ si h_T est assez petit.

Notons également que dans l'évaluation de majorations de l'erreur $\left[[u - \Pi_{h_T} u] \right]_{1, \Omega}$, le terme $[u - \Pi_{h_T} u]_{0, \Omega}$ est asymptotiquement négligeable devant le terme $\left[[u - \Pi_{h_T} u] \right]_{1, \Omega}$. On formule des remarques analogues dans le cas des triangulations \mathcal{T}_{h_c} et \mathcal{T}_{h_H} .

Construction du système linéaire

Cette construction dépend de la dimension du système linéaire donc du nombre de degrés de liberté mais surtout, par le biais de l'intégration numérique, essentiellement du nombre d'éléments de la triangulation et également du nombre de noeuds d'intégration utilisés dans les formules de quadrature numérique.

Dans ce qui suit on limite l'étude à la construction de la matrice de raideur.

A partir des résultats du chapitre 4 (parfois améliorés compte tenu de la régularité géométrique des éléments étudiés) on obtient successivement, si l'on utilise les éléments finis de degré 3 suivants :

- "triangle équilatéral de type (3)"

$$[[u-\Pi_{h_T} u]]_{1,\Omega} \sim [u-\Pi_{h_T} u]_{1,\Omega_T} \leq 0,66 [u]_{4,\Omega} h_T^3$$

- "Hexagone régulier de degré 3"

$$[[u-\Pi_{h_H} u]]_{1,\Omega} \sim [u-\Pi_{h_H} u]_{1,\Omega_H} \leq 1,82 [u]_{4,\Omega} h_H^3$$

- "Carré de Serendip de type (3)"

$$[[u-\Pi_{h_c} u]]_{1,\Omega} \sim [u-\Pi_{h_c} u]_{1,\Omega_c} \leq 0,84 [u]_{4,\Omega} h_c^3 .$$

D'après ce qui a été dit ci-dessus, on suppose maintenant que l'on a

$$(5.6.4) \quad \left| \begin{array}{l} 0,66 h_T^3 = 1,82 h_H^3 = 0,84 h_C^3 \end{array} \right. .$$

Si l'on désigne alors par N_T le nombre de triangles correspondant à la triangulation \mathcal{T}_{h_T} , puis par N_H le nombre d'hexagones réguliers correspondant à la triangulation \mathcal{T}_{h_H} , par N_C le nombre de carrés correspondant à la triangulation \mathcal{T}_{h_C} , on a asymptotiquement, compte tenu de (5.6.4) et des aires des éléments géométriques concernés :

$$(5.6.5) \quad \left| \begin{array}{l} N_T \sim 0,77 N_H, \quad N_C \sim 0,73 N_H \end{array} \right. .$$

Indiquons également que les formules de quadrature numérique (utilisées dans les premiers membres des équations du système (5.2.8)) sur chaque élément de la triangulation utilisent un nombre de noeuds d'intégration qui suivant les cas est (au minimum)

$$(5.6.6) \quad \left| \begin{array}{l} 7 \text{ (points de Gauss) pour le triangle de type (3),} \\ 36 \text{ pour l'hexagone régulier de degré 3,} \\ 15 \text{ pour le carré de type (3).} \end{array} \right.$$

Dans le cas des éléments finis triangulaires et rectangulaires on renvoie à CIARLET [26], RAVIART [68], ZIENKIEWICZ [89] .

Notons enfin que pour le nombre N' de degrés de liberté dans les différents cas, on obtient, asymptotiquement

$$\left| \begin{array}{l} N'_T \sim 4,5 N_T \text{ dans le cas des triangles} \end{array} \right.$$

$$(5.6.7) \quad \left| \begin{array}{l} N'_H \sim 8 N_H \text{ dans le cas des hexagones réguliers} \\ N'_c \sim 5 N_c \text{ dans le cas des carrés.} \end{array} \right.$$

De la même façon en utilisant des éléments finis de degré 2 on obtient successivement

- "Triangle équilatéral de type (3')"

$$[u-\Pi_{h_T} u]_{1,\Omega_T} \leq 2,05 [u]_{3,\Omega} h_T^2$$

- "Hexagone régulier de degré (3)"

$$[u-\Pi_{h_H} u]_{1,\Omega_H} \leq 3,18 [u]_{3,\Omega} h_H^2$$

- "Carré de Serendip de degré 2"

$$[u-\Pi_{h_c} u]_{1,\Omega_c} \leq 1,86 [u]_{3,\Omega} h_c^2 .$$

Supposant alors que

$$(5.6.8) \quad \left| \quad 2,05 h_T^2 = 3,18 h_H^2 = 1,86 h_c^2 \quad , \right.$$

on obtient,

$$(5.6.9) \quad \left| \quad N_T \sim 0,97 N_H \quad , \quad N_c \sim 0,77 N_H \quad . \right.$$

Le nombre de noeuds d'intégration utilisés étant, suivant les cas (au minimum)

$$(5.6.10) \quad \left| \begin{array}{l} 7 \text{ (sommets, milieux des côtés, centre de gravité) pour le} \\ \text{triangle de type (3')} \text{ ,} \\ 28 \text{ pour l'hexagone régulier de degré 2 ,} \\ 8 \text{ pour le carré de Serendip de degré 2 .} \end{array} \right.$$

Le nombre des degrés de liberté, N' , dans les différents cas, est asymptotiquement égal à

$$(5.6.11) \quad \left| \begin{array}{l} N'_T \sim 3,5 N_T \\ N'_H \sim 5 N_H \\ N'_c \sim 3 N_c \end{array} \right. .$$

Résolution numérique du système linéaire (cf. PERRONNET [67])

On sait que le temps de résolution croît avec la dimension du système, soit le nombre N' des relations (5.6.7) et (5.6.11) et également avec la largeur de bande de la matrice qui dépend pour une large part de l'implémentation de la méthode.

Indiquons simplement, dans le cas des éléments finis de degré 3 utilisés ci-dessus, que le nombre d'éléments non nuls par ligne de la matrice de raideur est successivement

$$(5.6.15) \quad \left| \begin{array}{l} 37 \text{ pour le triangle équilatéral de type (3),} \\ 43 \text{ pour l'hexagone régulier de degré 3 ,} \end{array} \right.$$

33 pour le carré de Serendip de degré 3 .

Si l'on utilise des éléments finis de degré 2, le nombre de termes non nuls par ligne de la matrice de raideur est

(5.6.16) $\left\{ \begin{array}{l} 31 \text{ pour le triangle équilatéral de type (3')} \\ 28 \text{ pour l'hexagone régulier de degré 2} \\ 21 \text{ pour le carré de Serendip de degré 2} \end{array} \right.$

En définitive si les relations (5.6.5), (5.6.6), (5.6.7) et (5.6.15) font apparaître un coût plus grand dans la construction et la résolution du système linéaire si l'on utilise des hexagones réguliers de degré 3 au lieu de triangles équilatéraux de type (3) ou de carrés de Serendip de degré 3, par contre les relations (5.6.9), (5.6.10), (5.6.11) et (5.6.16) suggèrent un jugement plus nuancé.

Comme de plus tous ces résultats sont obtenus à partir de majorations (rappelons aussi que la méthode de comparaison utilisée néglige les erreurs de consistance), les conclusions que l'on peut en déduire ne peuvent présenter qu'un caractère indicatif.

Remarque 5.6.1 Résultats en norme $L^2(\Omega)$

Indiquons pour mémoire quelques résultats concernant l'erreur d'interpolation en norme $L^2(\Omega)$.

- Triangle équilatéral de type (3)

$$[u-\Pi u]_{0,\Omega_T} \leq 0,09 [u]_{4,\Omega} h^4 ,$$

- Hexagone régulier de degré 3

$$[u-\Pi u]_{0,\Omega_H} \leq 0,23 [u]_{4,\Omega} h^4 ,$$

- Carré de Serendip de degré 3

$$[u-\Pi u]_{0,\Omega_c} \leq 0,12 [u]_{4,\Omega} h^4 ,$$

- Triangle équilatéral de type (3')

$$[u-\Pi u]_{0,\Omega_T} \leq 0,41 [u]_{3,\Omega} h^3 ,$$

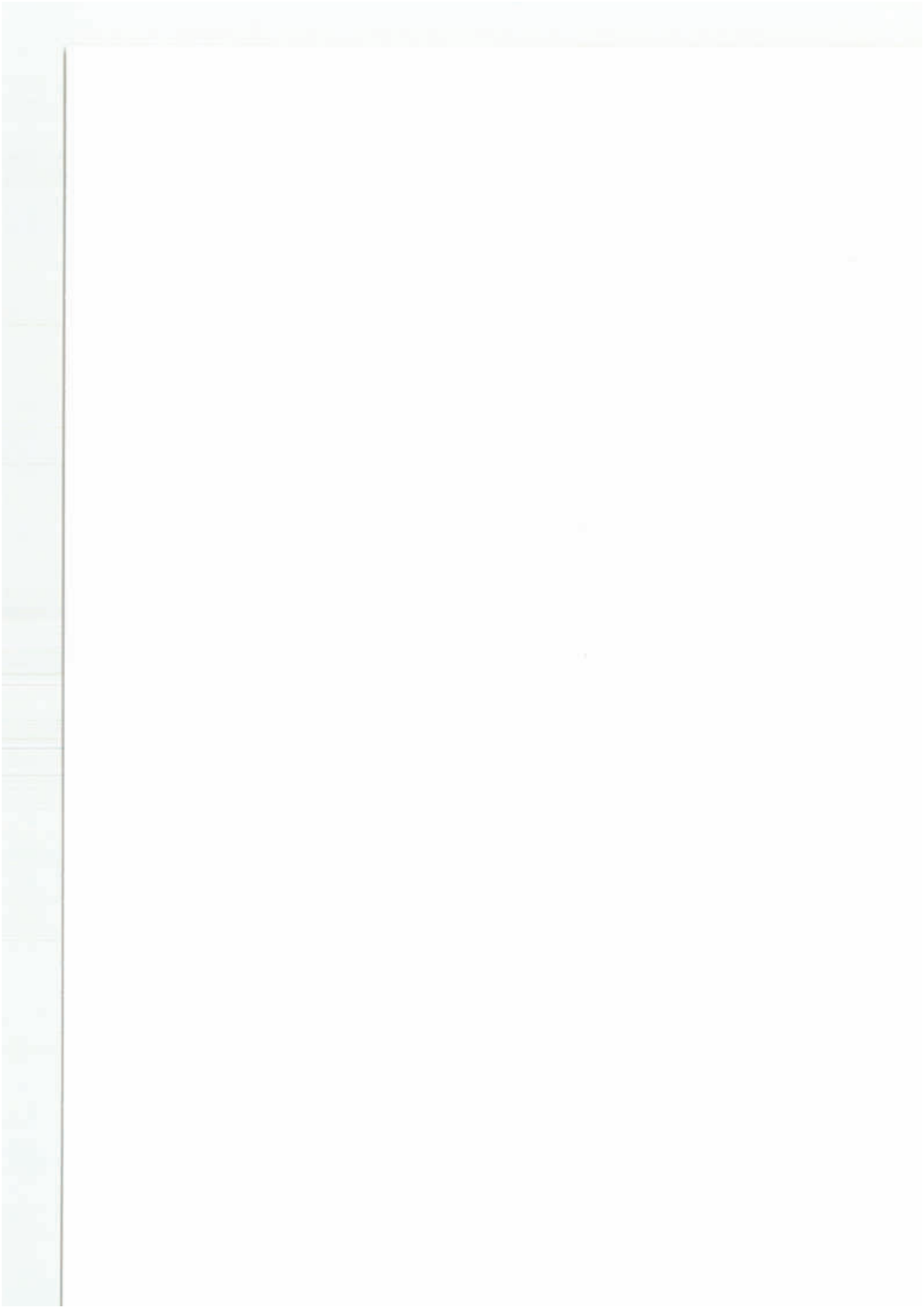
- Hexagone régulier de degré 2

$$[u-\Pi u]_{0,\Omega_H} \leq 0,58 [u]_{3,\Omega} h^3 ,$$

- Carré de Serendip de degré 2

$$[u-\Pi u]_{0,\Omega_c} \leq 0,35 [u]_{3,\Omega} h^3 .$$

*



A N N E X E

Au paragraphe 5.2.2 on montre, en particulier par le théorème 5.2.3 l'existence de formules de quadratures de la forme (5.2.13) et vérifiant les hypothèses (5.2.15) mais à priori non optimales quant au nombre de noeuds d'intégration. Ainsi pour une formule de la forme (5.2.13) exacte sur $P_5(K)$ où K est un hexagone régulier, le nombre optimal de points est 21.

La recherche d'une telle formule à 21 points peut s'effectuer par voie numérique.

Remarquons d'abord que \hat{K} étant l'hexagone régulier introduit au §.5.2.2, si $\hat{\psi} \in P_5(\hat{K})$ est de la forme

$$\hat{\psi}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \sum_{0 \leq i+j \leq 5} \alpha_{ij} \hat{x}_1^i \hat{x}_2^j ,$$

on a

$$(A.1) \quad \left| \int_{\hat{K}} \frac{\hat{\psi}(\hat{x}) d\hat{x}}{\left(\frac{3}{4} - \hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2\right)^2} = \alpha_{00} \frac{4 \text{Log } 2}{\sqrt{3}} + (\alpha_{20} + \alpha_{02}) I_1 + (\alpha_{40} + \alpha_{04}) I_2 + \alpha_{22} I_3 \right.$$

avec

$$I_1 = \frac{\sqrt{3} \text{Log } 2}{2} - \pi \text{Log } 2 + 3 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \text{Log}(3 - t g^2 \theta) d\theta ,$$

$$I_2 = 3I_3 = \frac{9\sqrt{3}}{64} + \frac{9\sqrt{3} \text{Log } 2}{32} - \frac{9\pi}{8} \text{Log } 2 + \frac{27}{8} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \text{Log}(3 - t g^2 \theta) d\theta .$$

$$\text{Par convention on notera } I_0 = \frac{4 \text{Log } 2}{\sqrt{3}} .$$

D'autre part on obtient la valeur approchée

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \text{Log}(3 - \text{tg}^2 \theta) d\theta \approx 0,556705 \quad .$$

Les intégrales I_0, I_1, I_2 et I_3 sont strictement positives.

Soit alors l'ensemble E de 21 points appartenant à \hat{K} défini par

$$(A.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \left\{ (0,0), (x_i, y_i), (-x_i, y_i), (x_i, -y_i), (-x_i, -y_i), (y_i, x_i), (-y_i, x_i) \right. \\ \quad (y_i, -x_i), (-y_i, -x_i), (x_j, y_j), (-x_j, y_j), (x_j, -y_j), (-x_j, -y_j) \\ \quad (y_j, x_j), (-y_j, x_j), (y_j, -x_j), (-y_j, -x_j), (x_m, x_m), (x_m, -x_m) \\ \quad \left. (-x_m, x_m), (-x_m, -x_m) ; x_i, y_i, x_j, y_j, x_m > 0 \text{ et distincts } 2 \text{ à } 2 \right\} \\ \text{avec } E \subset \hat{K} \quad . \end{array} \right.$$

Remarquant alors que

$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, m+n \text{ impair}, [\hat{x}^m \hat{y}^n + (-\hat{x})^m \hat{y}^n + \hat{x}^m (-\hat{y})^n + (-\hat{x})^m (-\hat{y})^n] = 0$
on obtient pour tout $\hat{\psi} \in P_5(\hat{K})$

$$(A.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\hat{x} \in E} B_{\hat{x}} \psi(\hat{x}) = [B_0 + 8B_i + 8B_j + 4B_m] \alpha_{00} \\ \quad + 4[x_i^2 + y_i^2] B_i + (x_j^2 + y_j^2) B_j + x_m^2 B_m (\alpha_{20} + \alpha_{02}) \\ \quad + 4[(x_i^4 + y_i^4) B_i + (x_j^4 + y_j^4) B_j + x_m^4 B_m] (\alpha_{40} + \alpha_{04}) \\ \quad + 4[2x_i^2 y_i^2 B_i + 2x_j^2 y_j^2 B_j + x_m^4 B_m] \alpha_{22} \quad , \end{array} \right.$$

en ayant choisi des poids $B_{\hat{x}}$ égaux pour les points analogues (B_0 pour $(0,0)$, B_i pour les 8 points liés à (x_i, y_i) , B_j pour les 8 points liés à (x_j, y_j) et B_m pour les 4 points liés à (x_m, x_m)).

Pour construire alors une formule de quadrature du type (5.2.13) à 21 points, il suffit, compte tenu de (A.1), (A.2) et (A.3), de résoudre le système

$$(A.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_0 + 8B_i + 8B_j + 4B_m = I_0 \\ (x_i^2 + y_i^2)B_i + (x_j^2 + y_j^2)B_j + x_m^2 B_m = \frac{1}{4} I_1 \\ (x_i^4 + y_i^4)B_i + (x_j^4 + y_j^4)B_j + x_m^4 B_m = \frac{1}{4} I_2 \\ 2x_i^2 y_i^2 B_i + 2x_j^2 y_j^2 B_j + x_m^4 B_m = \frac{1}{4} I_3 \end{array} \right.$$

Utilisant les coordonnées polaires et posant

$$(A.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_i = r_i \cos \theta_i \quad x_j = r_j \cos \theta_j \quad x_m = r_m \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_i = r_i \sin \theta_i \quad y_j = r_j \sin \theta_j \end{array} \right. ,$$

on obtient le système, équivalent à (A.4),

$$(A.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_0 + 8B_i + 8B_j + 4B_m = I_0 \\ r_i^2 B_i + r_j^2 B_j + r_m^2 \frac{1}{2} B_m = \frac{I_1}{4} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} r_i^4 B_i + r_j^4 B_j + r_m^4 \frac{1}{2} B_m & = \frac{I_2 + I_3}{4} \\ r_i^4 \cos^2(2\theta_i) B_i + r_j^4 \cos^2(2\theta_j) B_j & = \frac{I_2 - I_3}{4} \end{cases}$$

Rappelons que les solutions de ce système doivent être strictement positives. Le déterminant du système (A.6), soit Δ , vaut

$$(A.7) \quad \Delta = \frac{r_i^2 r_j^2 r_m^2}{2} \left[r_j^2 \cos^2(2\theta_j) (r_i^2 - r_m^2) + r_i^2 \cos^2(2\theta_i) (r_m^2 - r_j^2) \right]$$

par suite

$$\Delta > 0 \text{ si } (r_j < r_m < r_i \text{ et } \cos(2\theta_j) \neq 0, \cos(2\theta_i) \neq 0) .$$

Posant $\theta_j = \frac{\pi}{12}$ et $\theta_i = \frac{\pi}{8}$, on obtient

$$(A.8) \quad \Delta = \frac{r_i^2 r_j^2 r_m^2}{2} \left[\frac{3}{4} r_j^2 (r_i^2 - r_m^2) + \frac{r_i^2}{2} (r_m^2 - r_j^2) \right] .$$

Ayant calculé B_i , B_j et B_m en fonction de r_j , r_m et r_i , puis fait varier les quantités r_j , r_m et r_i pour obtenir des solutions B_o , B_i , B_j et B_m positives et des points intérieurs à \hat{K} , on peut choisir

$$r_m = \sqrt{\frac{I_2 + I_3}{I_1}}, \quad r_i = \lambda \sqrt{\frac{I_2 + I_3}{I_1}}, \quad r_j = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{I_2 + I_3}{I_1}},$$

et on trouve, comme condition sur λ

$$(A.9) \quad \left| \quad 1 < \lambda < \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{I_1}{I_2 + I_3}} \quad , \quad \right.$$

les solutions étant alors

$$(A.10) \quad \left\{ \begin{aligned} B_i &= \frac{\lambda^4 I_1^2}{8(3\lambda^2+2) I_3} , \quad B_j = \frac{I_1^2}{8\lambda^2(3\lambda^2+2)I_3} , \quad B_m = \frac{\lambda^2 I_1^2}{8I_3(3\lambda^2+2)} \\ B_o &= I_o - 8B_i - 8B_j - 4B_m . \end{aligned} \right.$$

Numériquement on obtient

$$(A.11) \quad \left\{ \begin{aligned} I_o &\approx 1,6006 , \quad I_1 \approx 0,0929 , \quad I_2 \approx 0,0105 , \quad I_3 \approx 0,0035 \\ r_m &\approx 0,3882 \quad 1 < \lambda < 1,11 \quad \text{par exemple } \lambda = \frac{21}{20} \\ r_i &\approx 0,4076 , \quad r_j \approx 0,3697 \\ B_i &\approx 0,0705 , \quad B_j \approx 0,0526 , \quad B_m \approx 0,0639 , \quad B_o \approx 0,3405 \end{aligned} \right.$$

Finalement on obtient la formule

$$\int_{\hat{K}} \frac{\hat{\psi}(\hat{x}) d\hat{x}}{\left(\frac{3}{4} - \hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2\right)^2} = \sum_{\lambda=1}^{21} B_\lambda \hat{\psi}(\hat{b}_\lambda) ,$$

avec

$$\hat{b}_1 = (0,0)$$

$$B_1 = 0,3402$$

$$\hat{b}_2 = (r_i \cos \frac{\pi}{8} , r_i \sin \frac{\pi}{8})$$

$$B_2 = 0,0705$$

$$r_i = 0,4076$$

$$\hat{b}_3 = (r_i \cos \frac{\pi}{8} , -r_i \sin \frac{\pi}{8})$$

$$B_3 = "$$

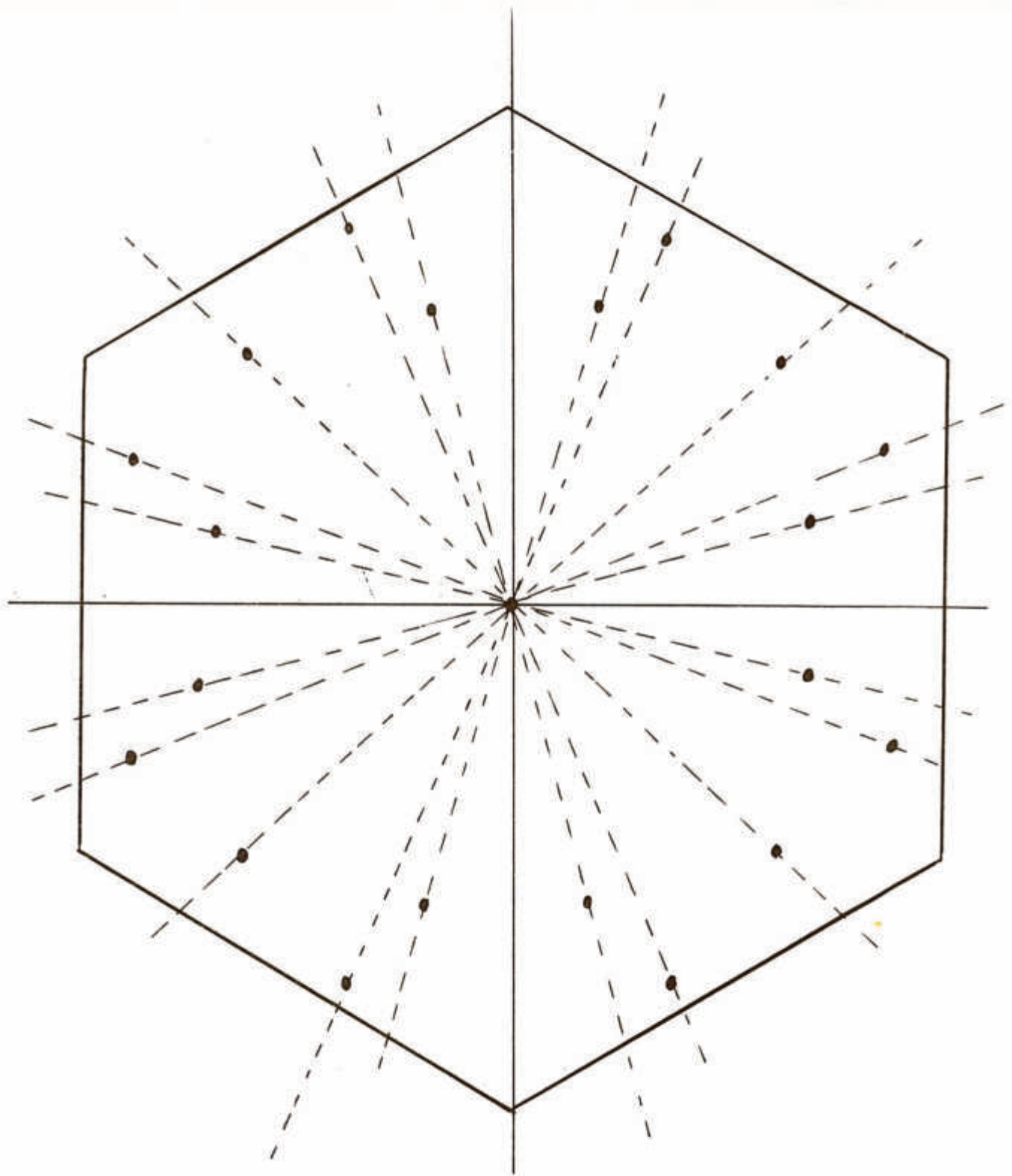
"

$\hat{b}_4 = (-r_i \cos \frac{\pi}{8}, r_i \sin \frac{\pi}{8})$	$B_4 = 0,0705$	$r_i = 0,4076$
$\hat{b}_5 = (-r_i \cos \frac{\pi}{8}, -r_i \sin \frac{\pi}{8})$	$B_5 = "$	$"$
$\hat{b}_6 = (r_i \sin \frac{\pi}{8}, r_i \cos \frac{\pi}{8})$	$B_6 = "$	$"$
$\hat{b}_7 = (r_i \sin \frac{\pi}{8}, -r_i \cos \frac{\pi}{8})$	$B_7 = "$	$"$
$\hat{b}_8 = (-r_i \sin \frac{\pi}{8}, +r_i \cos \frac{\pi}{8})$	$B_8 = "$	$"$
$\hat{b}_9 = (-r_i \sin \frac{\pi}{8}, -r_i \cos \frac{\pi}{8})$	$B_9 = "$	$"$
$\hat{b}_{10} = (r_j \cos \frac{\pi}{12}, r_j \sin \frac{\pi}{12})$	$B_{10} = 0,0526$	$r_j = 0,3697$
$\hat{b}_{11} = (r_j \cos \frac{\pi}{12}, -r_j \sin \frac{\pi}{12})$	$B_{11} = "$	$"$
$\hat{b}_{12} = (-r_j \cos \frac{\pi}{12}, r_j \sin \frac{\pi}{12})$	$B_{12} = "$	$"$
$\hat{b}_{13} = (-r_j \cos \frac{\pi}{12}, -r_j \sin \frac{\pi}{12})$	$B_{13} = "$	$"$
$\hat{b}_{14} = (r_j \sin \frac{\pi}{12}, r_j \cos \frac{\pi}{12})$	$B_{14} = "$	$"$
$\hat{b}_{15} = (r_j \sin \frac{\pi}{12}, -r_j \cos \frac{\pi}{12})$	$B_{15} = "$	$"$
$\hat{b}_{16} = (-r_j \sin \frac{\pi}{12}, r_j \cos \frac{\pi}{12})$	$B_{16} = "$	$"$
$\hat{b}_{17} = (-r_j \sin \frac{\pi}{12}, -r_j \cos \frac{\pi}{12})$	$B_{17} = "$	$"$
$\hat{b}_{18} = (\frac{\sqrt{2}}{2} r_m, \frac{\sqrt{2}}{2} r_m)$	$B_{18} = 0,0639$	$r_m = 0,3882$

$$\hat{b}_{19} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r_m, -\frac{\sqrt{2}}{2} r_m \right) \quad B_{19} = 0,0639 \quad r_m = 0,3882$$

$$\hat{b}_{20} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} r_m, \frac{\sqrt{2}}{2} r_m \right) \quad B_{20} = \quad " \quad "$$

$$\hat{b}_{21} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} r_m, -\frac{\sqrt{2}}{2} r_m \right) \quad B_{21} = \quad " \quad "$$





B I B L I O G R A P H I E

- [1] ADINI A. et R.W. CLOUGH : Analysis of plate bending by the finite element method, N.S.F, report G 7337 (1961).
- [2] ALBRECHT J. et COLLATZ L. : Zur numerischen Auswertung mehrdimensionaler Integrale ZAMM 38, 1-15 (1958).
- [2] AMIOT : Quelques aspects théoriques de l'interpolation de Lagrange et ses applications à la méthode des éléments finis dans \mathbb{R}^2 , Travail de fin d'étude à l'E.N.P.C. (1972).
- [4] APPRATO D. : Thèse 3ème cycle, Pau (1978).
- [5] APPRATO D. et ARCANGELI R. : Approximation d'un problème aux limites elliptique d'ordre deux par éléments finis rationnels de Wachspress avec intégration numérique, R.A.I.R.O. Analyse Numérique vol.13, n° 1, p.3-20 (1979).
- [6] APPRATO D., ARCANGELI R. et GOUT J.L. : Sur les éléments finis rationnels de Wachspress, Numer. Math. 32, 247-270, (1979).
- [7] APPRATO D., ARCANGELI R. et GOUT J.L. : Rational Interpolation of Wachspress error estimates, Comp. and Math. with Appl. vol.5, p.337-347, (1979).
- [8] ARCANGELI R. et GOUT J.L. : Sur l'évaluation de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert de \mathbb{R}^n , R.A.I.R.O. Analyse Numérique 10, p.5-27, (1976).
- [9] ARCANGELI R., GOUT J.L. et ROYER R. : Etude de l'erreur d'interpolation rationnelle de Wachspress sur un polygone. Public. Math. de Pau, (1976).
- [10] ARGYRIS J.H., FRIED I. et SCHARPF D.W. : The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method. The Aeronautical J.R. Ac. S. 72, 701-709 (1968).

- [11] ATTEIA M. : Evaluation de l'erreur dans la méthode des éléments finis. *Numer. Math.*, vol.28, 295-306, (1977).
- [12] BARNHILL R.E. et WHITEMAN J.R. : Error analysis of finite element methods with triangles for elliptic boundary value problems in the mathematics of finite elements and applications (J.R. Whiteman Ed.) p.83-112, London, Academic Press, (1973).
- [13] BELL K. : A refined triangular plate bending element. *Intern. J. Numer. Methods Engrg* 1, 101-122 (1969).
- [14] BERNADOU M. : Sur l'analyse numérique du modèle linéaire de coques minces de W.T. KOITA, Thèse d'Etat Paris VI (1978).
- [15] BERNADOU M. et DUCATEL Y. : Méthodes conformes d'éléments finis pour des problèmes elliptiques du quatrième ordre avec intégration numérique, *R.A.I.R.O. Analyse Numérique*, 12, vol. 1 , 3-26, (1978).
- [16] BRAMBLE J.H. et HILBERT S.R.: Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with applications to Fourier transforms and spline interpolation *SIAM J. Numer. Anal.* 7, p.112-124 (1970).
- [17] BRAMBLE J.H. et HILBERT S.R. : Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation, *Numer. Math.* 16, p.326-369 (1971).
- [18] BRUDNYI J.A. : Piecewise polynomial approximation, embedding theorem and rational approximation in approximation theory (Colloquium Bonn, 8-11 Juin 1976) R. SCHABACK et K. SCHERER ed. *Lecture Notes in Math.* Springer Verlag, New-York, p.73-98.
- [19] CARTAN H. : *Calcul différentiel*, Hermann, Paris (1967).
- [20] CEA J. : Approximation variationnelle des problèmes aux limites. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 14, 345-444 (1964).

- [21] CHENIN P. : Thèse 3ème cycle, Grenoble (1974).
- [22] CHENIN P. : Une représentation intégrale de l'erreur d'interpolation
Numer. Math. vol.32, p.461-479, (1979).
- [23] CIARLET P.G. : Orders of convergence in finite element methods in
the Mathematics of finite elements and applications (J.R.
Whiteman, Editor) p.113-129, Academic Press London (1973).
- [24] CIARLET P.G. : Sur l'élément de Clough et Tocher. R.A.I.R.O. Analyse
Numérique R-2, p.19-27, (1974).
- [25] CIARLET P.G. : Numerical Analysis of the finite element method. Sémi-
naire de Mathématiques Supérieures. Presses de l'Université
de Montréal (1976) .
- [26] CIARLET P.G. : The finite element method for elliptic problems, North
Holland, (1977).
- [27] CIARLET P.G. et RAVIART P.A. : General Lagrange and Hermite interpola-
tion in \mathbb{R}^n with applications to finite element methods Arch.
Rational Mech. Anal. 46, 177-199, (1972).
- [28] CIARLET P.G. et RAVIART P.A. : Interpolation theory over curved ele-
ments, with applications to finite element methods. Comput. Me-
thods Appl. Mech. Engrg 1, p.217-249, (1972).
- [29] CIARLET P.G. et RAVIART P.A. : The combined effect of curved boundaries
and numerical integration in isoparametric finite element methods,
in the Mathematical foundations of the finite element method with
applications to partial differential equations (A.K. Aziz, Editor)
p.409-474, Academic Press, New-York (1972).
- [30] CIARLET P.G. et WAGSCHAL C. : Multipoint Taylor formulas and applica-
tions to the finite element method, Numer. Math. 17, p.84-100
(1971).

- [31] CIAVALDINI J.F. et NEDELEC J.C. : Sur l'élément de Fraeijs de Veubeke et Sander. R.A.I.R.O. Anal. Num. R.2, p.29-45, (1974).
- [32] COATMELEC C. : Approximation et interpolation des fonctions différentiables de plusieurs variables. Ann. Sci. Ecol. Norm. Sup. 83, p.271-341, (1966).
- [33] DAVIS P.J. : On simple quadratures, Proc. Amer. Math. Soc. 4, p.127-136, (1953).
- [34] DAVIS P.J. : Interpolation and approximation, Blaisdell, New-York, (1963).
- [35] DAVIS P.J. : Construction of nonnegative approximate quadratures, Math. Comp. 21, p.578-582 (1967).
- [36] DAVIS P.J. et RABINOWITZ P. : Methods of numerical integration, Academic Press, New-York, (1975).
- [37] DESCLOUX J. : Méthode des éléments finis. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (1973).
- [38] DESCLOUX J. et MEINGUET J. : An operator theoretical approach to error estimation. Numer. Math. 27, 307-326 (1977).
- [39] DUCHON : Thèse d'Etat, Grenoble (1980).
- [40] DUPUIS G. et GOËL J.J. : Finite elements with a high degree of regularity. Internat. J. Numer. Methods Engrg 2, p.563-577, (1970).
- [41] FIX G.J. : Effects of quadrature errors in finite element approximation of steady state, eigenvalue and parabolic problems, dans "The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations" A.K. Aziz Ed. Academic Press, New-York, p.525-556, (1972).
- [42] GASCA M. et MAETZU J.I. : On Lagrange and Hermite interpolation in \mathbb{R}^k (à paraître).

- [43] GELINAS J. : Ph.D. (1977) Théorèmes réciproques pour l'approximation polynomiale par morceaux , Montréal .
- [44] GOUT J.L. : Thèse 3ème cycle Pau (1976).
- [45] GOUT J.L. : Estimation de l'erreur d'interpolation d'Hermite dans \mathbb{R}^n . Numer. Math. 28, p.407-429, (1977).
- [46] GOUT J.L. : Sur la construction et l'étude de l'erreur d'interpolation pour un élément fini rationnel de Serendip de degré 4 sur un quadrilatère. Publications Math. de Pau (1978).
- [47] GOUT J.L. : Construction of an Hermite rational interpolation Wachspress type finite element, Computer and Math. with Applic. vol.5, p.337-347 (1979).
- [48] GOUT J.L. : Interpolation error estimates on Hermite rational Wachspress type third degree finite element, Comp. and Math. with Applic. vol.5, p.349-357, (1979).
- [49] GOUT J.L. : Elements finis rationnels de Wachspress sur un polygone, construction, erreur d'interpolation et effet de l'intégration numérique. Séminaire d'Analyse Numérique, Grenoble, (1980).
- [50] GOUT J.L. : Sur les éléments finis rationnels pentagonaux et hexagonaux de degrés 1 et 2, Public. Math. de Pau, (1979).
- [51] GOUT J.L. : Construction et étude de l'erreur pour un élément fini rationnel de degré 3 sur un hexagone régulier, Public. Math. de Pau, (1979).
- [52] GOUT J.L. : Effet de l'intégration numérique pour la résolution d'un problème d'ordre deux, par éléments finis rationnels sur un quadrilatère ou un hexagone régulier (à paraître).
- [53] HILBERT S. : A mollifier useful for approximation in Sobolev spaces and some applications to approximating solutions of differential equations. Math. Comp. 27, p.81-89, (1973).

- [54] IRONS B.M. : Comments on "Complete polynomial displacements fields for finite element method" by D.C. DUNNE. The Aeronautical J.R. Acad. Sc. 72, p.709 , (1968).
- [55] JAMET P. : Estimations d'erreur pour des éléments finis droits presque dégénérés, R.A.I.R.O., Anal. Numer. 10, p.43-61, (1976).
- [56] KRYLOV V.I. : Approximate calculation of integrals, Mac Millan, New-York, (1962).
- [57] LIONS J.L. : Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles. Presses de l'Université de Montréal, Montréal.
- [58] MAC LEOD R. : Hermite interpolation over curved finite elements, Journal of Approx. Theory 19 n° 2, p.101-117, (1977).
- [59] MEINGUET J. : Realistic estimates for generic constants in multivariate pointwise approximation in topics in numerical analysis. vol. II (J.J.H. Miller ed.) London, Academic Press, (1975).
- [60] MEINGUET J. : Structure et estimations de coefficients d'erreurs. R.A.I.R.O. Anal. Numer. vol.11, 355-368, (1977).
- [61] MIKLIN S.G. : The numerical performance of variational methods, Volters Nordhoff, Croningen, 1971.
- [62] MITCHELL A.R. : An introduction to the mathematics of the finite element method. Proceedings of "The mathematics of finite elements and applications" Brunel University p.37-58, Ed. J.R. Whiteman, Academic Press, Londres, (1973).
- [63] MORREY C.B. : Multiple integrals in the calculus of variations. New-York Springer (1966).
- [64] NATTERER F. : Berethenbare Fehlerschranken für die Methode der finiten elemente. In : ISNM 28, p.109-121 Basel Birkhäuser, (1975).
- [65] ^vNECAS J. : Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques Masson, (1967).

- [66] NITSCHKE J. et NITSCHKE J.C.C. : Error estimates for the numerical solution of elliptic differential equations, Arch. Rat. Mech. Anal. 5, p.293-306, (1960).
- [67] PERONNET A. : Cours D.E.A. Université Paris VI, (1980).
- [68] RAVIART P.A. : Méthode des éléments finis, rédigé par J.M. THOMAS. D.E.A. Analyse Numérique, Paris VI, (1971-1972).
- [69] SALMON G. : A treatise on the higher plane curves printed at the University of Dublin, (1852).
- [70] SCHULTZ M.J. : L^∞ -multivariate approximation theory SIAM J. Numer. Anal. 6, p.161-183, (1969).
- [71] SCOTT F. : A quartic two dimensional isoparametric element. Undergraduate Project. Univ. of Wales, Swansea, (1968).
- [72] SCOTT R. : Finite element techniques for curved boundaries. Ph.D. M.I.I., (1973).
- [73] SOPOLEV S.L. : Application of functional analysis in mathematical physics. Leningrad 1950 (traduction anglaise : A.M.S. Providence 1963).
- [74] STRANG G. : Approximation in the finite element method. Numer. Math. 19, p.81-98 , (1972).
- [75] STRANG G. : Variational crimes in the finite element method dans "the mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations. A.K. Aziz ed. Academic Press, New-York, p.689-710, New-York, (1972).
- [76] STRANG G. et FIX G.J. : An analysis of the finite element method. Prentice Hall Englewood Cliffs, (1973).
- [77] STROUD A.H. Approximate calculation of multiple integrals. Printice Hall, (1971).

- [78] TCHAKALOFF V. : Formules de cubatures mécaniques à coefficients non négatifs. Bull. Sci. Math.(2) V.81, p.123-134 MR 20. 190 (1957).
- [79] THOMAS J.M. : Sur l'analyse numérique des méthodes d'éléments finis hybrides et mixtes. Thèse d'Etat , Paris VI (1977).
- [80] THOMASSET F. : Etude d'une méthode d'éléments finis de degré 5 . Application aux problèmes de plaques et d'écoulement de fluides. Thèse de 3ème cycle Paris XI, (1974).
- [81] WACHSPRESS E.L. : A rational basis for function approximation. Proc. Conf. of Appl. Numerical Anal. Dundee. Lecture Notes in Math. 228, p.223-252, Berlin-Heidelberg - New-York : Springer (1971).
- [82] WACHSPRESS E.L. A rational basis for function approximation. Part. II, Curved sides. J. Inst. Math. Appl. II p.83-104 (1973).
- [83] WACHSPRESS E.L. : Algebraic geometry foundations for finite element computation. Conf. Numerical Sol. Diff. Eqs. Dundee. Lecture Notes in Math 363, p.177-188, Berlin-Heidelberg, New-York, Springer, (1974).
- [84] WACHSPRESS E.L. : High-order curved finite elements, Communication personnelle, (1980).
- [85] WACHSPRESS E.L. A rational finite element basis. New-York, Academic-Press, (1975).
- [86] WILHELMSSEN R. : A Markov inequality in several dimensions. Journal Approximation Theory II, p.216-220, (1974).
- [87] WILSON M.W. : A general algorithm for non negative quadratures formulas Math. Comp. v.23, p.253-258, (1969).
- [88] ŽENIŠEK A. : Hermite interpolation on simplexes in the finite element method in Proceedings Equa. Diff. 3, p.271-277, J.E. Purkyně Université
- [89] ZIENKIEWICZ O.C. : La méthode des éléments finis. Ediscience (1973).



Vu et approuvé
PAU, le

*Le Directeur de l'Institut Universitaire
de Recherche Scientifique*

J. DELFAUD

Vu et permis d'imprimer
PAU, le

*Le Président de l'Université de PAU
et des PAYS DE L'ADOUR*

D. LEVIER

