



# UNIVERSITÉ PARIS-DAUPHINE

Document de synthèse présenté pour obtenir

## L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques

par

**Nicolas FORCADEL**

Contribution à l'analyse d'équations aux dérivées  
partielles avec applications à la dynamique des  
dislocations et au contrôle optimal

soutenue le 5 décembre 2011 devant le jury composé de :

M.	Guy BARLES (rapporteur)	Université François Rabelais
M.	Frédéric BONNANS	INRIA Saclay
M.	Pierre CARDALIAGUET	Université Paris-Dauphine
M.	Hitoshi ISHII	Université de Waseda
M.	Pierre-Louis LIONS (coordinateur)	Université Paris-Dauphine
M.	Bertrand MAURY (rapporteur)	Université Paris-Sud
M.	Régis MONNEAU	Université Paris Est
M.	Panagiotis SOUGANIDIS (rapporteur)	Université de Chicago

---

# Remerciements

Je remercie très chaleureusement Régis Monneau qui a guidé mes premiers pas dans le monde de la recherche. Continuer à collaborer avec lui est toujours un grand plaisir et une source de motivation. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour les nombreux conseils qu'il a pu me prodiguer tant sur le plan mathématique que sur le plan humain.

Pierre-Louis Lions a accepté de coordonner cette habilitation et je l'en remercie profondément.

Guy Barles, Bertrand Maury et Takis Souganidis m'ont fait l'honneur d'accepter la lourde tâche de rapporter sur ce travail et je les remercie vivement de s'être intéressé à celui-ci. Je remercie également Frédéric Bonnans, Pierre Cardaliaguet et Hitoshi Ishii d'avoir accepté de faire partie du jury.

J'adresse mon amitié à Olivier Bokanowski, Ariela Briani, Elisabetta Carlini, Emiliano Cristiani, Francesca Da Lio, Ahmad El Hajj, Maurizio Falcone, Christian Gout, Carole Le Guyader, Aurélien Monteillet et Zhiping Rao avec qui j'ai noué des collaborations fructueuses et qui, je le souhaite, se poursuivront.

Hasnaa Zidani m'a accueilli en postdoctorat et m'a fait découvrir le monde du contrôle optimal. Je lui en suis très reconnaissant. Je remercie également très chaleureusement Cyril Imbert qui a grandement facilité mon intégration au CEREMADE. Travailler et discuter avec lui est toujours un réel plaisir.

Le CEREMADE est un endroit particulièrement stimulant pour mener à bien un travail de recherche et je tiens à remercier tous les membres pour la bonne ambiance qu'ils créent. Merci également à toute l'équipe du département Mido pour son efficacité.

Vient maintenant le tour de ma famille qui a joué un rôle essentiel durant toutes ces années. Je remercie tout particulièrement Marjorie, Louis et Rose pour leur soutien et pour la joie qu'ils m'apportent.

---

---

**Résumé :** Ce mémoire présente mes travaux de recherches effectués depuis le début de ma thèse, entre 2004 et 2011. Les thèmes principaux sont les équations aux dérivées partielles non linéaires, les problèmes d'évolutions de fronts, le contrôle optimal ainsi que les méthodes numériques pour résoudre ces problèmes. Il est découpé en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à l'étude de la dynamique de lignes de dislocations. On étudie les propriétés qualitatives (existence, unicité, comportement asymptotique,...) pour différents modèles. On regarde également des problèmes d'homogénéisation qui permettent de faire le lien entre la dynamique de plusieurs lignes de dislocations et la dynamique de densité de dislocations. Enfin, on présente quelques schémas numériques.

Le deuxième chapitre étudie des problèmes de contrôle optimal avec contraintes sur l'état. On s'intéresse particulièrement au cas où l'on ne fait pas d'hypothèse de qualification sur le bord des contraintes et on explique comment caractériser la fonction valeur dans ce cas.

Enfin le troisième et dernier chapitre concerne la méthode Fast Marching introduite par Sethian. On propose une généralisation de cette méthode au cas non stationnaire en démontrant sa convergence. Plusieurs applications de cette méthode sont également présentées.

---

# Sommaire

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
1 Dynamique des dislocations . . . . .	1
2 Problèmes de contrôle optimal . . . . .	4
3 La Méthode Fast Marching Généralisée . . . . .	5
<b>1 Dynamique des dislocations</b>	<b>7</b>
1 Propriétés qualitatives concernant la dynamique des dislocations . . . . .	8
1.1 Dynamique d'une ligne de dislocation . . . . .	8
1.2 Convergence de la dynamique d'une ligne de dislocation vers le mouvement par courbure moyenne . . . . .	12
1.3 Etude des sources de Frank-Read et des spirales . . . . .	16
1.4 Dynamique de jonctions entre dislocations . . . . .	20
2 Résultats d'homogénéisation . . . . .	23
2.1 Homogénéisation de la dynamique de dislocations . . . . .	23
2.2 Homogénéisation de systèmes de particules de type Frenkel-Kontorova . . . . .	28
2.2.1 Le système de Frenkel-Kontorova classique . . . . .	28
2.2.2 Exemple de système avec $n$ types de particules . . . . .	30
2.2.3 Cas général avec $n$ types de particules . . . . .	31
2.2.4 Fonctions enveloppes . . . . .	33
2.3 Perspectives . . . . .	34
3 Méthodes numériques pour la dynamique des dislocations . . . . .	34
3.1 Dynamique d'une ligne de dislocation . . . . .	34
3.1.1 Schéma numérique pour la dynamique d'une ligne de dislocation . . . . .	35
3.1.2 Schéma numérique pour le mouvement par courbure moyenne . . . . .	36
3.2 Dynamique de densités de dislocations . . . . .	38
<b>2 Problèmes de contrôle optimal</b>	<b>41</b>
1 Position du problème . . . . .	41
2 Caractérisation de la fonction valeur . . . . .	42
3 Caractérisation des bassins de capture . . . . .	47
4 Caractérisation de l'épigraphe de la fonction valeur . . . . .	53
5 Problème de contrôle avec dynamique discontinue . . . . .	55

## SOMMAIRE

---

5.1	Cas avec hypothèses de contrôlabilité . . . . .	56
5.2	Cas sans hypothèses de contrôlabilité . . . . .	58
<b>3</b>	<b>La Méthode Fast Marching généralisée</b>	<b>59</b>
1	Position du problème et résultats existants . . . . .	59
2	GFMM dans le cas à vitesse prescrite . . . . .	61
2.1	Description de l'algorithme . . . . .	61
2.2	Résultats de convergence et de monotonie . . . . .	64
2.3	Simulations numériques . . . . .	65
3	Application à la dynamique des dislocations . . . . .	66
4	Application à la segmentation d'image . . . . .	69
5	Application au contrôle optimal . . . . .	70
6	Perspectives . . . . .	71

# Introduction générale

Ce mémoire présente mes travaux de recherches réalisés depuis ma thèse en 2004. Sont inclus les travaux réalisés en tant que doctorant au CERMICS de l'ENPC durant les années 2004-2007, puis en tant que post-doctorant à l'INRIA Saclay dans l'équipe COMMANDS en 2007-2008 et enfin en tant que maître de conférences au CEREMADE de l'Université Paris-Dauphine durant les années 2008-2011.

Ce mémoire est décomposé en trois chapitres traitant de la dynamique des dislocations, du contrôle optimal et enfin de la méthode "Fast Marching". Ces trois axes de recherche ont pour point commun les mouvements de fronts. Dans cette introduction, je présente de manière succincte, et sans rentrer dans les détails techniques, les résultats les plus importants. Les énoncés précis ainsi que les motivations et les références bibliographiques sont inclus dans les chapitres correspondants.

## 1 Dynamique des dislocations

Une grande partie de mes travaux de recherche porte sur la modélisation, l'analyse et l'analyse numérique de problèmes issus de la dynamique de lignes de dislocations. Les dislocations sont des lignes de défaut qui se déplacent dans les cristaux et sont à l'origine des déformations plastiques des matériaux.

### Dynamique d'une ligne de dislocation

D'un point de vue mathématique, une ligne de dislocation peut être représentée par le bord d'un domaine ouvert  $\Omega_t$  ( $t$  représente le temps) qui se déplace avec une vitesse normale donnée par

$$V_n = c_0 \star 1_{\Omega_t} + \gamma H_{x,t} \tag{1}$$

où  $c_0$  est un noyau de convolution donné,  $H_{x,t}$  est la courbure moyenne au point  $(x, t)$  et  $\gamma$  une constante positive. Le premier modèle mathématique pour la dynamique des dislocation a été proposé par Alvarez *et al.* dans [7]. Il s'agit de l'équation (1) dans le cas  $\gamma = 0$ . Dans [For08a], j'ai proposé d'ajouter un terme de courbure moyenne à la vitesse normale (*i.e.*  $\gamma > 0$  dans (1)). Ce terme, qui permet de mieux modéliser ce qui se passe près de la ligne de dislocation, apparaît dans plusieurs travaux de physiciens comme ceux de Brown [45] et Barnett, Gavazza [29].

Une partie importante de mes travaux est consacrée à l'étude des propriétés qualitatives de ce genre d'équations (existence, unicité, comportement à grande échelle...), en utilisant, en particulier, la théorie des solutions de viscosité introduite par Crandall et Lions dans [60] (voir également Crandall, Ishii, Lions [59]). Une des difficultés majeures de cette équation est qu'elle ne vérifie pas de principe de comparaison (car  $c_0$  peut changer de signe) et il est donc difficile d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité généraux.

Le résultat le plus important que j'ai obtenu concernant l'existence d'une solution pour la dynamique d'une ligne de dislocation est un travail en collaboration avec A. Monteillet. Plus précisément, dans le cas où  $\gamma > 0$ , nous avons montré l'existence de mouvements minimisants (identiques à ceux introduits par Almgren, Taylor et Wang [1] pour le mouvement par courbure moyenne) puis nous avons prouvé que ces mouvements minimisants étaient en fait des solutions faibles (dans un sens proche de [19]) de l'équation (1). La question de l'unicité reste par contre complètement ouverte.

Pour pouvoir faire des études de comportement asymptotique (et donc en temps long), il est également possible d'utiliser un modèle légèrement différent pour lequel il y a un principe de comparaison. Cela revient de manière formelle à concentrer la partie négative du noyau à l'origine et à considérer (dans le cas  $\gamma = 0$ ) l'équation level set suivante (où  $J \geq 0$ ) :

$$u_t(x, t) = \left( (J \star 1_{\{u(\cdot, t) > u(x, t)\}})(x) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} J \right) |\nabla u(x, t)|. \quad (2)$$

En collaboration avec F. Da Lio et R. Monneau, nous avons montré dans l'article [DLFM08] que ce problème était bien posé, c'est à dire que l'on avait existence et unicité d'une solution de viscosité. Nous avons également étudié le comportement à grande échelle de la solution de (2) et nous avons montré que la dynamique des dislocations était bien approchée à grande échelle par un mouvement de type mouvement par courbure moyenne. Dans [For08b], j'ai amélioré ce résultat de convergence en montrant que l'on pouvait obtenir une estimation d'erreur entre la solution de la dynamique des dislocations et la solution du mouvement par courbure moyenne. Ce résultat, qui était attendu d'un point de vue physique, constitue la première preuve rigoureuse de cette convergence.

Dans [DLFM08], nous avons également caractérisé les mouvements par courbure moyenne limites approximatés par ce genre d'approche en montrant qu'ils étaient toujours de type variationnel (c'est à dire qu'ils dérivent d'une énergie). Ce résultat était attendu mais n'avait pas encore été démontré pour des mouvements généraux comme par exemple ceux étudiés dans Ishii, Pires, Souganidis [102].

Avec C. Imbert et R. Monneau, nous avons également entrepris l'étude des sources de Frank-Read. Il s'agit d'un phénomène très connu dans la théorie des dislocations et qui permet de créer de nouvelles lignes de dislocations. D'un point de vue mathématique, il s'agit d'un problème de mouvement de front où le front est attaché en deux points fixes et évolue avec une vitesse normale donnée par un terme de courbure moyenne plus un terme de forçage. L'étude de ce problème étant relativement difficile, nous nous sommes concentrés sur le cas des spirales pour lequel la courbe est attachée en un seul point. En

passant en coordonnées polaires, ceci revient à étudier l'équation suivante :

$$\begin{cases} ru_t = c\sqrt{1+r^2u_r^2} + u_r \left( \frac{2+r^2u_r^2}{1+r^2u_r^2} \right) + \frac{ru_{rr}}{1+r^2u_r^2} & \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ u(0, r) = u_0(r) & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases} \quad (3)$$

Les difficultés majeures ici sont que l'on a pas de condition aux bords en  $r = 0$  et qu'il est difficile de dédoubler les variables dans le principe de comparaison car les courbes sont attachées en un point. Néanmoins, nous avons réussi à montrer dans [FIMc] un principe de comparaison pour cette équation ainsi que l'existence d'une solution de viscosité.

### Homogénéisation de la dynamique des dislocations

L'objectif est de faire le lien entre la dynamique d'un nombre fini de dislocations et la dynamique de densité de dislocations. De manière plus précise, nous nous intéressons à l'homogénéisation de l'équation de Hamilton-Jacobi non-locale du premier ordre suivante :

$$\partial_t u^\varepsilon = \left( c \left( \frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon} \right) + \int dz J(z) E \left( \frac{u^\varepsilon(x + \varepsilon z, t) - u^\varepsilon(x, t)}{\varepsilon} \right) \right) |\nabla u^\varepsilon| \quad (4)$$

où  $J$  est un noyau de convolution qui vérifie

$$0 \leq J(-z) = J(z) = \frac{1}{|z|^3} \quad \text{pour } |z| \geq 1$$

et où  $E$  est une modification de la partie entière, définie par

$$E(\alpha) = k + \frac{1}{2} \quad \text{si } k \leq \alpha < k + 1. \quad (5)$$

Cette équation décrit le mouvement de plusieurs dislocations se déplaçant en interactions.

Dans [FIM09b], nous avons montré avec C. Imbert et R. Monneau que l'équation limite macroscopique obtenue est une équation de diffusion non-linéaire :

$$\partial_t u^0 = \bar{H} (\mathcal{I}_1[u^0(\cdot, t)], \nabla u^0) \quad (6)$$

où  $\bar{H}$  est une fonction continue et  $\mathcal{I}_1$  est un opérateur de Lévy du premier ordre défini pour toute fonction  $U \in C_b^2$  et pour  $r > 0$  par

$$\mathcal{I}_1[U](x) = \int (U(x+z) - U(x) - z \cdot \nabla_x U(x) 1_{B(0,r)}) \frac{1}{|z|^3} dz. \quad (7)$$

Ce genre de résultat est spécialement intéressant d'un point de vue physique car il permet d'obtenir des lois de plasticité à partir d'un modèle microscopique.

Une des difficultés majeures pour résoudre ce problème d'homogénéisation est que le Hamiltonien apparaissant dans (4) n'est pas coercif, ce qui était une hypothèse essentielle dans la théorie d'homogénéisation des équations de Hamilton-Jacobi introduite par Lions, Papanicolaou, Varadhan [112]. Pour résoudre cette difficulté, nous avons utilisé les idées

introduites par Imbert, Monneau [93] et en particulier des contrôles sur les oscillations du correcteur.

Les méthodes utilisées dans [FIM09b] permettent également d'obtenir des résultats d'homogénéisation pour certains systèmes de particules (avec des interactions de paires). Avec C. Imbert et R. Monneau, en utilisant ces méthodes, nous avons obtenu dans [FIM09a] des résultats similaires pour d'autres modèles et en particulier pour des systèmes d'équations différentielles ordinaires avec interactions aux plus proches voisins comme, par exemple, le modèle de Frenkel-Kontorova :

$$m_0\ddot{x}_i + \dot{x}_i = x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i - V_0'(x_i) + L, \quad i = -N, \dots, N,$$

où  $m_0$  est la masse des particules,  $V_0$  est un potentiel périodique et  $L$  est une constante. Le modèle de Frenkel-Kontorova est un modèle très simple et apparaît dans beaucoup d'applications : dislocations, modèle non-linéaire de la dynamique de l'ADN, en chimie (mouvement de protons dans des réseaux d'atomes d'oxygènes),... L'hypothèse essentielle pour ce système d'équations différentielles ordinaires est qu'il doit être monotone (ce qui est le cas pour Frenkel-Kontorova). L'idée consiste alors à injecter le système dans un système d'équations aux dérivées partielles (en utilisant les idées de [FIM09b]) qui vérifie donc un principe de comparaison. On cherche alors à obtenir directement un résultat d'homogénéisation sur ce système. L'équation limite obtenue est une équation de Hamilton-Jacobi locale du premier ordre.

### Approximation numérique

Une autre partie de mes travaux porte sur l'analyse numérique de la dynamique des dislocations.

Dans [For08b], j'ai proposé un schéma numérique pour résoudre l'équation de la dynamique des dislocations (2). Pour ce schéma non-monotone, j'ai obtenu une estimation d'erreur de type Crandall, Lions [61] entre la solution continue de la dynamique des dislocations et son approximation numérique. Ensuite, en utilisant le résultat de convergence de [DLFM08] et plus particulièrement l'estimation obtenue dans [For08b], j'ai proposé un schéma numérique pour résoudre le mouvement par courbure moyenne et j'ai également obtenu une estimation d'erreur, ce qui semble être la première estimation pour ce genre d'équation (même s'il existait des résultats de convergence).

## 2 Problèmes de contrôle optimal

Depuis mon post-doctorat à l'INRIA, je travaille également sur des problèmes de contrôle optimal. Une approche classique pour les problèmes de contrôle optimal consiste à remarquer que la fonction valeur (celle qui à chaque position initiale associe le coût correspondant) est solution d'une équation aux dérivées partielles appelée équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Cette approche, qui trouve ses origines dans les travaux de Bellman dans les années 1950, a été mise en place par Lions [111] et utilise la notion de solution de

viscosité introduite dans [60]. Néanmoins, dans le cas où l'on est en présence de contraintes sur l'état, l'équation HJB ainsi obtenu peut admettre plusieurs solutions si on ne fait pas d'hypothèses de qualification (assez restrictives) sur le bord du domaine de contraintes (voir Soner [139, 140], Blanc [33, 34] et Frankowska et ses collaborateurs [77, 78]). Avec O. Bokanowski et H. Zidani, après avoir regardé dans [BFZ10b] quelle condition il fallait ajouter à l'équation pour obtenir l'unicité, nous avons utilisé une approche complètement différente. Dans le cas d'un problème de cible, nous avons montré dans [BFZ] qu'il était possible de remplacer le problème de contrôle initiale par un nouveau problème pour lequel il n'y a plus de contraintes sur l'état et telle que les deux fonctions valeurs définissent les mêmes ensembles atteignables (c'est à dire qu'elles ont les mêmes ensembles de niveau 0). L'idée consiste, plutôt que d'interdire les trajectoires à sortir de l'ensemble, à les pénaliser si elles en sortent. La nouvelle fonction valeur obtenue est alors facile à caractériser à l'aide d'une équation HJB (car il n'y a plus de contraintes sur l'état).

Avec H. Zidani et notre étudiant Z. Rao, nous avons remarqué dans [FRZa] qu'il était en fait possible de caractériser l'épigraphe de la fonction valeur. En effet, plutôt que de chercher l'ensemble de niveau 0, il est possible de chercher l'ensemble de niveau  $z$  pour tout  $z \in \mathbb{R}$ . En utilisant la même idée que dans [BFZ], on obtient alors une nouvelle fonction valeur qui dépend du temps et de l'espace (comme précédemment) mais également de la variable  $z$ . Il est alors possible de considérer cette fonction comme la fonction valeur d'un nouveau problème de contrôle en dimension supérieure dans lequel il n'y a plus de contraintes d'état. On peut alors caractériser cette nouvelle fonction valeur (et donc l'épigraphe de la fonction valeur de départ) à l'aide d'une équation HJB en dimension supérieure.

### 3 La Méthode Fast Marching Généralisée

Une autre partie de mes travaux est consacrée à la méthode Fast Marching et à sa généralisation. Il s'agit d'une méthode numérique introduite par Sethian [135] pour résoudre des problèmes de mouvement de front dans lequel le front évolue dans sa direction normale avec une vitesse positive et indépendante du temps. Avec E. Carlini, M. Falcone et R. Monneau, motivés par la dynamique de lignes de dislocations, nous avons généralisé cette approche au cas où la vitesse normale dépend également du temps et peut changer de signe en espace et/ou en temps. L'avantage de ce type d'algorithme est qu'il va suivre le front et il n'y a donc pas de problème de localisation du front comme c'est parfois le cas avec la méthode level sets, en particulier pour la dynamique des dislocations où la fonction level sets s'aplatit très rapidement. De plus, les calculs ne sont faits que près du front et donc l'algorithme est moins coûteux en temps de calcul.

La difficulté majeure pour généraliser cette méthode est qu'elle repose sur une approche complètement stationnaire. L'idée que nous avons proposé dans [CFFM08] est de ne pas revenir à cette approche stationnaire mais plutôt d'essayer de construire l'algorithme le plus naïvement possible en utilisant celui proposé par Sethian. La difficulté est alors de pouvoir montrer la convergence de cette méthode. Ceci est fait en utilisant les idées de Barles, Souganidis [28] en montrant que l'on peut relaxer (légèrement) les hypothèses de

monotonie et de consistance sur le schéma en ne vérifiant par exemple la consistance que sur une sous-classe de fonctions.

Dans [For09], j'ai amélioré notre algorithme en proposant un schéma complètement monotone. L'avantage de cette nouvelle version est qu'elle permet de montrer la convergence du schéma pour des équations non-locales (en particulier pour la dynamique des dislocations, voir [CFM]). Cette algorithme a également d'autres applications comme par exemple en segmentation d'image (voir [FLGG08]) ou en contrôle optimal (voir [BFZ10a]).

# Chapitre 1

## Dynamique des dislocations

Ce premier chapitre est consacré à l'étude de la dynamique des dislocations. Il s'agit d'un axe de recherche que j'ai commencé à développer durant ma thèse et qui continue à m'intéresser. Les dislocations sont des lignes de défauts qui se déplacent dans les cristaux. L'étude de la dynamique des dislocations est motivée par le fait que leur mouvement est à l'origine des déformations plastiques des matériaux. Ainsi, par exemple, cette dynamique des dislocations joue un rôle important dans la conception de nouveaux alliages métalliques utilisés en aéronautique. Ce concept a été introduit par Orowan [127], Polanyi [131] et Taylor [144] dans les années 1930 comme l'une des principales explications à l'échelle microscopique des déformations plastiques macroscopiques des cristaux. Cette théorie fut confirmée dans les années 1950 par les premières observations directes de dislocations par Hirsh, Horne, Whean [89] et Bollman [39] grâce à la microscopie électronique (voir Figure 1.1 pour une image par microscopie électronique de lignes de dislocation). On renvoie aux monographies de Hirth, Lothe [90] et de Lardner [107] pour une bonne introduction à la théorie des dislocations.

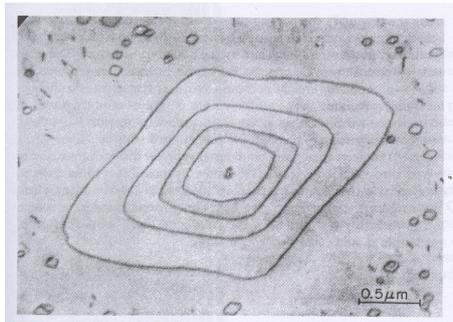


FIGURE 1.1 – Dislocations dans un matériau Al-Mg

Il y a de nombreux travaux sur les dislocations faits par les physiciens. Néanmoins, les résultats mathématiques sont encore peu nombreux puisque le premier modèle mathématique pour la dynamique d'une ligne de dislocation a été introduit seulement récemment par Alvarez, Hoch, Le Bouar et Monneau dans [7]. Le but de mon travail est de propo-

ser un cadre mathématique adapté à cette étude et de montrer des résultats rigoureux. La démarche que j'ai suivie est de partir de l'étude d'un cas simple (la dynamique d'une seule ligne) et de compliquer petit à petit les modèles (étude de jonctions, de source de Frank-Read, Homogénéisation,...). Concernant l'étude mathématique des dislocations d'un point de vue stationnaire, nous renvoyons aux travaux de Garroni et de ses collaborateurs [80, 81].

Une partie importante de mon travail sur les dislocations concerne la modélisation et l'analyse de la dynamique d'une ligne de dislocation (voir Section 1 ci-dessous). Une autre partie importante porte sur l'homogénéisation de la dynamique des dislocations. Il s'agit ici de faire le lien entre les modèles microscopiques modélisant la dynamique de lignes de dislocation et les modèles macroscopiques modélisant la dynamique de densité de dislocations. Cette partie est détaillée dans la section 2. Enfin, dans la Section 3 est présenté mon travail sur l'analyse numérique de la dynamique des dislocations.

## 1 Propriétés qualitatives concernant la dynamique des dislocations

Dans cette sous-section nous présentons des résultats d'existence et d'unicité en temps court et en temps long pour différents modèles issus de la dynamique des dislocations. Pour simplifier la présentation, nous ne présentons pas les hypothèses les plus générales. En particulier, nous nous restreignons au cas de la dimension  $N = 2$  (qui est le cas des applications physiques)

### 1.1 Dynamique d'une ligne de dislocation

Le premier modèle que nous étudions correspond à la dynamique d'une ligne de dislocation. D'un point de vue mathématique, il s'agit de problèmes de mouvement de fronts où le front est représenté par le bord d'un domaine ouvert  $\Omega_t$  ( $t$  représente le temps) qui se déplace au cours du temps avec une vitesse normale donnée par

$$V_n = c_0 \star 1_{\Omega_t} + \gamma H_{x,t} \tag{1.1}$$

où  $c_0$  est un noyau de convolution donné,  $H_{x,t}$  est la courbure moyenne au point  $(x, t)$  et  $\gamma$  une constante positive. Le premier modèle mathématique pour la dynamique des dislocations a été proposé par Alvarez *et al.* dans [7]. Il s'agit de l'équation (1.1) dans le cas  $\gamma = 0$ . Dans [For08a], j'ai proposé d'ajouter un terme de courbure moyenne à la vitesse normale (*i.e.*  $\gamma > 0$  dans (1.1)). Ce terme, qui permet de mieux modéliser ce qui se passe près de la ligne de dislocation, apparaît dans plusieurs travaux de physiciens comme ceux de Brown [45] et Barnett, Gavazza [29]. Nous renvoyons à [For08a, Section 2] et [7] pour une modélisation détaillée de l'équation (1.1).

Si l'on considère l'équation level sets associée à ce type de problème, on est alors ramené à étudier des équations de Hamilton-Jacobi non-locales du genre :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \left( c_0 \star 1_{\{u \geq 0\}} + \gamma \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) |\nabla u| & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times [0, T], \\ u(\cdot, 0) = u_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{1.2}$$

---

## 1. Propriétés qualitatives concernant la dynamique des dislocations

---

où la ligne de dislocation est maintenant représentée (de manière implicite) par la ligne de niveau zéro de la fonction  $u$ . Les équations que nous considérons sont donc des équations de Hamilton-Jacobi non-locales et le cadre le plus adapté pour les résoudre est la théorie des solutions de viscosité introduite par Crandall et Lions [60] (pour une bonne introduction à cette théorie, nous renvoyons à Barles [14], [15], Bardi, Capuzzo-Dolcetta [11] et Crandall, Ishii, Lions [59] et pour une introduction aux solutions de viscosité pour l'évolution de fronts, nous renvoyons à Ambrosio [9], Barles, Soner, Souganidis [27], Chen, Giga, Goto [55], Giga [84], Evans [71], Evans, Spruck [72] et Souganidis [143]).

Une remarque importante est que, d'un point de vue physique, on s'attend à ce que les droites ne bougent pas. Ceci implique en particulier que  $c_0$  est à moyenne nulle et donc que  $c_0$  change de signe. A cause de cela, on peut montrer qu'il n'y a pas de principe d'inclusion, c'est à dire que si l'on considère deux ensembles inclus l'un dans l'autre au temps initial, alors cette inclusion ne perdure pas durant l'évolution. Or, le principe de comparaison est un élément essentiel dans la théorie des solutions de viscosité. Ceci explique en particulier la difficulté pour obtenir des résultats d'existence et d'unicité en temps long.

Le premier résultat d'existence et d'unicité pour la dynamique d'une ligne de dislocation a été proposé par Alvarez *et al.* [7, 6]. Il s'agit d'un résultat en temps court pour l'équation (1.2) avec  $\gamma = 0$  et pour des données initiales graphes. Le premier résultat que nous présentons ici est une généralisation au cas où  $\gamma > 0$  :

**Théorème 1.1. (Existence et unicité en temps court pour (1.2), [For08a, Théorème 3.1])**

Soit  $u_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$|Du_0| \leq B_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \geq b_0 > 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2. \quad (1.3)$$

On suppose que  $c_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  (infiniment différentiable et à support compact). Alors, il existe un temps  $T^* > 0$  tel qu'il existe une unique solution de viscosité au problème (1.2) dans  $\mathbb{R}^2 \times [0, T^*)$ . De plus, la solution est uniformément continue en temps et vérifie également :

$$|Du(x, t)| \leq 2B_0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^2 \times [0, T^*), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x, t) \geq b_0/2 > 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^2 \times [0, T^*). \quad (1.5)$$

L'idée générale de la démonstration est de geler la vitesse non-locale dans l'équation et d'utiliser un argument de type point fixe. La difficulté majeure est d'obtenir des bonnes estimations sur le gradient en espace et sur le module de continuité en temps de la solution du problème local (celui où la vitesse est gelée).

**Remarque 1.2.** Avec C. Le Guyader [FLG], nous avons généralisé ce résultat au cas de l'équation suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \left( c_0 \star 1_{\{u \geq 0\}} + \operatorname{div} \left( g(x) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) |\nabla u| & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times [0, T], \\ u(\cdot, 0) = u_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

qui apparaît dans des modèles de segmentation d'image. La difficulté principale vient ici de la dépendance en  $x$  du terme apparaissant dans la courbure. Cela complique en particulier l'obtention d'une borne inférieure sur le gradient de la solution pour laquelle nous sommes obligés de borner la courbure moyenne.

Dans le cas où  $\gamma$  est strictement positif, il est possible d'utiliser l'effet régularisant de la courbure moyenne pour obtenir une évolution régulière. De manière plus précise, on a le théorème suivant :

**Théorème 1.3. (Existence d'une évolution régulière, [FM09b, Théorème 1.6])**

Soit  $\Omega_0$  (dont le bord représente la ligne de dislocation au temps initial) un domaine compact dont le bord est uniformément  $C^{3+\alpha}$ . On suppose que  $c_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Alors, il existe un temps  $t_0 > 0$  et une évolution régulière  $\{\Omega_r(t)\}_{0 \leq t \leq t_0}$  dont le bord est  $C^{2+\alpha}$ , partant de  $\Omega_0$  avec une vitesse normale donnée par (1.1).

L'idée de la preuve est inspirée de Evans et Spruck [73] pour le mouvement par courbure moyenne (voir aussi Giga [85], Lunardi [114], Maekawa [117]). Il s'agit de supposer que l'on a une évolution régulière et de considérer la fonction distance signée au bord. On peut alors montrer que cette fonction vérifie une équation uniformément parabolique. Le but est ensuite de construire directement une solution de cette équation et de vérifier *a posteriori* que la ligne de niveau zéro de la solution trouvée définit bien une évolution régulière avec la bonne vitesse normale.

Comme nous l'avons souligné plus haut, les résultats en temps long sont beaucoup plus difficiles à obtenir. Les premiers résultats dans cette direction ont été obtenus par Alvarez, Cardaliaguet, Monneau [4] puis par Barles, Ley [23] dans le cas où  $\gamma = 0$ , où ils ont montré (avec des techniques assez différentes) que sous certaines hypothèses de positivité sur la vitesse, la dynamique d'une ligne de dislocation était bien posée en temps grand (nous renvoyons également à Cardaliaguet, Marchi [49]). Toujours dans le cas  $\gamma = 0$ , Barles, Cardaliaguet, Ley, Monneau [19] ont également introduit une nouvelle notion de solution faible et ont montré l'existence globale en temps d'une solution faible (la question de l'unicité est encore largement ouverte dans un cadre général). Cette notion de solution faible repose sur les solutions de viscosité  $L^1$  introduites par Ishii [95] (voir aussi Nunziante [121, 122], Bourgoing [41, 42]) et sur le résultat de stabilité de Barles [16]. Nous renvoyons également à Barles, Cardaliaguet, Ley, Monteillet [21, 20] pour des résultats concernant les solutions faibles.

Dans le cas où  $\gamma > 0$ , nous avons montré avec A. Monteillet que l'on pouvait utiliser l'effet régularisant de la courbure moyenne pour construire une solution faible en temps long. Cette notion de solution faible est la même que celle définie par Barles, Cardaliaguet, Ley et Monneau [19] pour le cas  $\gamma = 0$  (un concept similaire de solution apparaît également dans Soravia, Souganidis [142] pour des systèmes de type Fitzhugh-Nagumo) mais sa construction repose dans notre cas sur les mouvements minimisants introduits par Almgren, Taylor et Wang dans [1] pour l'équation par courbure moyenne (nous renvoyons également à Ambrosio [8] pour une présentation simplifiée).

## 1. Propriétés qualitatives concernant la dynamique des dislocations

---

De manière plus précise, une solution faible est définie de la manière suivante :

**Définition 1.4.** *On suppose que  $c_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Soit  $\Omega : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}$  (l'ensemble de tous les sous-ensembles bornés de  $\mathbb{R}^2$  ayant un périmètre fini) une application telle que  $t \mapsto 1_{\Omega(t)}$  appartient à  $C^0([0, T], L^1(\mathbb{R}^2))$ . Soit  $u$  l'unique solution de viscosité uniformément continue de*

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \left( c_0 \star 1_{\Omega(t)}(x) + \gamma \operatorname{div} \left( \frac{Du(x, t)}{|Du(x, t)|} \right) \right) |Du(x, t)| & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (1.6)$$

où  $u_0$  est une fonction uniformément continue vérifiant

$$\bar{\Omega}_0 = \{u_0 \geq 0\} \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{\Omega}_0 = \{u_0 > 0\}.$$

On dit que  $\Omega$  est une solution faible de la loi d'évolution (1.1) si pour tout  $t \in [0, T]$  et presque partout dans  $\mathbb{R}^2$ , on a

$$\{u(\cdot, t) > 0\} \subset \Omega(t) \subset \{u(\cdot, t) \geq 0\}.$$

**Remarque 1.5.** *En particulier, s'il n'y a pas de fattening, i.e. si  $\{u(\cdot, t) = 0\}$  est de mesure de Lebesgue nulle, alors  $u$  est une solution de viscosité de (1.2).*

Comme indiqué ci-dessus, la construction d'une solution faible repose sur les mouvements minimisants. De manière plus précise, nous allons montrer que les mouvements minimisants sont des solutions faibles. On commence par rappeler la définition d'un mouvement minimisant.

Étant donné un temps final  $T > 0$  et un pas de temps  $h$ , le principe des mouvements minimisants est de construire itérativement une suite  $\Omega_h(k)$  en minimisant, à l'étape  $k \in \mathbb{N}$ , la fonctionnelle  $E \mapsto \mathcal{F}(h, E, \Omega_h(k-1))$  où ici

$$\mathcal{F}(h, E, F) = P(E) + \frac{1}{h} \int_{E \Delta F} d_{\partial F}(x) dx - \int_E \left( \frac{1}{2} c_0 \star 1_E(x) \right) dx, \quad (1.7)$$

avec  $d_C$  la fonction distance à l'ensemble fermé  $C$  et  $P(E)$  le périmètre de l'ensemble  $E$ . Le but est ensuite de passer à la limite  $h \rightarrow 0$ .

Nous donnons maintenant la définition rigoureuse d'un mouvement minimisant :

**Définition 1.6. (Mouvement minimisant [1])**

*Soit  $T > 0$  et  $\Omega_0 \in \mathcal{P}$ . On dit que  $\Omega : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}$  est un mouvement minimisant associé à la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  avec  $\Omega_0$  comme condition initiale s'il existe une suite  $(h_n)$ ,  $h_n \rightarrow 0^+$  et des ensembles  $\Omega_{h_n}(k) \in \mathcal{P}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  avec  $kh_n \leq T$ , tels que :*

1.  $\Omega_{h_n}(0) = \Omega_0$ ,
2. Pour tout  $n, k \in \mathbb{N}$  avec  $(k+1)h_n \leq T$ ,

$$\Omega_{h_n}(k+1) \text{ minimise la fonctionnelle } E \rightarrow \mathcal{F}(h_n, E, \Omega_{h_n}(k)) \quad (1.8)$$

parmi tous les  $E \in \mathcal{P}$ ,

3. Pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\Omega_{h_n}([t/h_n]) \rightarrow \Omega(t)$  dans  $L^1(\mathbb{R}^2)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , c'est à dire que  $1_{\Omega_{h_n}([t/h_n])} \rightarrow 1_\Omega$  dans  $L^1(\mathbb{R}^2)$ , où  $[\cdot]$  est la fonction partie entière.

Le premier résultat concernant les mouvements minimisants est un résultat d'existence :

**Théorème 1.7. (Existence d'un mouvement minimisant, [FM09b, Théorème 1.3])**

Soit  $\Omega_0 \in \mathcal{P}$  tel que  $\mathcal{L}^2(\partial\Omega_0) = 0$ . On suppose que  $c_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Alors, il existe un mouvement minimisant  $\Omega$  associé à  $\mathcal{F}$  avec  $\Omega_0$  comme condition initiale.

Comme indiqué plus haut, on peut montrer que les mouvements minimisants sont des solutions faibles :

**Théorème 1.8. (Les mouvements minimisants sont des solutions faibles, [FM09b, Théorème 1.4])**

Soit  $\Omega_0 \in \mathcal{P}$  tel que  $\mathcal{L}^2(\partial\Omega_0) = 0$ . Soit  $\Omega$  un mouvement minimisant associé à  $\mathcal{F}$  avec  $\Omega_0$  comme condition initiale. On suppose que  $c_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  est symétrique. Alors  $\Omega$  est une solution faible de (1.1).

Le résultat suivant justifie également le lien entre ces mouvements minimisants et l'équation d'évolution donnée par (1.2). Il montre que tout mouvement minimisant correspond en fait à l'évolution régulière donnée par le Théorème 1.3 tant que cette dernière existe.

**Théorème 1.9. (Correspondance avec le flot régulier, [FM09b, Théorème 1.5])**

Soit  $\Omega_0$  un domaine compact dont le bord est  $C^{3+\alpha}$ . On suppose que  $c_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  est symétrique. Soit  $\Omega_r$  le flot régulier donné par le Théorème 1.3. Alors pour tout mouvement minimisant  $\Omega$  associé à  $\mathcal{F}$  avec  $\Omega_0$  comme condition initiale et pour tout  $t \in [0, t_0)$ , on a

$$\Omega(t) = \Omega_r(t) \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^2.$$

La preuve de ce théorème repose sur les sous/sur paires de solutions introduites par Cardaliaguet et Pasquignon [50].

## 1.2 Convergence de la dynamique d'une ligne de dislocation vers le mouvement par courbure moyenne

On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique de la dynamique d'une ligne de dislocation. Nous allons donc regarder ce qui se passe à grande échelle et donc en temps grand. Pour cela, il faut introduire un modèle pour la dynamique des dislocations qui est bien posé pour tout temps. On va donc supposer que la partie négative du noyau est concentré en un point, i.e.

$$c_0 = J - \left( \int_{\mathbb{R}^2} J \right) \delta_0$$

où  $\delta_0$  est la masse de Dirac en zéro et  $J$  est maintenant un noyau positif. De manière très formelle, la vitesse normale est donc maintenant donnée par (on s'intéresse ici uniquement au cas où  $\gamma = 0$ )

$$V_n = J \star 1_{\Omega_t} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} J.$$

## 1. Propriétés qualitatives concernant la dynamique des dislocations

---

La bonne formulation level set pour ce type d'équation a été introduite par Slepčev [137] (voir aussi Da Lio, Kim, Slepčev [64]) et est la suivante :

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \left( (J \star 1_{\{u(\cdot, t) > u(x, t)\}})(x) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} J \right) |Du(x, t)| & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{sur } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (1.9)$$

La grande différence avec les équations level sets habituelles est qu'ici, on fait évoluer toutes les lignes de niveaux de la fonction  $u$ . Ici la ligne de dislocation est représentée par n'importe quelle ligne de niveau de la fonction  $u$ . La définition de solution de viscosité est la suivante :

**Définition 1.10. (Sous/sur/solution de viscosité pour (1.9))**

Une fonction  $u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  semi-continue supérieurement (resp. semi-continue inférieurement) est une sous-solution de viscosité (resp. sur-solution) de (1.9) si  $u(x, 0) \leq u_0(x)$  dans  $\mathbb{R}^2$  (resp.  $u(x, 0) \geq u_0(x)$ ) et pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$  et pour toute fonction test  $\phi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)$  telle que  $u - \phi$  atteint un maximum (resp. un minimum) au point  $(x, t)$ , alors on a

$$\begin{aligned} \phi_t(x, t) &\leq \left( (J \star 1_{\{u(t, \cdot) \geq u(x, t)\}})(x) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} J \right) |D\phi(x, t)| \\ \left( \text{resp. } \phi_t(x, t) &\geq \left( (J \star 1_{\{u(t, \cdot) > u(x, t)\}})(x) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} J \right) |D\phi(x, t)| \right). \end{aligned}$$

Une fonction continue est une solution de viscosité de (1.9) si et seulement si c'est une sous et une sur-solution de viscosité.

Cette formulation est en fait beaucoup plus stable et permet d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité en temps long :

**Théorème 1.11. (Existence et unicité en temps long pour (1.9), [DLFM08, Théorème 1.1])**

On suppose que  $u_0 \in \text{Lip}(\mathbb{R}^2)$  et que  $J \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ . Alors, il existe une unique solution de viscosité de (1.9).

Nous allons maintenant montrer la convergence à grande échelle de la dynamique des dislocations vers des mouvements de type mouvement par courbure moyenne. Ce résultat justifie de manière rigoureuse les calculs et les approximations faits par les physiciens.

On suppose que le noyau  $J$  est symétrique et que sa décroissance à l'infini  $J$  est en  $\frac{1}{|x|^3}$  :

$$\begin{cases} J(x) = \frac{1}{|x|^3} g\left(\frac{x}{|x|}\right) \text{ si } |x| \geq 1, \\ J(-x) = J(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (1.10)$$

où  $g \in C^\infty(\mathbf{S}^1)$  est une fonction définie sur le cercle  $\mathbf{S}^1$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Pour étudier le comportement à grande échelle, on définit pour  $\varepsilon > 0$  la fonction “rescallée” suivante :

$$u^\varepsilon(x, t) = u\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|}\right)$$

qui satisfait l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = \left( (J^\varepsilon \star \mathbf{1}_{\{u^\varepsilon(\cdot, t) \geq u^\varepsilon(x, t)\}})(x) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} J^\varepsilon \right) |Du^\varepsilon| & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, T) \\ u^\varepsilon(\cdot, 0) = u_0^\varepsilon & \text{sur } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (1.11)$$

où  $J^\varepsilon$  est le noyau “rescallé” défini par

$$J^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3 |\ln \varepsilon|} J\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (1.12)$$

Le scaling utilisé pour  $u^\varepsilon$  (et donc pour  $J^\varepsilon$ ) est presque le scaling parabolique. Le terme  $|\ln \varepsilon|$  est un facteur bien connu en physique (nous renvoyons par exemple à Barnett, Gavazza [29], Brown [45] et Hirth, Lothe [90]). D'un point de vue mathématique, il vient de la mauvaise décroissance à l'infini du noyau (en  $\frac{1}{|x|^3}$ ) qui ne vérifie pas l'hypothèse classique (voir Barles, Georgelin [22], Ishii, Pires, Souganidis [102] ou Ishii [98])

$$\int_{\{(x,p)=0\}} c_0(x) |x|^2 < \infty \quad \forall p \in \mathbf{S}^1.$$

Nous renvoyons à [DLFM08, Section 4.1] pour une discussion détaillée sur cette condition.

Dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , cette dynamique est bien approchée par le mouvement par courbure moyenne anisotrope suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^0}{\partial t} + F(D^2 u^0, Du^0) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, T) \\ u^0(\cdot, 0) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (1.13)$$

avec

$$F(M, p) = -g\left(\frac{p^\perp}{|p|}\right) \text{trace}\left(M \cdot \left(Id - \frac{p}{|p|} \otimes \frac{p}{|p|}\right)\right) \quad (1.14)$$

où  $p^\perp$  est l'image du vecteur  $p$  par une rotation d'angle  $\pi/2$ . En particulier, on voit que l'équation (1.13) décrit le mouvement par courbure moyenne anisotrope avec la vitesse

$$g(\tau)\kappa$$

où  $\kappa$  est la courbure de la ligne de niveau de  $u^0$  et  $\tau$  est le vecteur unitaire tangent à la ligne de niveau de  $u^0$ . Ceci est justifié par le théorème suivant :

---

## 1. Propriétés qualitatives concernant la dynamique des dislocations

---

**Théorème 1.12. (Convergence de la dynamique des dislocations vers le mouvement par courbure moyenne, [DLFM08, Théorème 1.4] et [For08b, Théorème 2.1])**

On suppose que  $u_0 \in Lip(\mathbb{R}^2)$ , et  $J \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ . Alors la solution  $u^\varepsilon$  de la dynamique des dislocations (1.11) converge localement uniformément sur les compacts de  $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$  vers l'unique solution  $u^0$  du mouvement par courbure moyenne anisotrope (1.13). De plus, il existe une constante  $K$  dépendant seulement de  $\sup_{\mathbb{R}^2} J$ ,  $|Dg|_{L^\infty(\mathbf{S}^1)}$  et  $|Du_0|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$  telle que la différence entre  $u^\varepsilon$  et  $u^0$  est donnée par

$$\sup_{\mathbb{R}^2 \times (0, T)} |u^\varepsilon - u^0| \leq K \left( \frac{T}{|\ln \varepsilon|} \right)^{\frac{1}{6}} + \sup_{\mathbb{R}^2} |u_0^\varepsilon - u_0|$$

pour  $T \leq 1$ .

**Remarque 1.13.** Des résultats similaires (sans estimation d'erreur) ont été prouvés pour des noyaux généraux en relation avec l'algorithme de Merriman, Bence, Osher pour la courbure moyenne [118] (typiquement, le noyau  $J$  est remplacé par le noyau de la chaleur). Nous renvoyons par exemple à Barles, Georgelin [22], Evans [70], Ishii [98] et Ishii, Pires, Souganidis [102] pour de tels résultats. Néanmoins, comme nous l'avons indiqué précédemment, notre noyau ne satisfait pas les hypothèses de ces papiers.

La dynamique d'une ligne de dislocation découlant d'une énergie, on peut se demander si c'est également le cas pour le mouvement de type courbure moyenne obtenu. Le Théorème 1.15 ci-dessous va répondre à cette question en montrant qu'il est effectivement de type variationnel. Pour énoncer ce résultat de manière précise, nous avons besoin de la définition suivante :

**Définition 1.14.** Soit  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  tel que  $g(\lambda p) = \frac{g(p)}{|\lambda|^3}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  et  $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . On associe alors à  $g$  une distribution tempérée  $L_g$  définie par

$$\langle L_g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} dx g(x) (\varphi(x) - \varphi(0) - x \cdot D\varphi(0) 1_{B_1(0)}(x))$$

pour  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ , où  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  est l'espace des fonctions tests de Schwartz et  $B_1(0)$  est la boule unité centrée en zéro.

On définit également la transformée de Fourier de  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  par

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} dx \varphi(x) e^{-i\xi \cdot x}.$$

On a alors le théorème suivant :

**Théorème 1.15. (Origine variationnelle du mouvement par courbure moyenne anisotrope, [DLFM08, Théorème 1.7])**

Soit  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  tel que  $g(\lambda p) = \frac{g(p)}{|\lambda|^3}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\forall p \in \mathbb{R}^2$ . Soit

$$G := -\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(L_g) \tag{1.15}$$

où  $\mathcal{F}(L_g)$  est la transformée de Fourier de  $L_g$ . Alors  $G(\lambda p) = |\lambda|G(p)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\forall p \in \mathbb{R}^2$ , et

$$g\left(\frac{p^\perp}{|p|}\right) \frac{p^\perp}{|p|} \otimes \frac{p^\perp}{|p|} = D^2G\left(\frac{p}{|p|}\right) \quad (1.16)$$

En particulier, on voit que  $G$  est convexe si et seulement si  $g \geq 0$ . De plus, (1.16) signifie que dans l'équation (1.13), on a

$$-F(D^2u^0, Du^0) = \operatorname{div} \left( \nabla G \left( \frac{Du^0}{|Du^0|} \right) \right) |Du^0|,$$

c'est à dire que le mouvement par courbure moyenne anisotrope obtenu dérive de l'énergie convexe  $\int G(Du^0)$ .

**Remarque 1.16.** *Physiquement, la quantité  $\mathcal{F}(L_g)$  est naturellement donnée et la fonction  $g$  peut alors être calculée en utilisant (1.15)-(1.16) où l'on peut également vérifier si  $g$  est positive ou non.*

### 1.3 Etude des sources de Frank-Read et des spirales

Un sujet important concernant la dynamique de lignes de dislocation est l'étude des sources de Frank-Read. Une source de Frank-Read est un mécanisme permettant d'expliquer la génération de plusieurs lignes de dislocation quand le cristal est soumis à une force de cisaillement. De manière plus précise, il s'agit d'une ligne de dislocation qui est attachée en ses deux extrémités. Cette ligne évolue avec une vitesse normale donnée par sa courbure plus une constante correspondant à un terme de forçage. L'évolution de la ligne est présentée dans la Figure 1.2 où l'on voit en particulier comment cette ligne va permettre de créer de nouvelles lignes de dislocation.

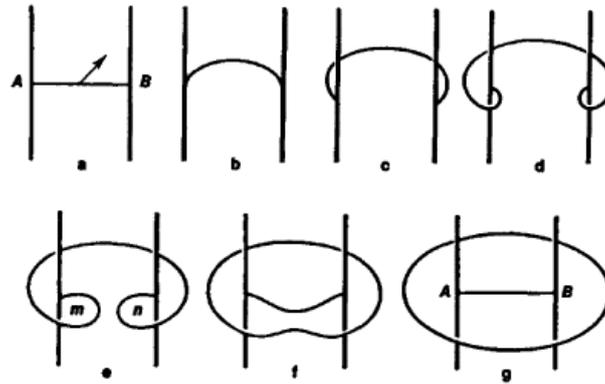


FIGURE 1.2 – Une source de Frank-Read générant des dislocations

Ce problème étant relativement complexe, nous avons commencé avec C. Imbert et R. Monneau à étudier un modèle un peu plus simple qui est le cas des spirales et qui contient une partie des difficultés liées à l'étude des sources de Frank-Read. De plus, l'étude des

## 1. Propriétés qualitatives concernant la dynamique des dislocations

---

spirales représente un intérêt en soi. En effet, dans les problèmes de croissance de cristaux, quand une dislocation vis atteint le bord du matériau, les atomes sont absorbés de telle sorte qu'une spirale apparaît. De plus Burton, Cabrera, Frank [46] ont montré que sous des hypothèses physiques appropriées, la spirale bougeait avec une vitesse normale donnée par

$$V_n = c + \kappa \quad (1.17)$$

où  $\kappa$  est la courbure de la ligne et  $c \in \mathbb{R}$  est une constante donnée telle que  $-c$  représente une valeur critique pour la courbure.

D'un point de vue mathématique, l'étude de la dynamique de spirales suivant la loi (1.17) a suscité de nombreux travaux depuis plus d'une dizaine d'années et plusieurs méthodes ont été proposées pour définir des solutions pour la loi (1.17). Tout d'abord, une approche par champ de phase a été proposée dans [103] (voir aussi [124, 125]). Dans [138, 126], la loi géométrique est étudiée en utilisant une approche de type level sets. Dans [86], les auteurs construisent des spirales se déplaçant dans un anneau (compact) avec des données aux bords de type Neumann en résolvant l'équation aux dérivées partielles associée. Comme dans [86], Ohtsuka dans [126] considère également des spirales se déplaçant dans un anneau. Notre but est donc de construire des solutions de la loi géométrique (1.17) en prenant en compte à la fois la singularité au point d'attache et le fait que le domaine ne soit pas borné.

Une spirale est une courbe  $\Gamma$  paramétrisée de la manière suivante :

$$\Gamma = \{re^{-iu(r)} : r \geq 0\} \subset \mathbb{C}$$

pour une certaine fonction  $u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Si la spirale bouge dans le temps, alors la fonction  $u$  dépend également du temps. Nous donnons maintenant la définition exacte d'une spirale :

**Définition 1.17. (Définition d'une spirale)**

*Une spirale évoluant en temps est une famille de courbes  $(\Gamma_t)_{t>0}$  pouvant s'écrire de la manière suivante*

$$\Gamma_t = \{re^{i\theta} : r > 0, \theta \in \mathbb{R}, \theta + u(t, r) = 0\} \quad (1.18)$$

*pour une certaine fonction  $u : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . La courbe est orientée en choisissant la normale extérieure égale à  $(-i + r\partial_r \bar{u}(t, r))e^{-i\bar{u}(t, r)}$ .*

Ceci implique en particulier que la fonction  $u$  satisfait l'équation parabolique suivante :

$$\begin{cases} ru_t = c\sqrt{1 + r^2u_r^2} + u_r \left( \frac{2 + r^2u_r^2}{1 + r^2u_r^2} \right) + \frac{ru_{rr}}{1 + r^2u_r^2} & \text{dans } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ u(0, r) = u_0(r) & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases} \quad (1.19)$$

On remarque en particulier que les coefficients ne sont pas bornés (ils explosent linéairement en  $r$ ) et que l'équation est singulière dans le sens où quand  $r \rightarrow 0$  soit  $ru_t \rightarrow 0$  soit la dérivée de  $u$  en temps explose. De plus la donnée initiale n'est pas bornée non plus. Pour

cette équation, notre but est de montrer un résultat d'existence et d'unicité. Plusieurs travaux ont étudié récemment l'unicité pour des équations quasi-linéaires avec des coefficients non bornés (voir par exemple [18, 58]) en utilisant les techniques de solutions de viscosité. Malheureusement, notre équation ne satisfait pas les hypothèses de ces papiers.

Notre premier résultat est un principe de comparaison pour l'équation (1.19) :

**Théorème 1.18. (Principe de comparaison pour (1.19), [FIMc, Théorème 1.2])**

*On suppose que  $u_0 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction Lipschitzienne. Soit  $u$  une sous-solution et  $v$  une sur-solution de (1.19) telles qu'il existe  $C_1 > 0$  telle que pour tout  $t \in [0, T)$  et  $r > 0$ , on a*

$$u(t, r) - u_0(r) \leq C_1 \quad \text{et} \quad v(t, r) - u_0(r) \geq -C_1. \quad (1.20)$$

*Si  $u(0, r) \leq u_0(r) \leq v(0, r)$  pour tout  $r \geq 0$ , alors  $u \leq v$  dans  $[0, T) \times (0, +\infty)$ .*

Une difficulté pour montrer ce résultat est qu'il n'y a *a priori* pas de condition aux bords en  $r = 0$ . En fait, en un certain sens, celle-ci est incluse dans l'équation où l'on voit qu'au moins formellement les solutions vérifient

$$0 = c + 2\bar{u}_r \quad \text{pour} \quad r = 0. \quad (1.21)$$

Néanmoins, cette condition aux bords est seulement vrai asymptotiquement quand  $r \rightarrow 0$  et le fait qu'elle soit incluse dans l'équation la rend difficile à utiliser. Une autre difficulté pour obtenir ce principe de comparaison est de pouvoir dédoubler correctement les variables. En effet, les courbes étant attachées à l'origine, le dédoublement de variable à l'origine n'est pas bien défini. Pour résoudre ces deux difficultés, nous avons dû passer en coordonnées logarithmiques  $x = \ln r$  pour  $r$  proche de 0.

Une autre difficulté vient de la croissance de la donnée initiale que nous supposons sous-linéaire. Ceci implique en particulier que les sous et sur-solutions le sont également. En passant en coordonnées logarithmiques, elles deviennent donc à croissance exponentielle en  $x = +\infty$  et nous n'avons pas été capable d'adapter les arguments classiques dans ce cas. Il y a par exemple une difficulté similaire pour le mouvement par courbure moyenne pour les graphes où l'unicité n'est pas connue pour des données initiales sur-linéaires (voir [18, 58]). En d'autres mots, le changement de coordonnées ne semble pas marcher loin de l'origine. On doit donc repasser en coordonnées cartésiennes loin de l'origine et traiter l'équation dans des coordonnées différentes suivant si l'on est près ou loin de l'origine.

On passe maintenant à la question de l'existence d'une solution. Pour cela, nous avons besoin de restreindre la croissance des dérivées de la condition initiale. Pour cela, on rappelle la définition de courbure moyenne pour une spirale paramétrisée par  $u$  :

$$\kappa_u(r) = u_r \left( \frac{2 + (ru_r)^2}{(1 + (ru_r)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{ru_{rr}}{(1 + (ru_r)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On a alors le résultat suivant

**Théorème 1.19. (Résolution du problème de Cauchy, [FIMc, Théorème 1.4])**

*On suppose que  $u_0 \in W_{loc}^{2,\infty}(0, +\infty)$ , que  $u_0$  est globalement Lipschitzienne et que  $\kappa_{u_0} \in$*

## 1. Propriétés qualitatives concernant la dynamique des dislocations

---

$L^\infty(0, +\infty)$ . Alors, il existe une unique solution  $u$  de (1.19) telle que pour tout  $T > 0$ , il existe une constante  $C_T > 0$  telle que pour tout  $t \in [0, T)$  et  $r > 0$ ,

$$|u(t, r) - u_0(r)| \leq C_T. \quad (1.22)$$

De plus,  $u$  est Lipschitzienne en espace et  $\frac{1}{2}$ -Hölderienne en temps.

**Remarque 1.20.** En particulier, le Théorème 1.19 nous permet de considérer des données initiales qui ne satisfont pas la condition de compatibilité (1.21). De plus, on ne sait pas si la solution construite dans le Théorème 1.19 est régulière (i.e. appartient à  $C^\infty((0, +\infty)^2)$ ).

Pour obtenir un tel résultat, l'idée est d'abord de construire des solutions régulières en supposant que la condition de compatibilité (1.21) est satisfaite par la donnée initiale, ce qui est fait dans le théorème suivant :

**Théorème 1.21. (Existence et unicité d'une solution régulière, [FIMc, Théorème 1.6])**

On suppose que  $\bar{u}_0 \in W_{loc}^{2,\infty}(0, +\infty)$  avec

$$(\bar{u}_0)_r \in W^{1,\infty}(0, +\infty) \quad \text{ou} \quad \kappa_{\bar{u}_0} \in L^\infty(0, +\infty)$$

et que  $u_0$  satisfait la condition de compatibilité suivante pour un certain  $r_0 > 0$

$$|c + \kappa_{u_0}| \leq Cr \quad \text{pour} \quad 0 \leq r \leq r_0. \quad (1.23)$$

Alors il existe une unique solution continue  $\bar{u} : [0, +\infty) \times [0, +\infty)$  de (1.19) qui est  $C^\infty$  sur  $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ , et qui satisfait qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|u(t, r + \rho) - u(t, r)| \leq C|\rho|$$

et

$$|u(t + h, r) - u(t, r)| \leq C|h|. \quad (1.24)$$

La différence avec le théorème 1.19 est que la condition de compatibilité (1.23) nous permet d'améliorer l'estimation Hölder que nous avons en temps et de la remplacer par une estimation Lipschitz. En utilisant ces estimations Lipschitz, on peut en déduire que la solution est régulière. On remarque également que cela nous permet également de montrer que  $u(t, \cdot)$  satisfait (1.23) avec une nouvelle constante. Ceci implique en particulier que  $u(t, \cdot)$  satisfait la condition de compatibilité (1.21) pour tout temps  $t \geq 0$ .

Ce résultat ouvre la porte à beaucoup de questions nouvelles. Tout d'abord, on peut se demander s'il existe une solution en régime permanent à cette équation. Avec C. Imbert et R. Monneau, nous avons montré dans un travail en cours [FIMa] que la réponse était positive. De manière plus précise, il est possible de montrer qu'il existe une unique constante  $\lambda$  telle qu'il existe un profil  $\varphi$  tel que

$$u(t, r) = \lambda t + \varphi(r)$$

soit solution de (1.19). Notre but est maintenant de montrer que si l'on prend une donnée initiale coincée entre deux profils, alors la solution de (1.19) va converger vers la solution en régime permanent.

Une généralisation importante de ce résultat est bien sûr l'extension au cas des vraies sources de Frank-Read, c'est à dire au cas où la courbe est attachée en deux points. Dans ce cas, nous ne sommes pas encore capable de montrer un principe de comparaison. Néanmoins, en utilisant le résultat sur les spirales, nous espérons être capable de construire une solution en "recollant" deux spirales.

Enfin, un autre aspect intéressant est la question de l'analyse numérique. En particulier, il serait intéressant de voir comment traiter la singularité créée au point d'attache et comment pouvoir obtenir des schémas convergent ainsi que des estimations d'erreur.

### 1.4 Dynamique de jonctions entre dislocations

On s'intéresse maintenant à la dynamique de jonctions entre dislocations. Ce genre de phénomène apparaît par exemple lorsque l'on observe des structures auto-organisées, comme des réseaux de Frank, c'est à dire des réseaux de dislocations reliées par des jonctions (voir Hull, Bacon [92, p188-190] et Figure 1.3 pour de telles observations). L'étude de ce phénomène reste un problème assez ouvert, autant du point de vue de la modélisation que de l'analyse mathématique (nous renvoyons à Garroni [79] pour le cas stationnaire). Notre but est de proposer, dans un cas simple, un modèle pour la dynamique de jonctions de dislocations et de montrer que celui-ci est bien posé mathématiquement.

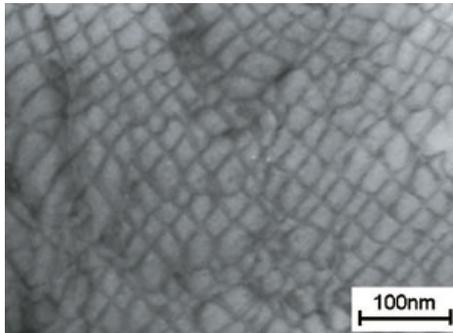


FIGURE 1.3 – Réseau de dislocations dans un cristal

La question de l'étude mathématique des jonctions a beaucoup d'autres applications en physique et il y a beaucoup de littérature sur ce sujet. Nous mentionnons, par exemple, le problème de croissance de cristal (voir Taylor [145, 146] et Bronsard, Reitich [44]). Nous renvoyons également à Bonnet [40] pour des problèmes concernant la minimisation de la fonctionnelle de Mumford-Shah.

Le modèle que nous allons considérer est une version dynamique d'un modèle de champ de phase proposé par Koslowski et Ortiz [104]. Dans ce modèle, on suppose que le réseau est contenu dans un seul plan de glissement, celui où les dislocations peuvent bouger et

## 1. Propriétés qualitatives concernant la dynamique des dislocations

---

la dislocation est représentée par la transition de phase d'un paramètre de phase  $\rho(x) = \rho_1(x)e^1 + \rho_2(x)e^2 \in \mathbb{R}^2$  défini pour  $x = x_1e^1 + x_2e^2$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$  avec  $(e^1, e^2)$  une base orthonormale. L'énergie considérée est alors la suivante :

$$\mathcal{E}(\rho) = \int_{\mathbb{R}^2} -\frac{1}{2}(C^0 \star \rho) \cdot \rho - \sigma^0 \cdot \rho + W(\rho).$$

où  $\sigma^0 \in \mathbb{R}^2$  est une contrainte extérieure constante, le noyau  $C^0(x)$  est une matrice symétrique  $2 \times 2$  qui prend en compte les interactions longue distance entre les dislocations et

$$(C^0 \star \rho)_i = \sum_{j=1,2} C_{ij}^0 \star \rho_j, \quad \text{pour } i = 1, 2$$

où  $\star$  est la convolution usuelle.

Physiquement, pour chaque transition de phase entre deux états  $A$  et  $B$ , la différence  $B - A$  doit être le vecteur de Burger de la dislocation, c'est à dire un vecteur du réseau cristallin  $\Lambda = \mathbb{Z}a^1 + \mathbb{Z}a^2$  que nous considérons, avec une base générale  $(a^1, a^2)$ . Cette information est contenue dans le potentiel  $W : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui va être minimal sur  $\Lambda$  et qui va avoir la périodicité du réseau cristallin  $\Lambda$  :

$$W(\rho + a) = W(\rho) \quad \text{pour tout } a \in \Lambda. \quad (1.25)$$

Dans ce modèle, une jonction entre trois dislocations de vecteur de Burger  $b^1, b^2, b^3 \in \Lambda$  avec  $b^1 + b^2 + b^3 = 0$  est possible et peut être représentée, par exemple, par les transitions de phases entre les états  $0, b^1, -b^3$  (voir Figure 1.4).

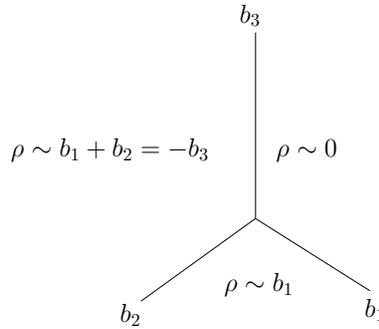


FIGURE 1.4 – Une jonction entre trois dislocations comme les transitions de phases de  $\rho$ .

La contrainte résolue  $\sigma[\rho]$  créée par toutes les dislocations est donnée, de manière formelle, par l'opposé du gradient de l'énergie  $-\mathcal{E}'(\rho)$  et peut être exprimée par la quantité non locale suivante :

$$\sigma[\rho] = \sigma^0 + C^0 \star \rho - W'_\rho(\rho).$$

Le paramètre de phase  $\rho(x, t) \in \mathbb{R}^2$  est alors supposé satisfaire l'équation suivante pour

$k = 1, 2$

$$\begin{cases} (\rho_k)_t = |\nabla \rho|^{-1} \sum_{i=1,2} \sum_{j=1,2} (\sigma[\rho])_i \nabla_j \rho_i \nabla_j \rho_k + \varepsilon \Delta \rho_k, & \text{dans } \mathbb{T}^2 \times (0, T), \\ \rho(x, 0) = \rho^0(x) & \text{sur } \mathbb{T}^2, \end{cases} \quad (1.26)$$

où

$$|\nabla \rho|^2 = \sum_{i=1,2} \sum_{j=1,2} |\nabla_j \rho_i|^2.$$

Le paramètre  $0 < \varepsilon < 1$  est une petite viscosité introduite dans le modèle pour régulariser l'équation mais n'a pas vraiment de sens physique. L'équation (1.26) est uniquement posée sur le tore  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$  pour simplifier l'analyse. Ce genre de conditions périodiques a également un sens physique si on veut décrire des réseaux de dislocations périodiques.

Pour montrer un résultat d'existence pour notre système, nous avons besoin de l'hypothèse suivante sur le noyau  $C^0 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{sym}^{2 \times 2}$

(A) On suppose qu'il existe une constante  $m > 0$ , telle que pour tout  $k \in \mathbb{R}^2$ , les coefficients de Fourier du noyau  $\widehat{C}^0(k) = \int_{\mathbb{T}^2} dx e^{-2i\pi k \cdot x} C^0(x)$  satisfassent  $\widehat{C}^0(k) = M(k)$ , avec pour tout  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$  et pour tout  $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} M \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}; \mathbb{R}_{sym}^{2 \times 2}), \quad M(-\xi) = M(\xi), \quad M(\xi) = |\xi| M\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \\ \frac{|\xi| |p|^2}{m} \geq - \sum_{i=1,2} \sum_{j=1,2} p_i \cdot M_{ij}(\xi) \cdot p_j \geq m |\xi| |p|^2 \quad \text{avec} \quad |p|^2 = \sum_{i=1,2} |p_i|^2 \end{cases} \quad (1.27)$$

On a alors le théorème d'existence suivant :

**Théorème 1.22. (Existence d'une solution pour la dynamique de jonctions entre dislocations, [FM09a, Théorème 1.1])**

On suppose que  $C^0$  vérifie l'hypothèse (A) et que  $W \in C^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}_+)$  vérifie (1.25). On suppose également que  $\rho^0 \in (H^2(\mathbb{T}^2))^2$ . Alors pour toute contrainte constante  $\sigma^0 \in \mathbb{R}^2$  et pour tout temps  $T > 0$ , il existe une solution  $\rho$  of (1.26) avec  $\rho \in C^0\left([0, T]; \left(L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{T}^2)\right)^2\right)$ .

L'unicité de la solution n'est pas connue, ni l'existence d'une solution quand  $\varepsilon = 0$ . Nous mentionnons également que l'équation (1.26) est un système non local d'équations scalaires et peut être comparée à l'équation suivante

$$v_t = |\nabla v|^2 + \Delta v \quad (1.28)$$

En effet, cela vient de l'hypothèse (A) qui implique que la convolution avec le noyau  $C^0$  se comporte comme un opérateur du premier ordre. Beaucoup de travaux ont été faits sur des équations similaires à l'équation (1.28). Nous renvoyons par exemple aux travaux de Boccardo, Murat, Puel [35, 36, 37] dans lesquels ils ont montré l'existence de solutions pour des équations générales incluant l'équation (1.28).

## 2 Résultats d'homogénéisation

### 2.1 Homogénéisation de la dynamique de dislocations

Dans cette section, nous allons présenter des résultats d'homogénéisation pour la dynamique de lignes de dislocations en interaction. L'objectif est de faire le lien entre la dynamique d'un nombre fini de dislocations et la dynamique de densité de dislocations.

De manière plus précise, on veut décrire la dynamique effective pour le mouvement collectif de lignes de dislocations ayant toutes le même vecteur de Burgers et toutes contenues dans le même plan de glissement et se déplaçant dans un milieu périodique (voir Figure 1.5).

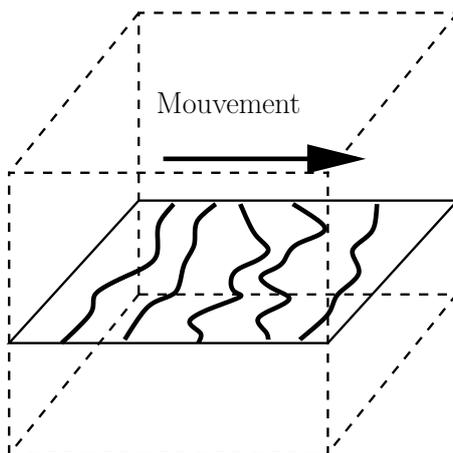


FIGURE 1.5 – Les dislocations dans un plan de glissement.

On va commencer par un premier cas simple où l'on suppose que toutes les lignes de dislocations sont parallèles. Dans ce cas, chaque dislocation est représentée sur la droite réelle par un point qui représente sa position. On se ramène alors à l'homogénéisation d'un système de  $N_\varepsilon$  particules où chaque particule  $y_i(\tau)$  (représentant la position de la dislocation  $i$  au temps  $\tau$ ) interagit avec les autres et satisfait l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\dot{y}_i = F - V'_0(y_i) - \sum_{j \in \{1, \dots, N_\varepsilon\} \setminus \{i\}} V'(y_i - y_j) \quad \text{pour } i = 1, \dots, N_\varepsilon \quad (1.29)$$

où  $F$  est une force constante donnée,  $V_0$  est un potentiel 1-périodique et

$$V(z) = -\ln |z|$$

représente les interactions par paires (voir Figure 1.6 pour une représentation schématique des interactions ; pour être plus proche de la réalité, nous devrions ajouter un ressort entre chaque paire de dislocations).

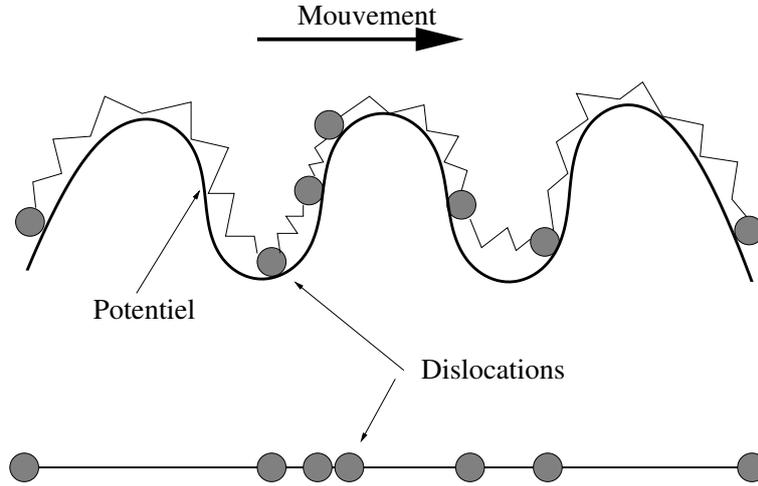


FIGURE 1.6 – Représentation schématique d’un modèle 1D pour des dislocations reliées par des ressorts

Pour énoncer notre résultat d’homogénéisation, nous avons besoin de définir la fonction de répartition constante par morceaux  $\rho$  de la manière suivante :

$$\rho(y, \tau) = -\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} H(y - y_i(\tau)) \quad (1.30)$$

où  $H$  est la fonction de Heaviside définie par

$$H(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \geq 0, \\ 0 & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

Le  $i$ -ème saut (ou discontinuité) de  $\rho$  correspond à la position de la  $i$ -ème particule. On définit également

$$\rho^\varepsilon(y, \tau) = \varepsilon \rho\left(\frac{y}{\varepsilon}, \frac{\tau}{\varepsilon}\right). \quad (1.31)$$

Le but est de montrer un résultat d’homogénéisation, c’est à dire de montrer que la limite  $u^0$  de  $\rho^\varepsilon$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  existe et qu’elle est l’unique solution d’une équation homogénéisée. Le paramètre  $\varepsilon$  prend en compte que le nombre de particules  $N_\varepsilon$  tend vers  $+\infty$ . A la limite, on s’attend à obtenir une équation satisfaite par la “fonction de répartition de dislocations”  $u^0$  dont le gradient représente la densité de dislocations (voir Figure 1.7).

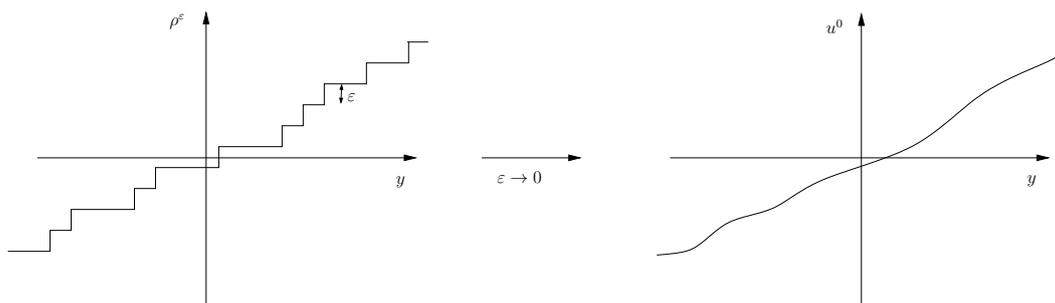


FIGURE 1.7 – Convergence de  $\rho^\varepsilon$  vers  $u^0$

Plus précisément, l'équation effective a la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^0}{\partial t} = \overline{H}(\mathcal{I}_1[u^0(\cdot, t)], Du^0) & \text{dans } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u^0(\cdot, 0) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.32)$$

où  $\overline{H}$  est une fonction continue qui sera définie plus loin (voir (1.37)),  $u_0 \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{I}_1$  est un opérateur de Lévy d'ordre 1 défini pour une fonction  $U \in C_b^2(\mathbb{R})$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1[U](x) = & \int_{|z| \leq r} (U(x+z) - U(x) - \nabla_x U(x) \cdot z) \frac{1}{|z|^2} dz \\ & + \int_{|z| \geq r} (U(x+z) - U(x)) \frac{1}{|z|^2} dz, \end{aligned}$$

pour tout  $r > 0$  et où l'expression est indépendante de  $r$ .

Le résultat d'homogénéisation pour le système de particules est alors le suivant :

**Théorème 2.1. (Homogénéisation du système de particules, [FIM09b, Théorème 2.14])**

On suppose que  $V_0$  est 1-périodique et que  $V_0'$  est Lipschitzienne. On suppose également que  $y_1(0) < \dots < y_{N_\varepsilon}(0)$  sont données par les discontinuités d'une fonction  $\rho_0^\varepsilon = \varepsilon E\left(\frac{u_0(x)}{\varepsilon}\right)$  avec  $u_0 \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ ,  $u_0$  croissante sur  $\mathbb{R}$  et  $E$  une modification de la partie entière définie par

$$E(\alpha) = k + \frac{1}{2} \quad \text{si } k \leq \alpha < k + 1. \quad (1.33)$$

Alors  $\rho^\varepsilon$  définie par (1.31) converge vers la solution  $u^0$  de (1.32).

Dans l'équation (1.32), l'opérateur intégral garde en mémoire les interactions à longue distance alors que la non-linéarité  $\overline{H}$  garde en mémoire les interactions à courte distance. Nous renvoyons à Imbert, Monneau, Rouy [94] pour une interprétation mécanique du problème homogénéisé.

Nous donnons ici quelques propriétés qualitatives pour l'Hamiltonien effectif  $\bar{H}$ , avec la notation

$$c(y) = V_0'(y) - F. \quad (1.34)$$

Pour interpréter ces résultats, on rappelle que  $p = u_x^0$  représente la densité de dislocation. De plus, on peut montrer que l'opérateur non-local  $L = \mathcal{I}_1[u^0(\cdot, t)]$  est proportionnel à la contrainte du matériau. Enfin  $u_t^0$  peut être interprété comme la vitesse de déformation plastique. L'équation homogénéisée (1.32) exprime donc la vitesse de déformation plastique en fonction de la densité de dislocations et la contrainte du matériau. On a alors le résultat suivant :

**Théorème 2.2. (Propriétés qualitatives de  $\bar{H}$ , [FIM09b, Théorème 2.6])**

Sous l'hypothèse  $\int_{(0,1)} c = 0$ , la fonction  $\bar{H}(L, p)$  est continue et satisfait les propriétés suivantes :

1. Si  $c \equiv 0$ , alors on retrouve la loi de Orowan  $\bar{H}(L, p) = L|p|$ .
2. **(Croissance du Hamiltonien)** Le Hamiltonien  $\bar{H}$  est croissant par rapport à la contrainte. Ainsi, plus on augmente la contrainte extérieure  $L$ , plus les dislocations vont se déplacer vite, ce qui implique que le matériau va se déformer de plus en plus vite.
3. **(Signe de l'Hamiltonien)**

$$\bar{H}(L, p)L \geq 0 \quad \text{pour } (L, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Ceci implique en particulier que  $\bar{H}$  est nul (i.e. les dislocations ne bougent pas) si la contrainte extérieure  $L$  est nulle.

4.  $\bar{H}(L, 0) = 0$ , ce qui signifie que s'il n'y a pas de dislocations alors le matériau ne se déforme pas.
5. **(Piégeage des particules)** Si  $c \not\equiv 0$ , alors il existe  $r_0 > 0$  (dépendant seulement de  $\|c\|_\infty$  et de  $V''_{|\mathbb{R} \setminus [-1,1]}$ ) tel que :

$$\bar{H}(L, p) = 0 \quad \text{pour } (L, p) \in B_{r_0}(0) \subset \mathbb{R}^2.$$

Ceci signifie que si la contrainte extérieure et le nombre de dislocations sont trop petits alors les dislocations ne bougent pas (elles sont piégées dans un puits du potentiel périodique) et le matériau ne se déforme pas.

6. **(Déblocage des particules)** Pour tout  $p > 0$ , il existe  $L_0 > 0$  telle que  $\bar{H}(L_0, p) > 0$ . Ceci implique en particulier que si l'on applique une force extérieure suffisamment grande alors les dislocations vont bouger et le matériau va se déformer.

Ce qui est assez remarquable dans ce théorème est que l'on retrouve, grâce à notre modèle simplifié, des propriétés bien connues des physiciens concernant la dynamique des dislocations. L'effet de piégeage des particules est par exemple un phénomène bien connu en physique où la loi de Norton avec seuil est par exemple donnée par

$$\bar{H}(L, p) = C(p) \operatorname{sgn}(L)(|L| - L_C)^+$$

où  $\text{sgn}(L)$  est le signe de  $L$  et  $L_C$  est un seuil.

Dans la Figure 1.8, nous avons représenté le profil typique de  $\overline{H}^0$ . Nous renvoyons également à Ghorbel [82] et Ghorbel, Hoch, Monneau [83] pour des simulations.

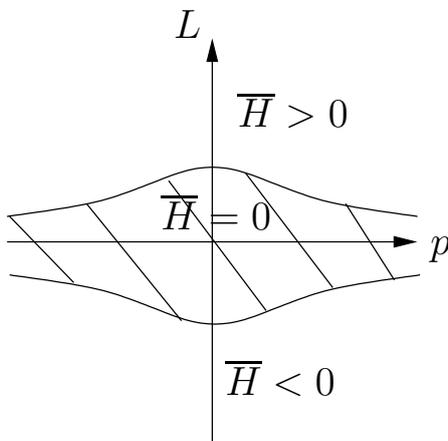


FIGURE 1.8 – Représentation schématique de l'Hamiltonien effectif

L'idée essentielle dans la preuve d'homogénéisation est que l'on peut injecter notre système de particules dans une équation aux dérivées partielles. De manière plus précise, on peut montrer que  $\rho^\varepsilon$  est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = \left( c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + M^\varepsilon \left[ \frac{u^\varepsilon(\cdot, t)}{\varepsilon} \right] (x) \right) |Du^\varepsilon| & \text{dans } (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ u^\varepsilon(\cdot, 0) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.35)$$

où  $M^\varepsilon$  est un opérateur non-local d'ordre 0 défini par

$$M^\varepsilon [U] (x) = \int_{\mathbb{R}} dz J(z) E(U(x + \varepsilon z) - U(x)) \quad (1.36)$$

avec  $E$  définie par (1.33).

On peut alors utiliser les techniques plus classiques d'homogénéisation d'équations d'Hamilton-Jacobi introduite par Lions, Papanicolaou, Varadhan [112] (nous renvoyons également à Alvarez, Bardi [2, 3], Evans [68, 69] et Lions, Papanicolaou et Varadhan [112] pour une bonne introduction à l'homogénéisation des équations de Hamilton-Jacobi). L'Hamiltonien effectif est alors déterminé par l'unique constante  $\lambda$  telle que pour  $L, p \in \mathbb{R}$ , il existe une solution 1-périodique  $v$  du problème dans la cellule suivant (voir [FIM09b, Théorème 2.1] :

$$\lambda + \partial_\tau v = \left( c(\tau, y) + L + M_p[v(\tau, \cdot)](y) \right) |p + \nabla v| \text{ dans } (0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \quad (1.37)$$

où

$$M_p[U](y) = \int dz J(z) \{E(U(y+z) - U(y) + p \cdot z) - p \cdot z\}.$$

De plus, on a le résultat de convergence suivant (ainsi que le Théorème 2.2) :

**Théorème 2.3. (Convergence, [FIM09b, Théorème 2.5])**

*On suppose que  $c$  est Lipschitz et 1-périodique et que  $u_0 \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ . Alors l'unique solution de viscosité bornée  $u^\varepsilon$  de (1.35) converge quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  localement uniformément en  $(t, x)$  vers l'unique solution de viscosité bornée  $u^0$  de (1.32).*

Ce résultat suit les travaux de Imbert, Monneau [93] et Imbert, Monneau et Rouy [94]. La différence majeure est qu'ici on propose un modèle qui décrit mieux la dynamique d'un nombre fini de lignes de dislocations en interactions. La difficulté technique est d'arriver à traiter la partie entière  $E$  qui est discontinue. Dans [94], les auteurs ont considéré un modèle différent où la partie entière a été en quelque sorte régularisée. Ici, au contraire, on garde le modèle avec la partie entière. Pour surmonter la difficulté créée par la discontinuité, il faut utiliser la formulation level sets proposée par Slepčev [137] pour les équations non-locales (cf Définition 1.10). L'avantage de cette formulation est qu'elle permet d'avoir de la stabilité dans la définition des solutions de viscosité, ce qui est crucial pour cette théorie.

Une autre difficulté est que l'Hamiltonien considéré ici n'est pas coercif et il n'est donc pas possible d'obtenir des estimations de gradients pour le correcteur comme c'est le cas dans la théorie classique (voir [112]). Pour surmonter cette difficulté, nous avons utilisé les idées de [93, 94] en contrôlant les oscillations du correcteur  $v$ . Nous renvoyons également à Barles [17] pour des résultats d'homogénéisation dans le cas non-coercif.

## 2.2 Homogénéisation de systèmes de particules de type Frenkel-Kontorova

Les idées que nous avons présentées dans la sous-section précédente nous ont permis d'homogénéiser un système de particules en l'injectant dans une équation aux dérivées partielles. En réutilisant cette idée, il est en fait possible d'homogénéiser d'autres types de système de particules et en particulier les systèmes de type Frenkel-Kontorova qui font apparaître non plus des interactions de paires mais seulement aux plus proches voisins.

### 2.2.1 Le système de Frenkel-Kontorova classique

Nous commençons par présenter ces résultats dans le cas du système de Frenkel-Kontorova classique. Il s'agit d'un modèle simple qui permet de décrire une chaîne de particules évoluant sur la droite réelle et où chaque particule interagit avec ses deux plus proches voisines et ressent une force créée par un potentiel périodique. Si l'on note  $U_i(\tau)$  la position de la  $i$ ème particule à l'instant  $\tau$ , alors la loi d'évolution est donnée par

$$m_0 \frac{d^2 U_i}{d\tau^2} + \frac{dU_i}{d\tau} = U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1} + \sin(2\pi U_i) + L \tag{1.38}$$

où  $m_0$  est la masse d'une particule,  $L$  est une force extérieure constante qui permet de faire avancer le train de particules et le terme  $\sin(2\pi U_i)$  représente la force créée par le potentiel

périodique. Comme précédemment, le but est d'étudier le comportement de la solution  $U$  de (1.38) quand le nombre de particules par unité de longueur tend vers l'infini. Pour faire cela, on va supposer qu'à l'instant initial la position des particules est bien préparée, c'est à dire qu'il existe une fonction  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$  tels que

$$\begin{aligned} U_i(0) &= \varepsilon^{-1} u_0(i\varepsilon) \\ \frac{dU_i}{d\tau}(0) &= 0. \end{aligned}$$

On suppose également qu'à l'instant initial il existe une constante  $K_0 > 0$  telle que le nombre de particules par unité de longueur est compris entre  $K_0^{-1}\varepsilon^{-1}$  et  $K_0\varepsilon^{-1}$ . Ceci se traduit sur la fonction  $u_0$  par l'hypothèse suivante :

$$0 < 1/K_0 \leq (u_0)_x \leq K_0 \quad \text{sur } \mathbb{R}. \quad (1.39)$$

Pour étudier le comportement de la solution  $U$  de (1.38) quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, on introduit la fonction suivante qui décrit la position remise à l'échelle des particules (voir Figure (2.1))

$$\bar{u}^\varepsilon(t, x) = \varepsilon U_{\lfloor \varepsilon^{-1}x \rfloor}(\varepsilon^{-1}t) \quad (1.40)$$

où  $\lfloor \cdot \rfloor$  est la partie entière inférieure.

Notre résultat concernant l'homogénéisation du système de Frenkel-Kontorova nous dit que quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, la solution de (1.40) converge vers la solution d'une équation de Hamilton-Jacobi de la forme suivante :

$$\begin{cases} u_t^0 = \bar{F}(u_x^0) & \text{dans } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u^0(\cdot, 0) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.41)$$

où  $\bar{F}$  est une fonction continue à déterminer. De manière plus précise, on a le théorème suivant :

**Théorème 2.4. (Homogénéisation du système de Frenkel-Kontorova, [FIMb, Théorème 1.1])**

*Il existe une masse critique  $m_0^c$  telle que pour tout  $m_0 \in ]0, m_0^c]$  et pour tout  $L \in \mathbb{R}$ , il existe une fonction continue  $\bar{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que la fonction  $\bar{u}^\varepsilon$  converge localement uniformément vers l'unique solution de viscosité  $u^0$  de (1.41).*

**Remarque 2.5.** *La masse critique  $m_0^c$  est précisé dans l'hypothèse (A3) ci-dessous.*

Dans [FIM09a], nous avons traité avec C. Imbert et R. Monneau le cas complètement amorti  $m_0 = 0$ . Nous avons ensuite généralisé ce résultat dans [FIMb] au cas accéléré  $m_0 > 0$ . La différence principale est que dans le cas complètement amorti, la dynamique peut être injectée dans une seule EDP alors que dans le cas accéléré, la dynamique doit être injectée dans un système d'EDP où, de manière simplifiée, une équation décrit la position des particules et l'autre leur vitesse. Cette approche (que nous allons détailler plus loin) permet également d'homogénéiser des systèmes de type Frenkel-Kontorova où l'on considère différents types de particules.

### 2.2.2 Exemple de système avec $n$ types de particules

Etant donné un entier  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et une suite de nombres réels  $(\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  tels que

$$\theta_{i+n} = \theta_i > 0 \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z},$$

un exemple typique de ce genre de problème est de considérer que la position des particules est donnée par

$$m_0 \frac{d^2 U_i}{d\tau^2} + \frac{dU_i}{d\tau} = \theta_{i+1}(U_{i+1} - U_i) - \theta_i(U_i - U_{i-1}) + \sin(2\pi U_i) + L. \quad (1.42)$$

Ce modèle est schématisé dans la Figure 1.9. Comme nous allons l'énoncer plus loin, il est possible de montrer le même genre de résultat que celui énoncé dans le Théorème 2.4.

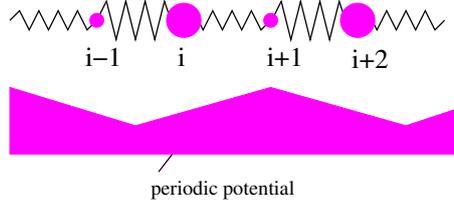


FIGURE 1.9 – Le modèle FK avec  $n = 2$  types de particules et une interaction aux plus proches voisins

Comme indiqué précédemment, l'idée essentielle est d'injecter cette dynamique dans un système d'EDP. Pour utiliser les techniques classiques d'homogénéisation, nous devons donc obtenir un système quasi-monotone (au sens de Ishii, Koike [99]). Pour ce faire, en s'inspirant des travaux de Baesens, MacKay [10] et de Hu, Qin, Zhang [91], nous avons proposé d'introduire pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  la fonction suivante

$$\Xi_i(\tau) = U_i(\tau) + 2m_0 \frac{dU_i}{d\tau}(\tau).$$

En utilisant cette nouvelle fonction, le système d'EDOs (1.42) peut se réécrire sous la forme suivante : pour  $\tau \in (0, +\infty)$  et  $i \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{cases} \frac{dU_i}{d\tau} = \alpha_0(\Xi_i - U_i) \\ \frac{d\Xi_i}{d\tau} = 2\theta_{i+1}(U_{i+1} - U_i) - 2\theta_i(U_i - U_{i-1}) + 2\sin(2\pi U_i) + 2L + \frac{1}{2m_0}(U_i - \Xi_i), \end{cases}$$

où  $\alpha_0 = \frac{1}{2m_0}$ . Grâce à ce changement de variable, le système est maintenant monotone et pourra être homogénéisé.

**Remarque 2.6.** *De manière plus générale, pour rendre le système monotone, il est possible de définir la fonction  $\Xi$  de la manière suivante :*

$$\Xi_i(\tau) = U_i(\tau) + \frac{1}{\alpha} \frac{dU_i}{d\tau}(\tau)$$

avec  $\frac{1}{\alpha} > m_0$ . Pour simplifier la présentation, nous avons choisi  $\alpha = 1/(2m_0)$ . Ce choix est également justifié par le fait que pour le modèle de Frenkel-Kontorova classique (1.38), il est optimal dans le sens où il permet d'obtenir la valeur critique  $m_0^c$  la plus grande possible.

### 2.2.3 Cas général avec $n$ types de particules

D'une manière plus générale, on considère le système de Frenkel-Kontorova généralisé avec  $n$  type de particules suivant :

$$m_0 \frac{d^2 U_i}{d\tau^2} + \frac{dU_i}{d\tau} = F_i(\tau, U_{i-m}, \dots, U_{i+m}) \quad (1.43)$$

où les fonctions  $F_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , qui à  $(\tau, V)$  associent  $F_j(\tau, V)$ , vérifient les hypothèses suivantes (avec  $V = (V_{-m}, \dots, V_m)$ )

(A1) (**Régularité**)

$$\begin{cases} F_j \text{ est continue,} \\ F_j \text{ est Lipschitzienne en } V \text{ uniformément en } \tau \text{ et } j. \end{cases}$$

(A2) (**Monotonie en }  $V_i, i \neq 0$** )

$$F_j(\tau, V_{-m}, \dots, V_m) \text{ est croissante en } V_i \text{ pour } i \neq 0.$$

(A3) (**Monotonie en }  $V_0$** )

$$\alpha_0 + 2 \frac{\partial F_j}{\partial V_0} \geq 0 \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}.$$

**Remarque 2.7.** L'hypothèse (A3) s'interprète en demandant que la masse  $m_0$  soit suffisamment petite par rapport aux variations de la non-linéarité.

(A4) (**Périodicité**)

$$\begin{cases} F_j(\tau, V_{-m} + 1, \dots, V_m + 1) = F_j(\tau, V_{-m}, \dots, V_m), \\ F_j(\tau + 1, V) = F_j(\tau, V). \end{cases}$$

(A5) (**Périodicité des types de particules**)

$$F_{j+n} = F_j \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}.$$

L'hypothèse suivante permet de garantir une propriété d'ordre sur les particules, *i.e.*  $u_j \leq u_{j+1}$  est préservée pour tout temps.

(A6) (**Ordre**) Pour tout  $(V_{-m}, \dots, V_m, V_{m+1}) \in \mathbb{R}^{2m+2}$  tels que  $V_{i+1} \geq V_i$  pour tout  $|i| \leq m$ , on a

$$2F_{j+1}(\tau, V_{-m+1}, \dots, V_{m+1}) + \alpha_0 V_1 \geq 2F_j(\tau, V_{-m}, \dots, V_m) + \alpha_0 V_0.$$

Cette dernière hypothèse permet de garantir l'ordre des particules, c'est à dire que  $U_j \leq U_{j+1}$  pour tout temps. Dans le cas où l'on a un seul type de particules ( $F_{j+1} = F_j$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ ), alors cette hypothèse est une conséquence directe de (A2) et (A3).

**Exemple 2.8.** Les hypothèses (A1)-(A5) sont en particulier satisfaites pour le modèle de Frenkel-Kontorova (1.42) avec  $n$  types de particules,  $m = 1$  et

$$F_j(\tau, V_{-1}, V_0, V_1) = \theta_{j+1}(V_1 - V_0) - \theta_j(V_0 - V_{-1}) + \sin(2\pi V_0) + L$$

pour  $\alpha_0 \geq 2(\theta_j + \theta_{j+1}) + 4\pi$ . Pour que l'hypothèse (A6) soit vérifiée, il faut supposer de plus que  $\alpha_0 \geq 4\theta_j + 4\pi$ .

En utilisant les mêmes idées que précédemment, et en particulier l'équation (1.40), on se ramène à l'étude d'une fonction

$$(u, \xi) = ((u_j(y, \tau))_{j \in \mathbb{Z}}, (\xi_j(y, \tau))_{j \in \mathbb{Z}})$$

satisfaisant le système d'EDP suivant : pour tout  $(y, \tau) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  et pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{cases} \begin{cases} (u_j)_\tau = \alpha_0(\xi_j - u_j) \\ (\xi_j)_\tau = 2F_j(\tau, [u(\cdot, \tau)]_{j,m}) + \alpha_0(u_j - \xi_j), \end{cases} \\ \begin{cases} u_{j+n}(y, \tau) = u_j(y+1, \tau) \\ \xi_{j+n}(y, \tau) = \xi_j(y+1, \tau). \end{cases} \end{cases} \quad (1.44)$$

où pour une fonction générale  $v$ , on a

$$[v]_{j,m}(y) = (v_{j-m}(y), \dots, v_{j+m}(y)).$$

Etant donné  $\varepsilon > 0$ , on remet le système à l'échelle en considérant

$$\begin{cases} u_j^\varepsilon(x, t) = \varepsilon u_j\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\right) \\ \xi_j^\varepsilon(x, t) = \varepsilon \xi_j\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\right). \end{cases} \quad (1.45)$$

et on impose les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} u_j^\varepsilon(x, 0) = u_0\left(x + \frac{j\varepsilon}{n}\right) \\ \xi_j^\varepsilon(x, 0) = \xi_0^\varepsilon\left(x + \frac{j\varepsilon}{n}\right). \end{cases} \quad (1.46)$$

où  $u_0$  et  $\xi_0^\varepsilon$  satisfont :

**(A0) (Borne par en-dessous sur le gradient)** Il existe deux constantes  $K_0 > 0$  et  $M_0 > 0$  telles que :

$$\begin{aligned} 0 < 1/K_0 \leq (u_0)_x \leq K_0 & \text{ dans } \mathbb{R}, \\ 0 < 1/K_0 \leq (\xi_0^\varepsilon)_x \leq K_0 & \text{ dans } \mathbb{R}, \\ \|u_0 - \xi_0^\varepsilon\|_\infty \leq M_0\varepsilon. \end{aligned}$$

Notre résultat d'homogénéisation s'énonce alors de la manière suivante :

**Théorème 2.9. (Homogénéisation de systèmes de type FK avec  $n$  types de particules, [FIMb, Théorème 1.5])**

*On suppose que les  $(F_j)_j$  satisfont (A1)-(A6) et que les données initiales  $u_0, \xi_0^\varepsilon$  vérifient (A0). Alors il existe une fonction continue  $\bar{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout entier  $i \in \mathbb{Z}$ , les fonctions  $u_j^\varepsilon$  et  $\xi_j^\varepsilon$  définies par (1.45) convergent localement uniformément vers l'unique solution de viscosité  $u^0$  de (1.41).*

**Remarque 2.10.** *Le fait qu'à la limite on obtienne seulement une équation peut paraître surprenant. Cela vient en fait de l'hypothèse (A6) et de la définition de  $\xi_j^\varepsilon$ . En effet, l'hypothèse (A6) implique que les fonctions  $u_j^\varepsilon$  et  $\xi_j^\varepsilon$  sont croissantes en  $j$ , c'est à dire que :  $u_{j+1}^\varepsilon \geq u_j^\varepsilon$  et  $\xi_{j+1}^\varepsilon \geq \xi_j^\varepsilon$ . Ainsi, à la limite, on s'attend à récupérer au plus deux équations (une pour l'évolution des  $u$  et la seconde pour celle des  $\xi$ ). De plus, d'après la définition de  $\xi_j^\varepsilon$ , on a  $\xi_j^\varepsilon = u_j^\varepsilon + O(\varepsilon)$ ; ainsi une seule équation est nécessaire pour décrire l'évolution macroscopique de tout le système.*

Pour compléter cette partie, il ne reste plus qu'à expliquer comment est déterminée la non-linéarité  $\overline{F}$ . Ceci est fait à l'aide des fonctions enveloppes que nous allons définir dans la section suivante et qui vont jouer le rôle des correcteurs de la théorie classique.

### 2.2.4 Fonctions enveloppes

Nous allons maintenant définir la notion de fonctions enveloppes pour notre système. De manière formelle, nous allons chercher des fonctions  $((h_j(z, \tau))_{j \in \mathbb{Z}}$  et  $(g_j(z, \tau))_{j \in \mathbb{Z}}$  telles que

$$u_i^\varepsilon(x, t) \simeq \varepsilon h_i \left( \frac{u^0(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon} \right) \quad \text{et} \quad \xi_i^\varepsilon(x, t) \simeq \varepsilon g_i \left( \frac{u^0(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon} \right)$$

et telles  $h_i(\frac{z}{\varepsilon}, \tau) \rightarrow z$  et  $\varepsilon g_i(\frac{z}{\varepsilon}, \tau) \rightarrow z$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En supposant qu'à l'échelle microscopique  $u^0(y, \tau) \simeq py + \lambda\tau$ , cela revient à chercher  $((h_j(z, \tau))_{j \in \mathbb{Z}}, (g_j(z, \tau))_{j \in \mathbb{Z}}$  telles que

$$(u_j(y, \tau), \xi_j(y, \tau)) = (h_j(py + \lambda\tau, \tau), g_j(py + \lambda\tau, \tau))$$

soit une solution de (1.44).

#### Définition 2.11 (Fonctions enveloppes pour le système (1.44)).

Soit  $p \in (0, +\infty)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , On dit que les fonctions  $((h_j)_j, (g_j)_j)$  sont des fonctions enveloppes pour (1.44) si elles vérifient les propriétés suivantes pour tout  $(z, \tau) \in \mathbb{R}^2$ ,  $j \in \mathbb{Z}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (h_j)_\tau + \lambda(h_j)_z = \alpha_0(g_j - h_j) \\ h_j(z, \tau + 1) = h_j(z, \tau) \\ h_j(z + 1, \tau) = h_j(z, \tau) + 1 \\ h_{j+n}(z, \tau) = h_j(z + p, \tau) \\ h_{j+1}(z, \tau) \geq h_j(z, \tau) \\ (h_j)_z(z, \tau) \geq 0 \\ \exists C \text{ t.q. } |h_j(z, \tau) - z| \leq C \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (g_j)_\tau + \lambda(g_j)_z \\ \quad = 2F_j(\tau, [h(\tau, \cdot)]_{j,m}(z)) + \alpha_0(h_j - g_j) \\ g_j(z, \tau + 1) = g_j(z, \tau) \\ g_j(z + 1, \tau) = g_j(z, \tau) + 1 \\ g_{j+n}(z, \tau) = g_j(z + p, \tau) \\ g_{j+1}(z, \tau) \geq g_j(z, \tau) \\ (g_j)_z(z, \tau) \geq 0 \\ \exists C \text{ s.t. } |g_j(z, \tau) - z| \leq C. \end{array} \right. \quad (1.47)$$

Dans le cas où les fonctions  $(F_j)_j$  ne dépendent pas de  $\tau$ , on demande également que les fonctions  $((h_j)_j, (g_j)_j)$  ne dépendent pas de  $\tau$ .

Le théorème suivant explique comment est déterminé l'Hamiltonien effectif  $\overline{F}$

**Théorème 2.12. (Hamiltonien effectif et fonctions enveloppes, [FIMb, Théorème 1.10])**

Soient  $(F_j)_j$  satisfaisant (A1)-(A6) et  $p \in (0, +\infty)$ . Alors il existe un unique nombre réel  $\lambda$  pour lequel il existe des fonctions enveloppes  $((h_j)_j, (g_j)_j)$ . De plus, le nombre  $\lambda = \overline{F}(p)$  vu comme une fonction de  $p$  est continue sur  $(0, +\infty)$ .

### 2.3 Perspectives

Avec R. Monneau et son étudiant M. Al Hajj, nous sommes en train d'utiliser les techniques développées dans [FIM09a, FIMb] afin de construire des "pulsating travelling waves" solutions du modèle de Frenkel-Kontorova. De manière plus précise, le but est de construire des solutions de la forme  $u(y, t) = \varphi(y + ct)$  où  $c$  va représentée la vitesse de l'onde  $\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty) = 1$ . Pour faire cela, l'idée est de remarquer que si l'on définit

$$\phi_p(z) = h_p(pz),$$

où  $h_p$  est la fonction enveloppe définie dans le théorème 2.12, est solution de l'équation désirée. Pour obtenir le résultat désiré, l'idée est ensuite de passer à la limite lorsque  $p \rightarrow 0$ .

Une autre question importante concernant ces résultats d'homogénéisation est de se passer de l'hypothèse de périodicité et de regarder le cas stationnaire ergodique. Il s'agit d'une question beaucoup plus difficile car la périodicité permettait de récupérer une certaine compacité pour pouvoir passer à la limite. La plupart des résultats connus dans ce cas repose sur des formules de représentations, qui ne sont malheureusement plus vraies en non-local. Avec A. Briani et P. Cardaliaguet, nous sommes en train d'essayer d'adapter une nouvelle approche développée récemment par Lions, Souganidis [113] au cas non-local.

## 3 Méthodes numériques pour la dynamique des dislocations

Cette partie est consacrée à l'analyse numérique pour la dynamique des dislocations. Dans la première sous-section nous nous intéressons à la dynamique d'une ligne de dislocation et plus précisément au modèle (1.9) qui est monotone. Pour le modèle (1.2), une analyse a été faite par Alvarez, Carlini, Monneau, Rouy [5, 6]. Nous renvoyons également à [CFM] et au chapitre 3 pour un schéma basé sur la méthode Fast Marching introduite par Sethian [135]. La deuxième sous-section est consacrée à la dynamique de densité de dislocation et repose sur un travail en collaboration avec A. El Hajj [EHF08].

### 3.1 Dynamique d'une ligne de dislocation

Dans cette sous-section, nous nous intéressons à la dynamique d'une ligne de dislocation et en particulier à l'équation (1.9). Pour ce modèle, nous allons proposer un schéma numérique et montrer une estimation d'erreur à la Crandall, Lions [61] entre la solution et son approximation numérique. Nous utiliserons ensuite le résultat concernant la convergence à grande échelle de la dynamique des dislocations vers le mouvement par courbure moyenne pour en déduire un schéma numérique pour le mouvement par courbure moyenne (pour lequel nous aurons donc une estimation d'erreur).

### 3.1.1 Schéma numérique pour la dynamique d'une ligne de dislocation

On se donne un pas d'espace  $\Delta x$  et un pas de temps  $\Delta t$  et on considère la grille de discrétisation suivante :

$$Q_T^\Delta = Q^\Delta \times \{0, \dots, (\Delta t)N_T\}$$

où  $Q^\Delta = \{(i_1\Delta x, i_2\Delta x), I = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2\}$  et  $N_T$  est la partie entière de  $T/\Delta t$ . On note  $(x_{i_1}, x_{i_2}, t_n) = (x_I, t_n)$  le noeud  $(i_1\Delta x, i_2\Delta x, n\Delta t)$  et  $v_I^n$  la valeur de l'approximation numérique de la solution exacte  $u(x_I, t_n)$  de (1.9).

La solution discrète  $v$  est calculée itérativement de manière classique en utilisant un schéma implicite de type différence finie :

$$v_I^0 = \tilde{u}_0(x_I), \quad \frac{v_I^{n+1} - v_I^n}{\Delta t} = c^\Delta [v]_I^{n+1} G(v^{n+1})_I \quad (1.48)$$

où  $\tilde{u}_0$  est une approximation de  $u_0$  et  $G(v^{n+1})_I$  est une approximation appropriée du gradient de  $v^{n+1}$  pris au point  $x_I$ . La vitesse non-locale est donnée par convolution discrète

$$c^\Delta [v]_I^{n+1} = \sum_{K \in \mathbb{Z}^2} \bar{J}_{I-K} 1_{\{v_K^{n+1} \geq v_I^{n+1}\}} (\Delta x)^2 - \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathbb{Z}^2} \bar{J}_K (\Delta x)^2 \quad (1.49)$$

avec

$$\bar{J}_I = \frac{1}{|Q_I|} \int_{Q_I} J(x) dx \quad (1.50)$$

où  $Q_I$  est le cube unité centré en  $x_I$

$$Q_I = [x_{i_1} - \Delta x/2, x_{i_1} + \Delta x/2] \times [x_{i_2} - \Delta x/2, x_{i_2} + \Delta x/2]. \quad (1.51)$$

Pour finir, on définit

$$v_\#(y, t_n) = \sum_I v(x_I, t_n) 1_{Q_I}(y) \quad (1.52)$$

où  $1_{Q_I}$  est la fonction indicatrice de  $Q_I$ .

L'approximation du gradient est obtenue en utilisant un schéma monotone et consistant. On peut par exemple utiliser ceux proposés par Osher, Sethian [129] ou par Rouy, Tourin [133].

Comme la vitesse  $c^\Delta$  est non-locale et même non-continue, on doit donner un sens à l'égalité dans le schéma (1.48). Ceci se fait en utilisant l'analogie de la formulation Slepčev [137] en utilisant la notion de sous et sur-solution discrète. Pour construire une solution du schéma, on utilise une version discrète de la méthode de Perron. Nous renvoyons à [For08b] pour une description plus détaillée de l'algorithme et de son implémentation.

Une des propriétés importantes de ce schéma est qu'il n'est pas monotone (à cause de la vitesse non-locale, voir [For08b, Proposition 5.8]). Néanmoins, la monotonie de l'approximation du gradient  $G$  suffit pour montrer que pour toutes les solutions du schéma, nous avons une estimation d'erreur de type Crandall-Lions [61] :

**Théorème 3.1. (Estimation d'erreur discret-continue pour (1.9), [For08b, Théorème 2.2])**

Soit  $T \leq 1$ . On suppose que  $u_0, \tilde{u}_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$  et que  $J$  donné par (1.10) satisfait  $J \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ . On suppose que  $\Delta x + \Delta t \leq 1$ . Alors, il existe une constante  $K > 0$  dépendant seulement de  $|J|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}$ ,  $|Du_0|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$  et  $|D\tilde{u}_0|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$  telle que l'estimation d'erreur entre la solution continue  $u$  de (1.9) et n'importe quelle solution discrète  $v$  du schéma aux différences finies (1.48)-(1.49)-(1.50) est donnée par

$$\sup_{\mathbb{R}^2 \times \{0, \dots, t_{N_T}\}} |u - v_\#| \leq K\sqrt{T}(\Delta x + \Delta t)^{1/2} + \sup_{\mathbb{R}^2} |u_0 - (\tilde{u}_0)_\#|$$

sous l'hypothèse complémentaire  $\Delta x + \Delta t \leq \frac{1}{K^2}$ .

**Remarque 3.2.** Il est également possible d'expliciter le calcul du gradient, c'est à dire de remplacer le terme  $G(v^{n+1})_I$  par  $G(v^n)_I$  dans le schéma (1.48) et ainsi de considérer la solution  $v$  de

$$v_I^0 = \tilde{u}_0(x_I), \quad \frac{v_I^{n+1} - v_I^n}{\Delta t} = c^\Delta [v]_I^{n+1} G(v^n)_I. \quad (1.53)$$

Dans ce cas, comme d'habitude, on doit rajouter une condition CFL, par exemple de la forme

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{2|J|_{L^1(\mathbb{R}^2)}}$$

pour la discrétisation du gradient proposée par Osher et Sethian. Sous cette hypothèse supplémentaire, le Théorème 3.1 reste vrai avec  $v$  la solution du schéma (1.53).

Par contre si l'on explicite le calcul de la vitesse non-locale, nous ne sommes plus capable de montrer une estimation d'erreur. La différence vient du fait que lorsque l'on implícite la vitesse, cela la "gèle" et on peut alors utiliser l'erreur de consistance du schéma où la vitesse est donnée. Au contraire, pour le schéma explicite, nous devons contrôler l'estimation de consistance de la vitesse, ce qui n'est pas possible (voir [For08b, Proposition 5.6]). Néanmoins, dans ce cas, il est toujours possible de montrer la convergence du schéma en utilisant des arguments similaires à ceux de Barles, Souganidis [28] (voir [For08b, Théorème 2.7])

### 3.1.2 Schéma numérique pour le mouvement par courbure moyenne

En utilisant le schéma précédent pour l'équation (1.11) (il suffit de remplacer  $J$  par  $J^\varepsilon$ ) et le résultat de convergence de la solution  $u^\varepsilon$  de (1.11) (Théorème 1.12), il est donc possible de proposer un schéma pour le mouvement par courbure moyenne et de montrer une estimation d'erreur à la Crandall, Lions [61].

Ce genre de résultat est important d'un point de vue analyse numérique. En effet, il y a un grand nombre d'applications pour les mouvements par courbure moyenne, comme la propagation de fronts, le traitement d'image, la dynamique des fluides (nous renvoyons à Sethian [136] et Osher, Paragios [128] pour des exemples d'applications). D'un point de vue numérique, l'analyse de ce genre d'équation est assez difficile. Il y a cependant plusieurs travaux sur cette question. Le premier est celui d'Osher, Sethian [129]. Leur méthode

### 3. Méthodes numériques pour la dynamique des dislocations

---

numérique est très utilisée en pratique mais il n'existe pas, à notre connaissance, de preuve de convergence. Un autre algorithme est celui de Merriman, Bence, Osher [118] dans lequel le mouvement par courbure moyenne est vu comme la limite singulière d'une équation de diffusion. La convergence de ce schéma a été montrée par Barles, Georgelin [22] et Evans [70] (voir aussi Ishii [98], Ishii, Pires, Souganidis [102] et Chambolle, Novaga [53]). Crandall et Lions [62] ont également proposé une classe de schémas numériques convergeant pour des équations paraboliques non-linéaires incluant le mouvement par courbure moyenne. Un autre algorithme convergeant a été proposé par Oberman [123]. Dans ces deux derniers travaux, les auteurs utilisent deux échelles différentes. La première est bien sûr le pas d'espace  $\Delta x$ . La seconde est la taille du stencil sur lequel on va faire des calculs. Comme Crandall et Lions l'ont indiqué dans [62], ces deux échelles sont très importantes pour approximer des équations dégénérées comme l'équation par courbure moyenne.

Dans notre schéma, nous retrouvons ces deux échelles,  $\varepsilon$  étant ici lié à la taille du stencil sur lequel on calcule la convolution. L'estimation d'erreur pour le mouvement par courbure moyenne que nous allons énoncer n'est pas optimale (il est par exemple possible de changer le noyau, voir [For08b, Section 3.3], mais à notre connaissance, il s'agit de la première estimation pour un schéma complètement discrétisé.

**Théorème 3.3. (Estimation d'erreur discret-continue pour le mouvement par courbure moyenne, [For08b, Théorème 2.4])**

Soit  $T \leq 1$ . On note  $v^\varepsilon$  la solution de (1.48)-(1.49)-(1.50) avec  $J^\varepsilon$  à la place de  $J$ . On suppose que  $u_0, \tilde{u}_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ ,  $g \in C^\infty(\mathbf{S}^1)$  et que  $J$  donnée par (1.10) satisfait  $J \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ . On suppose également que  $\Delta x + \Delta t \leq 1$ . Alors il existe une constante  $K > 0$  dépendant seulement de  $\sup_{\mathbb{R}^2} J$ ,  $|Dg|_{L^\infty(\mathbf{S}^1)}$ ,  $|J|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}$ ,  $|Du_0|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$  et  $|D\tilde{u}_0|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$  telle que l'estimation d'erreur entre la solution continue  $u^0$  du mouvement par courbure moyenne anisotrope (1.13) et son approximation numérique  $v^\varepsilon$  est donnée par

$$\sup_{\mathbb{R}^2 \times \{0, \dots, t_{N_T}\}} |u^0 - v^\varepsilon| \leq K \left( \frac{T}{|\ln \varepsilon|} \right)^{1/6} + \sup_{\mathbb{R}^2} |u_0 - (\tilde{u}_0)_\#|$$

où  $\varepsilon \geq K(\Delta x + \sqrt{\Delta t})$ .

**Remarque 3.4.** Comme pour l'équation (1.9), il est également possible d'explicitier le schéma en ajoutant une condition CFL. Dans ce cas, nous sommes toujours capables de montrer la convergence du schéma. Par contre l'estimation d'erreur est encore un problème ouvert.

**Remarque 3.5.** Il est possible de tronquer le noyau  $J$  à l'infini et de considérer

$$\tilde{J}^R(x) = \begin{cases} J(x) & \text{si } |x| \leq R, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans ce cas, nous faisons une erreur de l'ordre de  $\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} J \leq \frac{K}{R}$  et il est possible de faire le calcul de la convolution sur un stencil de taille finie, même si  $\Delta x$  tend vers zéro.

Cela est possible si on choisit  $\varepsilon$  du même ordre que  $\Delta x$ . La condition  $\varepsilon \geq K(\Delta x + \sqrt{\Delta t})$  dans le Théorème 3.3 implique alors que l'on doit imposer une condition CFL  $\Delta t \leq K\Delta x^2$  (ce qui est classique pour les équations du second ordre).

A l'inverse, si l'on n'impose aucune condition CFL, on peut choisir  $\Delta t$  beaucoup plus grand que  $\Delta x^2$ , mais on doit choisir  $\varepsilon$  du même ordre que  $\sqrt{\Delta t}$  et donc, on doit faire la convolution sur des stencils de plus en plus grands quand  $\Delta x$  tend vers zéro.

### 3.2 Dynamique de densités de dislocations

Nous nous intéressons désormais à un modèle de densité de dislocations. On considère deux types de dislocations bougeant respectivement avec le vecteur de Burgers  $\pm \vec{b}$ . Ce modèle a été introduit par Groma et Balogh dans [88] comme un système couplé, à savoir un problème de transport dans lequel la vitesse est donnée par les équations de l'élasticité dans le cas 2-D. En fait, dans un cas particulier, ce modèle peut être simplifié. En effet, si l'on suppose que le domaine 2-D est 1-périodique en  $x_1$  et  $x_2$  (ce qui revient à considérer un domaine infini et évite les problèmes dus aux conditions aux bords) et si les densités de dislocations dépendent seulement de la variable  $x = x_1 + x_2$  (où  $(x_1, x_2)$  sont les coordonnées d'un point de  $\mathbb{R}^2$ ) alors quand  $\vec{b} = (1, 0)$ , le système 2-D de [88] peut se réduire au système couplé d'équations de Hamilton-Jacobi 1-D non-locales suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho_+)_t = - \left( \rho_+ - \rho_- + \int_0^1 (\rho_+(x, t) - \rho_-(x, t)) dx + L(t) \right) |D\rho_+| \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{dans } \mathbb{R} \times (0, T) \\ (\rho_-)_t = \left( \rho_+ - \rho_- + \int_0^1 (\rho_+(x, t) - \rho_-(x, t)) dx + L(t) \right) |D\rho_-| \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{dans } \mathbb{R} \times (0, T) \end{array} \right. \quad (1.54)$$

où  $L(t)$  représente le champ de contraintes de cisaillement,  $\rho_+, \rho_-$  sont les inconnues scalaires telles que  $(\rho_+ - \rho_-)$  représente la déformation plastique et leurs dérivées en espace  $D\rho_{\pm} := \frac{\partial \rho_{\pm}}{\partial x}$  sont les densités de dislocations de type + et -. Ce système est complété par les conditions initiales suivantes :

$$\rho_{\pm}(x, 0) = \rho_{\pm}^0(x) = P_{\pm}^0(x) + L_0 x \text{ sur } \mathbb{R} \quad (1.55)$$

où  $P_{\pm}^0$  sont 1-périodiques et Lipschitziennes et  $L_0$  est une constante donnée qui représente la densité totale de dislocations de type  $\pm$ , c'est à dire qu'à l'instant initial, on suppose que l'on a la même densité de type + et -.

Le premier résultat concernant ce système est un résultat d'existence et d'unicité. Un cadre naturel pour cette étude est la théorie des solutions de viscosité. Cette théorie a été formalisée pour les systèmes par Ishii, Koike [99] et Ishii [97]. Nous renvoyons également à Engler, Lenhart [67], Ishii, Koike [100], Lenhart [108], Lenhart, Belbas [109], Lenhart, Yamada [110] et Yamada [149] pour d'autres applications.

**Théorème 3.6. (Existence et unicité pour le système (1.54)-(1.55), [EHF08, Théorème 1.1])**

### 3. Méthodes numériques pour la dynamique des dislocations

Soit  $T \geq 0$  et  $L_0 \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $\rho_{\pm}^0 \in \text{Lip}(\mathbb{R})$  et que  $L \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)$ . Alors le système (1.54)-(1.55) admet une unique solution de viscosité  $\rho = (\rho^+, \rho^-)$ . De plus, cette solution est uniformément Lipschitzienne en espace-temps.

Un résultat similaire a été montré par El Hajj [66] pour des solutions faibles dans  $H_{\text{Loc}}^1$ . Nous renvoyons également à Canone, El Hajj, Monneau, Ribaud [47] pour l'étude du cas général en 2D.

On s'intéresse maintenant à l'approximation numérique de la solution du système (1.54)-(1.55). On utilise les notations de la section précédente et on note  $v_{k,i}^n$  la valeur de l'approximation numérique de la solution exacte  $\rho_k$  au point  $(x_i, t_n)$  qui est solution du schéma aux différences finies suivant :

$$v_{k,i}^0 = \tilde{\rho}_k^0(x_i), \quad \frac{v_{k,i}^{n+1} - v_{k,i}^n}{\Delta t} = c_k^\Delta [v]_i^n G(v_k^n)_i, \quad \forall k \in \{+, -\} \quad (1.56)$$

où  $\tilde{\rho}_k^0$  est une approximation de  $\rho_k^0$ ,

$$c_k^\Delta [v]_i^n = -k(v_{+,i}^n - v_{-,i}^n + a^\Delta [v](t_n))$$

et le terme non-local  $a^\Delta [v](t_n)$  est donné par

$$a^\Delta [v](t_n) = \sum_{i=0}^{N_x-1} \Delta x (v_+(x_i, t_n) - v_-(x_i, t_n)) + L(t_n)$$

où  $N_x$  est la partie entière de  $1/\Delta x$ . Comme dans la sous-section précédente, le terme  $G(v_k^n)_i$  est une approximation appropriée du gradient de  $v_k^n$  pris au point  $x_i$ .

Finalement, on suppose que la condition CFL suivante est vérifiée

$$\Delta t \leq \frac{1}{2M} \Delta x \quad (1.57)$$

où

$$M = 2\|P_+^0 - P_-^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + 2.$$

On a alors l'estimation d'erreur suivante

**Théorème 3.7. (Estimation d'erreur discret-continue, [EHF08, Théorème 1.3])**

Soit  $T \geq 0$ . On suppose que  $\Delta x + \Delta t \leq 1$ ,  $L \in W^{1,\infty}([0, T])$  et que la condition CFL (1.57) est vérifiée.

Alors, il existe une constante  $K > 0$  dépendant seulement de  $\|P_+^0 - P_-^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ ,  $\|L\|_{W^{1,\infty}(0,T)}$  et  $\max_{k \in \{+,-\}} \|D\rho_k^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$  telle que l'estimation d'erreur entre la solution continue  $\rho$  du système (1.54) et son approximation numérique  $v$ , solution du schéma aux différences finies (1.56) est donnée par

$$\max_{k \in \{+,-\}} \sup_{Q_T^\Delta} |\rho_k - v_k| \leq K \left( (T + \sqrt{T}) (\Delta x + \Delta t)^{1/2} + \max_{k \in \{+,-\}} \sup_{Q^\Delta} |\rho_k^0 - v_k^0| \right)$$

*sous l'hypothèse complémentaire*

$$K \left( (T + \sqrt{T})(\Delta x + \Delta t)^{\frac{1}{2}} + \max_{k \in \{+, -\}} \sup_{Q^\Delta} (\rho_k^0 - v_k^0) \right) \leq 1.$$

# Chapitre 2

## Problèmes de contrôle optimal

### 1 Position du problème

Depuis mon post-doctorat à l'INRIA, je travaille également sur des problèmes de contrôle optimal déterministe avec contraintes sur l'état.

Une approche pour les problèmes de contrôle optimal consiste à remarquer que la fonction valeur (celle qui à chaque valeur de l'état initial associe la valeur du coût optimal) est solution, au sens de viscosité, d'une équation aux dérivées partielles appelée équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Cette approche trouve ses origines dans le milieu des années 1950 avec des idées de R. Bellman. L'approche classique consistait alors à montrer que l'équation de Bellman avait une solution régulière puis de montrer que cette solution était bien la fonction valeur. L'introduction des solutions de viscosité par Crandall, Lions [60] a permis à Lions [111] de développer une démarche plus directe en montrant que la fonction valeur était la seule solution de viscosité de l'équation HJB.

De manière plus précise, on considère un système contrôlé

$$\dot{y}(s) = f(y(s), \alpha(s)), \text{ p.p. } s \geq 0, \quad y(0) = x, \quad (2.1)$$

où  $\alpha : (0, +\infty) \rightarrow \mathcal{A}$  est une fonction mesurable,  $\mathcal{A}$  est un compact de  $\mathbb{R}^m$  (l'ensemble des contrôles admissibles), et  $f : \mathbb{R}^d \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^d$  est la dynamique. Pour une position initiale  $x$  donnée, on note  $y_x^\alpha$  la solution de (2.1) associée à la variable de contrôle  $\alpha$ . Etant donné un ensemble fermé  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$  (l'espace de contrainte) et une fonction coût terminal  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , on considère le problème suivant :

$$\vartheta(x, t) := \inf\{\varphi(y_x^\alpha(t)) \mid \alpha \in L^\infty((0, t); \mathcal{A}), y_x^\alpha(\theta) \in \mathcal{K}, \forall \theta \in [0, t]\}. \quad (2.2)$$

Dans le cas où  $\varphi$  est régulière et où il n'y a pas de contrainte ( $\mathcal{K} = \mathbb{R}^d$ ), Lions [111] a montré que la fonction valeur  $\vartheta$  était solution de l'équation HJB suivante :

$$\begin{cases} \vartheta_t(x, t) + H(x, D\vartheta(x, t)) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \\ \vartheta(x, 0) = \varphi(x) & \text{sur } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

où

$$H(x, p) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \{-f(x, \alpha) \cdot p\}.$$

Dans le cas où le coût terminal est seulement semi-continue, une première réponse a été donnée par Barles, Perthame [24] (dans le cas de problèmes de temps de sortie) où les auteurs ont utilisé une notion de solutions de viscosité discontinues reposant sur celle introduite par Ishii [95, 96]. Ce résultat a ensuite été généralisé par Barron, Jensen [32] (voir aussi Frankowska [76]) où les auteurs ont utilisé une notion de solutions de viscosité bilatérale qu'ils avaient introduite dans [31] pour des Hamiltoniens convexes (nous renvoyons également à Barles [13] et les références incluses pour une étude et une comparaison de ces deux notions de solutions discontinues). Le premier à avoir étudié un problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état ( $\mathcal{K}$  fermé inclus dans  $\mathbb{R}^d$ ) est Soner [139, 140]. Il a introduit une hypothèse de contrôlabilité de type "champ rentrant" qui impose qu'en chaque point du bord de  $\mathcal{K}$ , il existe une trajectoire qui rentre strictement dans  $\mathcal{K}$ . Sous cette hypothèse, Soner a montré que la fonction valeur était continue et solution de

$$\begin{cases} \vartheta_t(x, t) + H(x, D\vartheta(x, t)) \geq 0 & \text{dans } \mathcal{K} \times \mathbb{R}_+, \\ \vartheta_t(x, t) + H(x, D\vartheta(x, t)) \leq 0 & \text{dans } \overset{\circ}{\mathcal{K}} \times \mathbb{R}_+, \\ \vartheta(x, 0) = \varphi(x) & \text{sur } \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.3)$$

Dans la même direction, nous renvoyons également à Capuzzo-Dolcetta, Lions [48], Ishii, Koike [101] et Motta [120]. Une autre hypothèse de contrôlabilité a également été introduite par Blanc [33, 34] (pour des problèmes de temps de sortie). Il s'agit d'une hypothèse de type "champ sortant" qui impose au contraire qu'en tout point du bord de  $\mathcal{K}$  il existe un contrôle qui permet de sortir strictement de  $\mathcal{K}$ . Dans ce cas, la fonction valeur n'est plus continue (seulement s.c.i.). Néanmoins, il est possible de montrer que c'est l'unique solution de viscosité bilatérale de (2.3) (voir [33, 34, 77, 78]).

## 2 Caractérisation de la fonction valeur

Les hypothèses de contrôlabilité décrites ci-dessus sont assez restrictives et ne sont pas vérifiées en général pour des problèmes concrets. Avec O. Bokanowski et H. Zidani [BFZ], nous nous sommes intéressés au cas où l'on ne fait pas d'hypothèse de contrôlabilité. Dans ce cas, il n'y a pas unicité de la solution de l'équation (2.3) et très peu de travaux ont été réalisés (nous renvoyons néanmoins à Soravia [141] et Bardi, Goatin, Ishii [12]). Dans [51], les auteurs ont montré que la fonction temps minimal pour un problème de contrôle optimal avec contrainte sur l'état était la plus petite sur-solution positive et semi-continue inférieure d'une équation HJB. Cette caractérisation a également donné lieu à un algorithme numérique basé sur la méthode de la viabilité [52, 134]. Notre but est de comprendre quelle condition il faut rajouter à (2.3) pour obtenir l'unicité et donc une caractérisation de la fonction valeur.

Pour énoncer notre résultat, nous ferons les hypothèses suivantes :

**(H1)** La fonction  $f$  est continue et il existe  $L_f > 0$  tel que pour tout  $(x, x', a) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{A}$ ,

$$|f(x, a) - f(x', a)| \leq L_f |x - x'|, \quad |f(x, a)| \leq L_f.$$

De plus, pour tout  $y \in \mathbb{R}^d$ ,  $f(y, \mathcal{A})$  est un ensemble compact et convexe de  $\mathbb{R}^d$ .

---

## 2. Caractérisation de la fonction valeur

**(H2)** Il existe  $0 < M_0 < 1$  tel que  $|\varphi(x)| \leq M_0$  pour tout  $x \in \mathcal{K}$ , et  $\varphi \equiv 1$  dans  $\mathcal{K}^c$  (la valeur 1 n'a pas réellement d'importance ici).

Dans ce cas, on rappelle que la fonction valeur est définie par (2.2) où, par convention, le minimum vaut 1 s'il n'existe pas de  $\alpha \in L^\infty((0, t); \mathcal{A})$  tel que  $y_x^\alpha(\theta) \in \mathcal{K}$  pour tout  $\theta \in [0, t]$ .

Sous l'hypothèse (H1), il existe une trajectoire qui arrive en  $x$  et solution de

$$\dot{y}(s) = f(y(s), \alpha(s)), \text{ p.p. } s \leq 0, \quad y(0) = x. \quad (2.4)$$

On notera  $\mathcal{S}^{\mathcal{K},-}(x)$  l'ensemble de telles trajectoires restant dans  $\mathcal{K}$  durant l'intervalle  $[-\nu, 0]$  pour un certain  $\nu > 0$  :

$$\mathcal{S}^{\mathcal{K},-}(x) = \{y_x \text{ solution de (2.4), } \exists \nu > 0, y_x(s) \in \mathcal{K} \text{ pour } s \in [-\nu, 0]\}$$

On introduit également la notion de dérivée faible suivante :

**Définition 2.1. (F-dérivée)** Soient  $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$  et  $y$  une trajectoire solution de (2.1) arrivant en  $x$  au temps  $t = 0$ . La F-dérivée de  $\phi$  en  $(x, t)$  dans la direction  $y$  est définie par :

$$D_{\uparrow}^y \phi(t, x) = \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{\phi(y(-h), t+h) - \phi(x, t)}{h}.$$

On a alors la caractérisation suivante pour la fonction valeur

**Théorème 2.2. (Caractérisation de la fonction valeur, [BFZ, Théorème 2.4])**

La fonction valeur  $\vartheta$  est l'unique fonction sci de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$  dans  $[-M_0, M_0] \cup \{1\}$  qui est une solution bilatérale (voir Définition 2.3 ci-dessous) de

$$\vartheta_t(x, t) + H(x, D\vartheta(x, t)) \geq 0 \quad \forall t > 0, x \in \mathcal{K}, \quad (2.5a)$$

$$\vartheta_t(x, t) + H(x, D\vartheta(x, t)) = 0 \quad \forall t > 0, x \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}, \quad (2.5b)$$

et qui satisfait les conditions aux bords suivantes

$$\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}, \quad \liminf_{t \rightarrow 0^+, y \rightarrow x} \vartheta(y, t) = \varphi(x), \quad (2.5c)$$

$$\forall x \in \mathcal{K}, \quad \vartheta(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{et} \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathcal{K}^c, \quad \vartheta(x, t) = 1, \quad (2.5d)$$

$$\forall t \geq 0, \forall x \in \partial\mathcal{K}, \quad \sup_{y \in \mathcal{S}^{\mathcal{K},-}(x)} D_{\uparrow}^y \vartheta(x, t) \leq 0. \quad (2.5e)$$

**Définition 2.3. (Solution de viscosité bilatérale de (2.5))**

Soit  $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow [-M_0, M_0] \cup \{1\}$  une fonction sci. On dit que  $u$  est une solution de viscosité bilatérale de (2.5) si :

(i)  $u$  est une solution de viscosité bilatérale de (2.5b) dans  $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ , i.e., pour tout  $(x, t) \in \overset{\circ}{\mathcal{K}} \times \mathbb{R}_+^*$  et pour tout élément du sous-différentiel  $(q_t, q_x) \in D^-u(x, t)$ , on a :

$$q_t + H(x, q_x) = 0;$$

(ii)  $u$  satisfait (2.5a) sur le bord dans le sens où pour tout  $(x, t) \in \partial\mathcal{K} \times \mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $(q_t, q_x) \in D^-u(t, x)$ , on a

$$q_t + H(x, q_x) \geq 0;$$

(iii)  $u$  satisfait (2.5c)-(2.5e) ponctuellement.

L'ingrédient essentiel pour montrer le Théorème 2.2 (et plus généralement que la fonction valeur est caractérisée par une équation HJB) est d'utiliser le principe de programmation dynamique vérifié par la fonction valeur. De manière plus précise, si l'on note  $\mathcal{S}_{[0,h]}^{\mathcal{K}}(x)$  l'ensemble des trajectoires solutions de (2.1) et restant dans  $\mathcal{K}$  durant l'intervalle  $[0, h]$  :

$$\mathcal{S}_{[0,h]}^{\mathcal{K}}(x) = \{y_x \text{ solution de (2.1), } y_x(s) \in \mathcal{K} \text{ pour } s \in [0, h]\},$$

on a que pour tout  $h \geq 0$

$$\vartheta(x, t) = \begin{cases} \min_{y_x \in \mathcal{S}_{[0,h]}^{\mathcal{K}}(x)} \vartheta(t-h, y_x(h)) & \text{si } \mathcal{S}_{[0,h]}^{\mathcal{K}}(x) \neq \emptyset \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce principe traduit deux informations importantes : pour tout  $t > 0$ ,  $x \in \mathcal{K}$ , on a :

- *Principe de sous-optimalité* : la fonction  $h \mapsto \vartheta(y_x(h), t-h)$  est croissante pour tout  $y_x \in \mathcal{S}_{[0,h]}^{\mathcal{K}}(x)$
- *Principe de sur-optimalité* : il existe une trajectoire  $y_x^* \in \mathcal{S}_{[0,t]}^{\mathbb{R}^d}(x)$  telle que  $h \mapsto \vartheta(y_x^*(h), t-h)$  est constante.

La différence majeure par rapport au cas sans contrainte est que l'équation (2.5a)-(2.5b) ne contient pas le principe de sous-optimalité pour les trajectoires arrivant sur le bord. C'est pour cette raison que l'on doit ajouter la condition supplémentaire (2.5e) qui permet de récupérer le principe de sous-optimalité complet.

### Méthode de relaxation

L'inconvénient majeur de la formulation de (2.5e) est que cela ne peut pas être traduit de manière "EDP". Il est par exemple très difficile d'introduire cette condition dans un schéma numérique. Néanmoins, ce résultat a le mérite de permettre de comprendre comment approximer la fonction valeur. En effet si on élargit le domaine  $\mathcal{K}$  en considérant un domaine  $\mathcal{K}^\varepsilon \supset \mathcal{K}$  et si  $\vartheta^\varepsilon$  est une solution de (2.5a)-(2.5d) sur  $\mathcal{K}^\varepsilon$  alors pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\vartheta^\varepsilon$  va vérifier la condition (2.5e) sur  $\mathcal{K}$  (car elle va vérifier le principe de programmation dynamique jusqu'au bord de  $\mathcal{K}$ ). En prenant une suite  $\mathcal{K}^\varepsilon$  qui tend vers  $\mathcal{K}$  et en passant à la limite, on récupère alors que  $\vartheta^\varepsilon \rightarrow \vartheta$ . Ceci est l'objet du théorème suivant :

### **Théorème 2.4. (Méthode de relaxation, [BFZ, Théorème 2.7])**

On suppose que (H1)-(H2) sont vérifiées. Pour  $\varepsilon > 0$ , on définit l'ensemble  $\mathcal{K}_\varepsilon$  par

$$\mathcal{K}_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^d; d(x, \mathcal{K}) \leq \varepsilon\},$$

## 2. Caractérisation de la fonction valeur

où  $d(\cdot, \mathcal{K})$  est la fonction distance à l'ensemble  $\mathcal{K}$  et on considère  $\vartheta_\varepsilon : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow [-M_0, M_0] \cup \{1\}$  une solution de viscosité bilatérale de

$$\begin{cases} u_t(x, t) + H(x, Du(x, t)) \geq 0 & \text{dans } \mathcal{K}_\varepsilon \times \mathbb{R}_+^*, \\ u_t(x, t) + H(x, Du(x, t)) = 0 & \text{dans } \overset{\circ}{\mathcal{K}}_\varepsilon \times \mathbb{R}_+^*, \\ \liminf_{t \rightarrow 0^+, y \rightarrow x} u(y, t) = \varphi(x) = u(x, 0) & \text{sur } \overset{\circ}{\mathcal{K}}_\varepsilon, \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{sur } \mathcal{K}_\varepsilon \\ u(x, t) = 1 & \text{dans } \mathcal{K}_\varepsilon^c \times \mathbb{R}_+^* \end{cases} \quad (2.6)$$

Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  et pour tout  $t > 0$ , on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vartheta_\varepsilon(x, t) = \vartheta(x, t). \quad (2.7)$$

Le fait d'élargir l'ensemble  $\mathcal{K}$  n'est pas fait pour obtenir l'unicité de la solution de (2.6). Le résultat précédent dit simplement que si pour  $\varepsilon > 0$ , on prend *n'importe quelle solution de viscosité bilatérale* de (2.6), alors cette suite de solutions converge vers la fonction valeur.

L'équation (2.6) peut aussi se réécrire comme une équation HJB avec une donnée de Dirichlet sur le bord :

**Proposition 2.5. (Formulation sous forme Dirichlet de l'équation (2.6), [BFZ, Proposition 2.8])**

On suppose que (H1)-(H2) sont vérifiées. Soit  $\varepsilon \geq 0$  fixé. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $u$  est une solution de viscosité bilatérale de (2.6)
- (ii)  $u$  est une solution de viscosité bilatérale (voir Définition 2.6 ci-dessous) du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} u_t(x, t) + H(x, Du(x, t)) = 0 & \text{dans } \overset{\circ}{\mathcal{K}}_\varepsilon \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(t, x) = 1 & \text{sur } \partial \mathcal{K}_\varepsilon \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(0, x) = \varphi(x) & \text{sur } \mathcal{K}_\varepsilon, \\ \liminf_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ z \rightarrow x}} u(t, z) = u(0, x) & \text{sur } \overset{\circ}{\mathcal{K}}_\varepsilon. \end{cases} \quad (2.8)$$

**Définition 2.6. (Solution de viscosité bilatérale de (2.8))**

Soit  $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow [-M_0, M_0] \cup \{1\}$  une fonction sci et soit  $\Omega$  un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^d$ . On dit que  $u$  est une solution de viscosité bilatérale dans  $\Omega$  de

$$\begin{cases} u_t(x, t) + H(x, Du(x, t)) = 0 & \text{dans } \overset{\circ}{\Omega} \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(t, x) = 1 & \text{sur } \partial \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(0, x) = \varphi(x) & \text{sur } \Omega \\ \liminf_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ z \rightarrow x}} u(t, z) = u(0, x) & \text{sur } \overset{\circ}{\Omega}. \end{cases} \quad (2.9)$$

si

(i)  $u$  est une solution de viscosité bilatérale de l'équation dans  $\overset{\circ}{\Omega}$ , i.e., pour tout  $(x, t) \in \overset{\circ}{\Omega} \times \mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $(q_t, q_x) \in D^-u(x, t)$ , on a :

$$q_t + H(x, q_x) = 0.$$

(ii)  $u$  est sur-solution au bord dans le sens où pour tout  $(x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $(q_t, q_x) \in D^-u(x, t)$ , on a :

$$\max(q_t + H(x, q_x), u - 1) \geq 0.$$

(iii)  $u$  satisfait les conditions initiales ponctuellement.

**Remarque 2.7.** Les équations HJB du premier ordre avec des conditions aux bords interviennent en général dans les problèmes de temps de sortie. Ces problèmes ont été étudiés dans plusieurs papiers comme par exemple Barles, Perthame [24, 25, 26] et Blanc [33, 34]. Il est connu que, pour les équations HJB du premier ordre avec des conditions aux bords, l'unicité des solutions de viscosité n'a pas lieu si l'on ne fait pas d'hypothèse de contrôlabilité sur le bord du domaine.

### Méthode de pénalisation

Une autre méthode pour approcher la fonction valeur consiste à utiliser une pénalisation. De manière plus précise, étant donné  $\varepsilon > 0$ , on considère la fonction définie par

$$g_\varepsilon(x) = \min\left(-1 + \frac{1}{\varepsilon}d(x, \mathcal{K}), 1\right) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d. \quad (2.10)$$

On a alors le résultat suivant :

### Théorème 2.8. (Méthode de pénalisation, [BFZ, Théorème 2.11])

On suppose que (H1)-(H2) sont vérifiées. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on considère  $\vartheta_\varepsilon$  l'unique solution de viscosité bilatérale bornée de

$$\begin{cases} \min(u(x, t) + H(x, Du(x, t)), v(x, t) - g_\varepsilon(x)) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*, \\ v(0, x) = \max(\varphi(x), g_\varepsilon(x)) & \text{sur } \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Alors, pour tout  $x \in \mathcal{K}$  et pour tout  $t > 0$ , on a :

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0^+} \vartheta_\varepsilon(x, t) = \vartheta(x, t).$$

**Remarque 2.9.** L'avantage principal du théorème précédent est que la fonction valeur  $\vartheta$  est caractérisée comme la limite d'une suite d'unique solutions de viscosité d'inégalité variationnelle.

### 3 Caractérisation des bassins de capture

Comme nous l'avons vu précédemment, la caractérisation de la fonction valeur en terme d'EDP se révèle assez difficile si on ne fait pas d'hypothèse de contrôlabilité. Pour certains problèmes, ce n'est pas la fonction valeur qui nous intéresse. Par exemple, pour les problèmes de cible, on peut plutôt vouloir caractériser le bassin de capture (i.e. tous les points pouvant atteindre la cible) ou la fonction temps minimal. Nous allons voir que dans ce cas il est possible d'utiliser une approche complètement différente qui consiste à remplacer le problème de contrôle initial par un problème de contrôle qui sera plus simple à étudier (en particulier, on aura une caractérisation de la nouvelle fonction valeur) et qui aura le même bassin de capture et la même fonction temps minimal. Cette approche sera généralisée plus loin pour obtenir une caractérisation de l'épigraphe de la fonction valeur.

On considère maintenant un problème de cible. Etant donné  $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}$  une cible fermée, on considère, pour un certain temps  $t \geq 0$  le bassin de capture, c'est à dire l'ensemble des points qui peuvent atteindre la cible au temps  $t$  en restant dans  $\mathcal{K}$ , défini par

$$\text{Cap}_{\mathcal{C}}(t) := \{x \in \mathbb{R}^d, \exists \alpha : (0, t) \rightarrow \mathcal{A} \text{ mesurable}, y_x^\alpha(t) \in \mathcal{C} \text{ et } y_x^\alpha(\theta) \in \mathcal{K} \forall \theta \in [0, t]\}. \quad (2.11)$$

Il est bien connu que l'ensemble  $\text{Cap}_{\mathcal{C}}(t)$  est relié à un problème de contrôle optimal. En effet, si l'on considère une fonction  $\vartheta_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\vartheta_0(x) \leq 0 \iff x \in \mathcal{C}, \quad (2.12)$$

et si l'on considère le problème de contrôle suivant :

$$\vartheta(x, t) := \inf\{\vartheta_0(y_x^\alpha(t)) \mid \alpha \in L^\infty((0, t); \mathcal{A}), y_x^\alpha(\theta) \in \mathcal{K}, \forall \theta \in [0, t]\}, \quad (2.13)$$

alors il est facile de montrer que

$$\text{Cap}_{\mathcal{C}}(t) = \{x \in \mathbb{R}^d, \vartheta(x, t) \leq 0\}.$$

Beaucoup de travaux traitent du lien entre le bassin de capture et les équations HJB. Dans le cas sans contrainte ( $\mathcal{K} = \mathbb{R}^d$ ), on renvoie à [119], [116] et les références incluses. Le cas où  $\mathcal{K}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  est étudié dans [115]. Dans le cas où l'on est en présence de contraintes sur l'état ( $\mathcal{K}$  est un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^d$ ), une idée similaire d'introduire un nouveau problème de contrôle (cf (2.15) ci-dessous) est également utilisée par Mitchell [105]. Néanmoins, dans ce papier, l'analyse est un peu plus compliquée et n'aboutit pas à une EDP pour caractériser le bassin de capture (la fonction d'obstacle est également supposée convexe dans [105]). On renvoie également à [106] pour une discussion sur le lien entre les bassins de capture et les équations HJB (où la fonction valeur est supposée  $C^1$ ). Avec O. Bokanowski et H. Zidani [BFZ10b], nous avons montré qu'il est possible de caractériser le bassin de capture  $\text{Cap}_{\mathcal{C}}$  à l'aide d'un problème de contrôle optimal dont la fonction valeur est continue (même Lipschitzienne). De manière plus précise, on considère une fonction Lipschitzienne  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$g(x) \leq 0 \iff x \in \mathcal{C}. \quad (2.14)$$

On considère alors le problème de contrôle optimal suivant :

$$u(x, t) := \inf \left\{ \max(\vartheta_0(y_x^\alpha(t)), \max_{\theta \in [0, t]} g(y_x^\alpha(\theta))) \mid \alpha \in L^\infty((0, t); \mathcal{A}) \right\}. \quad (2.15)$$

La différence avec le problème (2.13) est qu'au lieu d'interdire la trajectoire à sortir de  $\mathcal{K}$ , on va la "pénaliser" (à l'aide de la fonction  $g$ ) si elle sort. En particulier, on voit que dans ce cas le coût correspondant sera strictement positif. Ceci implique que les fonctions  $\vartheta(\cdot, t)$  et  $u(\cdot, t)$  ont les mêmes régions négatives et on a donc la caractérisation suivante pour le bassin de capture :

**Théorème 3.1. (Caractérisation du bassin de capture, [BFZ10b, Théorème 1])**

*On suppose que (H1)-(H2) sont vérifiées. Soient  $\vartheta_0$  et  $g$  des fonctions Lipschitziennes définies respectivement par (2.12) et (2.14). Soient  $\vartheta$  et  $u$  les fonctions valeurs définies respectivement par (2.13) et (2.15). Alors, pour tout  $t \geq 0$ , le bassin de capture est donné par :*

$$\text{Cap}_{\mathcal{C}}(t) = \{x, \vartheta(x, t) \leq 0\} = \{x, u(x, t) \leq 0\}.$$

L'avantage de caractériser le bassin de capture à l'aide de la fonction  $u$  est que celle-ci est continue (même Lipschitzienne) et est caractérisée par un problème d'obstacle. Cela vient du fait que le problème (2.15) n'a pas de contrainte d'état "explicite".

**Théorème 3.2. (Caractérisation de la fonction  $u$ , [BFZ10b, Théorème 2])**

*On suppose que (H1) est vérifiée et que  $\vartheta_0$  et  $g$  sont Lipschitziennes. Alors  $u$  est l'unique solution de viscosité continue de l'inégalité variationnelle (problème d'obstacle)*

$$\begin{cases} \min \left( \partial_t u(x, t) + H(x, D_x u(x, t)), u(x, t) - g(x) \right) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^* \\ \vartheta(x, 0) = \max(\vartheta_0(x), g(x)) & \text{sur } \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (2.16)$$

**Remarque 3.3.** *D'un point de vue théorique, le choix de  $g$  n'a pas d'importance. La fonction valeur  $u$  dépend de ce choix mais l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^d, u(x, t) \leq 0\}$  n'en dépend pas.*

Les inégalités variationnelles du type (2.16) apparaissent également dans le contexte des problèmes de temps de sortie où  $g$  représente le coût de sortie qui doit être payé pour sortir. Ici,  $g$  est un coût "fictif" que l'on doit payer si l'on sort de  $\mathcal{K}$ . On mentionne également que le terme d'obstacle dans (2.16) vient de la présence de la norme sup  $\max_{\theta \in [0, t]} g(y_x^\alpha(\theta))$  dans la fonction de coût qui définit  $u$  (voir (2.15)). On renvoie aux travaux de Barron, Ishii [30] et Quincampoix, Serea [132] et aux références incluses pour des problèmes de contrôle optimal avec des fonctions de coût utilisant la norme sup.

Notre approche permet également de traiter le problème du temps minimal  $\mathcal{T}(x)$  qui est le temps minimal pour atteindre la cible à partir du point  $x$  :

$$\mathcal{T}(x) := \inf \{ t \geq 0, \exists \alpha \in L^\infty((0, t); \mathcal{A}), y_x^\alpha(t) \in \mathcal{C} \text{ et } y_x^\alpha(\theta) \in \mathcal{K}, \forall \theta \in [0, t] \}. \quad (2.17)$$

Beaucoup de travaux ont étudié la régularité de la fonction temps minimal  $\mathcal{T}$ . Quand  $\mathcal{K} \equiv \mathbb{R}^d$ , et sous des hypothèses de régularité autour de la cible, on peut montrer que

---

### 3. Caractérisation des bassins de capture

---

la fonction  $\mathcal{T}$  est l'unique solution de viscosité continue d'une équation HJB (voir [11]). Ici, sans hypothèse de contrôlabilité, la fonction  $\mathcal{T}$  peut être discontinue. En effet, si pour  $x \in \mathbb{R}^d$ , aucune trajectoire  $y_x^\alpha$  n'atteint la cible  $\mathcal{C}$  ou si toutes les trajectoires sortent de  $\mathcal{K}$ , alors on pose  $\mathcal{T}(x) = +\infty$ . Néanmoins, le résultat suivant montre que  $\mathcal{T}$  peut être caractérisée à l'aide de la fonction  $u$ .

**Proposition 3.4. (Caractérisation de la fonction temps minimal, [BFZ10b, Proposition 1])**

*On suppose que (H1)-(H2) sont vérifiées. Alors la fonction temps minimal  $\mathcal{T} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  est sci et on a*

$$\mathcal{T}(x) = \inf\{t \geq 0, x \in \text{Cap}_{\mathcal{C}}(t)\} = \inf\{t \geq 0, u(x, t) \leq 0\},$$

où  $u$  est définie dans (2.15) avec  $\vartheta_0$  et  $g$  deux fonctions Lipschitziennes satisfaisant respectivement (2.12) et (2.14).

**Remarque 3.5.** *L'utilisation de l'approche level-set est une manière standard de déterminer la fonction temps minimal pour des problèmes sans contrainte d'état (voir [75]). Notre résultat généralise ce point de vue au cas où l'on a des contraintes d'état.*

L'avantage essentiel de notre approche est que comme la nouvelle fonction est caractérisée par une EDP, il est facile d'écrire un schéma numérique pour l'approcher. Comme nous allons le voir maintenant, on est même capable de montrer une estimation d'erreur entre la fonction valeur et son approximation numérique.

Etant donné des pas d'espace et de temps  $\Delta x > 0$ ,  $\Delta t > 0$ , on définit la grille

$$\mathcal{G} := \{I\Delta x, I \in \mathbb{Z}^d\}, \quad \mathcal{G}_T = \mathcal{G} \times \{0, \dots, (\Delta t)N_T\}$$

où  $N_T$  est la partie entière de  $T/\Delta t$ . Le point courant est noté  $(x_I, t_n)$  avec  $x_I = I\Delta x$ ,  $t_n = n\Delta t$ . L'approximation de la solution  $u$  au point  $(x_I, t_n)$  est notée  $v_I^n$ . On considère un Hamiltonien numérique  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  (qui sera une approximation consistante de  $H$ ), et on définit le schéma suivant :

$$\begin{cases} \min \left( \frac{v_I^{n+1} - v_I^n}{\Delta t} + \mathcal{H}(x_I, D^+ v^n(x_I), D^- v^n(x_I)), v_I^{n+1} - g(x_I, t_{n+1}) \right) = 0 \\ v_I^0 = \tilde{u}_0(x_I) \end{cases} \quad (2.18)$$

où  $\tilde{u}_0$  est une approximation de  $\vartheta_0$  et

$$D^+ v^n(x_I) = (D_{x_1}^+ v^n(x_I), \dots, D_{x_d}^+ v^n(x_I)), \quad D^- v^n(x_I) = (D_{x_1}^- v^n(x_I), \dots, D_{x_d}^- v^n(x_I))$$

sont les gradients discrets de la fonction  $v^n$  au point  $x_I$  définis pour une fonction générale  $w$  par

$$D_{x_i}^\pm w(x_I) = \pm \frac{w(x_{I^{i,\pm}}) - w(x_I)}{\Delta x}, \quad (2.19)$$

avec la notation  $I^{k,\pm} = (i_1, \dots, i_{k-1}, i_k \pm 1, i_{k+1}, \dots, i_d)$ .

On fait les hypothèses classiques suivantes sur le Hamiltonien numérique  $\mathcal{H}$  :

(H3) Il existe  $C_1 > 0$  tel que pour tout  $x_I \in \mathcal{G}$ ,  $(P^+, P^-) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ,

$$|\mathcal{H}(x_I, P^+, P^-)| \leq C_1(|P^+|_\infty + |P^-|_\infty)$$

(H4) Il existe  $C_2 > 0$  tel que pour tout  $x_I \in \mathcal{G}$ ,  $P^+, P^-, Q^+, Q^- \in \mathbb{R}^d$ ,

$$|\mathcal{H}(x_I, P^+, P^-) - \mathcal{H}(x_I, Q^+, Q^-)| \leq C_2(|P^+ - Q^+| + |P^- - Q^-|).$$

(H5)  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x_I, P_1^+, \dots, P_d^+, P_1^-, \dots, P_d^-)$  satisfait la condition de monotonie suivante : pour presque tout  $(x, P^+, P^-) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i^+}(x, P^+, P^-) \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i^-}(x, P^+, P^-) \geq 0.$$

(H6) Il existe  $C_3 > 0$  tel que pour tout  $x_I \in \mathcal{G}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  et  $P \in \mathbb{R}^d$ ,

$$|\mathcal{H}(x_I, P, P) - H(x, P)| \leq C_3|x_I - x|.$$

On supposera également que la condition CFL suivante est vérifiée :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1/(2dC_2) \tag{2.20}$$

On a alors l'estimation d'erreur suivante :

**Théorème 3.6. (Estimation d'erreur discret-continu, [BFZ10b, Théorème 5])**

On suppose que (H1)-(H6) sont vérifiées et que  $\vartheta_0$  et  $g$  sont Lipschitziennes et bornées. Soit  $T > 0$ . Il existe une constante  $K > 0$  (qui dépend seulement de  $d$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $\|D\vartheta_0\|_{W^{1,\infty}}$ ,  $\|Dg\|_{W^{1,\infty}}$  et  $\|\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\|_\infty$ ) telle que si l'on choisit  $\Delta x$  et  $\Delta t$  assez petits pour que la condition CFL (2.20) soit vérifiée et que

$$\left( \sqrt{T} (\Delta x + \Delta t)^{1/2} + \sup_{\mathcal{G}} |\vartheta_0 - \tilde{u}_0| \right) \leq \frac{1}{K},$$

alors l'erreur entre la solution  $u$  de (2.16) et la solution discrète  $v$  du schéma aux différences finies (2.18) est donnée par :

$$\sup_{0 \leq n \leq N_T} \sup_{\mathcal{G}} |u(\cdot, t_n) - v^n| \leq K \left( \max(T, \sqrt{T}) (\Delta x + \Delta t)^{1/2} + \sup_{\mathcal{G}} |\vartheta_0 - \tilde{u}_0| \right).$$

Pour illustrer notre approche, on considère le cas de la dimension  $d = 2$  et on note  $f = (f_1, f_2)$  les deux composantes de la dynamique  $f$ . Les schémas standards qui vérifient les hypothèses (H3)-(H6) sont les schémas aux différences finies de type Rouy-Tourin, Osher-Sethian ou Lax-Friedrich (LF). On renvoie à [BFZ10b] pour plus de détails.

**Exemple 1 : (Bassin de capture avec un obstacle)**

Dans cet exemple, on calcule le bassin de capture pour une cible  $\mathcal{C}$  qui est la boule centrée en  $(1, 1)$  et de rayon 0.5, et avec une dynamique de type rotation :  $f(x_1, x_2) =$

### 3. Caractérisation des bassins de capture

$2\pi(-x_2, x_1)$ . On considère également un obstacle qui est le carré centré en  $(-0.5, 0)$  et de largeur 0.8.

Dans la Figure 2.1, on utilise le schéma LF et le nombre de points de la grille ( $M_{x_1} \times M_{x_2}$ ) est soit  $100^2$  soit  $200^2$ . On observe une convergence vers la solution exacte mais avec un taux de convergence petit. Cela vient du fait que les schémas monotones sont du premier ordre (voir [87]). Cela peut introduire une diffusion numérique en temps grand. Pour diminuer ce phénomène de diffusion, il est possible d'utiliser des schémas d'ordre supérieur de type ENO proposés par Osher et Shu [130]. Dans la Figure 2.1, on présente également les résultats obtenus avec un schéma d'ordre 2 de type ENO avec  $100^2$  points. On observe que le résultat est largement amélioré.

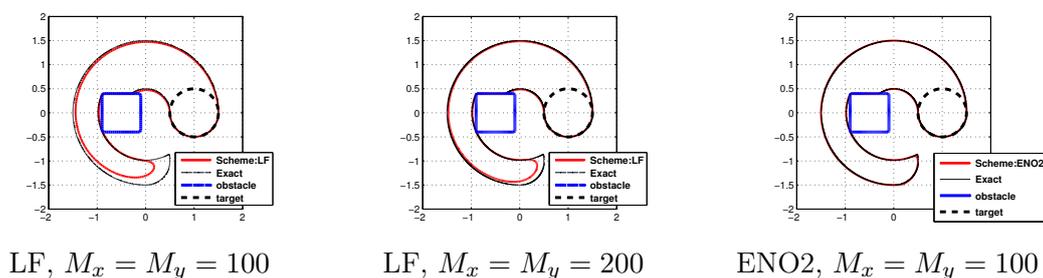


FIGURE 2.1 – (Exemple 1) Bassin de capture,  $t = 0.75$ , avec schémas LF et ENO2

Quand on augmente la taille de l'obstacle, le bassin de capture devient plus fin et est donc plus difficile à calculer numériquement. On considère donc maintenant un obstacle carré centré en  $(-0.5, 0.3)$  et de largeur 1.0. Dans ce cas, notre approche donne toujours une bonne approximation. Dans la Figure 2.2, on compare notre approche avec celle qui consiste à annuler la vitesse sur l'obstacle et l'on observe que cette dernière donne de moins bons résultats. Une comparaison numérique est donnée dans la Table 2.1, où sont données les distances de Hausdorff entre le front numérique et la solution exacte.

$M_{x_1} = M_{x_2}$	Dynamique nulle sur l'obstacle	Approche (2.16)
75	1.4590	0.2810
150	0.2540	0.1244
300	0.1646	0.0762

TABLE 2.1 – (Exemple 1) Distance de Hausdorff entre le front numérique et la solution exacte.

#### Exemple 2 : (Problème de Zermelo non-linéaire)

On considère maintenant un problème de Zermelo avec une dynamique non linéaire dans lequel un nageur essaie de rejoindre la cible  $\mathcal{C} := B(0, r)$  qui est la boule centrée en

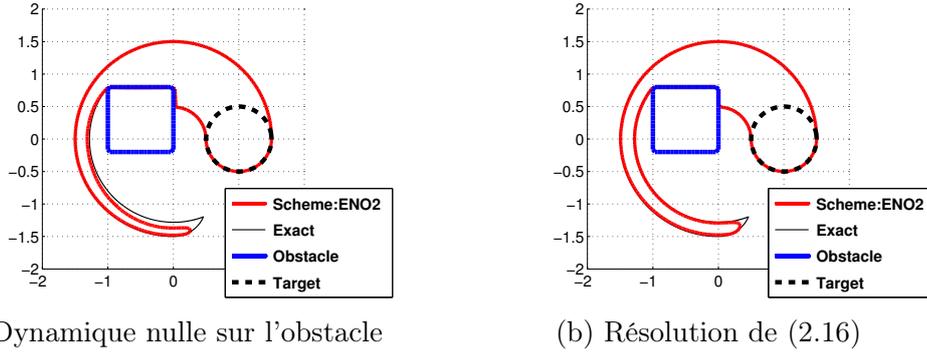


FIGURE 2.2 – (Exemple 1) Bassin de capture,  $t = 0.75$ , avec des schémas de type ENO2,  $M_{x_1} = M_{x_2} = 100$ .

l'origine et de rayon  $r = 0.25$  avec une dynamique donnée par :

$$f(x, u) = \left( c - \frac{1}{2}x_2^2 + u_1, u_2 \right) \quad \text{pour } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

où  $c := 2$  est la vitesse du courant et  $u = (u_1, u_2)$  est la vitesse du nageur avec  $\|u\| := (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} \leq 1$ . La fonction obstacle est donnée par :

$$g(x) := \max \left( g_{min}, C_1(r_a - \|x - a\|_\infty), C_1(r_b - \max(|x_1 - b_1|, \frac{1}{5}|x_2 - b_2|)) \right) \quad (2.21)$$

où  $r_a = 0.2$ ,  $a = (0.3, 0.4)$ ,  $r_b = 0.2$ ,  $b = (-1, -1.5)$ ,  $C_1 := 20$ , et  $g_{min} := -0.2$ .

On va comparer notre approche avec deux approches classiques de la littérature. La première a été proposée par Kurzanski, Varaiya [106] et consiste pour tout  $\eta > 0$  à définir la fonction valeur

$$\vartheta^\eta(x, t) := \inf \left\{ d(y_x^\alpha(t), \mathcal{C}) + \eta \int_0^t d(y_x^\alpha(s), \mathcal{K}) ds \mid \alpha \in L^\infty((0, t); \mathcal{A}) \right\}. \quad (2.22)$$

Il est facile de montrer que pour tout  $\eta > 0$  et  $t \geq 0$ , le bassin de capture  $\text{Cap}_\mathcal{C}(t)$  est donné par :

$$\text{Cap}_\mathcal{C}(t) = \{x \in \mathbb{R}^m, \vartheta^\eta(x, t) \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^m, \vartheta^\eta(x, t) = 0\},$$

et que  $\vartheta^\eta$  est l'unique solution de viscosité continue de

$$\begin{cases} \partial_t \vartheta + H(x, D_x \vartheta) - \eta d(x, \mathcal{K}) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*, \\ \vartheta(x, 0) = d(x, \mathcal{C}) & \text{sur } \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.23)$$

La seconde approche consiste à pénaliser le problème de contrôle. De manière plus précise, étant donné  $\varepsilon > 0$ , on considère pour  $t \geq 0$  et  $x \in \mathbb{R}^2$  le problème

$$\vartheta^\varepsilon(x, t) := \inf \left\{ \vartheta_0(y_x^\alpha(t)) + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} d(y_x^\alpha(s), \mathcal{K}) ds \mid \alpha \in L^\infty((0, t); \mathcal{A}) \right\}. \quad (2.24)$$

#### 4. Caractérisation de l'épigraphe de la fonction valeur

Quand  $\varepsilon$  tend vers 0,  $\vartheta^\varepsilon(x, t)$  converge localement uniformément vers  $\vartheta(x, t)$ . De plus,  $\vartheta^\varepsilon$  est l'unique solution de viscosité de

$$\begin{cases} \partial_t \vartheta^\varepsilon + H(x, D_x \vartheta^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} d(x, \mathcal{K}) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*, \\ v(x, 0) = \vartheta_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.25)$$

On note que l'équation (2.23) est très proche de (2.25), mais les conditions initiales peuvent être différentes.

Dans cet exemple, le domaine de calcul est  $[-2, 2] \times [-2, 2]$ . Les résultats obtenus au temps  $T = 3$  sont présentés dans la Figure 2.3. La comparaison est faite avec la solution numérique calculée en résolvant (2.16) sur une grille plus fine avec  $M_{x_1} = M_{x_2} = 400$  (ligne noire). Sur cet exemple, on voit que l'approche (2.16) est plus précise que les deux autres.

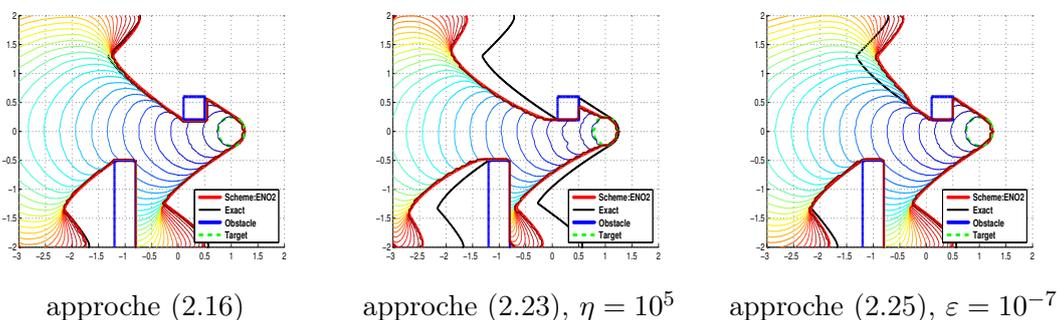


FIGURE 2.3 – (Exemple 2), Comparaison des trois approches avec  $M_x = M_y = 100$ .

#### 4 Caractérisation de l'épigraphe de la fonction valeur

Comme nous l'avons indiqué ci-dessus, il est possible d'utiliser les idées développées précédemment pour caractériser l'épigraphe de la fonction valeur. Pour cela, on considère la fonction  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , 1-Lipschitzienne vérifiant (2.14) introduite précédemment et on considère la nouvelle fonction  $w : \mathbb{R}^d \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$w(x, z, t) = \inf_{a \in \mathcal{A}} \left\{ \max(\varphi(y_x^a(t)) - z, \max_{\theta \in [0, t]} g(y_x^a(\theta))) \right\}$$

Le résultat suivant montre la relation entre la ligne de niveau zéro de  $w$  et l'épigraphe de  $\vartheta$  :

**Proposition 4.1. (Caractérisation de l'épigraphe de  $\vartheta$ , [FRZa, Proposition 2.3])**  
*On suppose que (H1) est vérifiée, alors on a*

$$\forall t \in [0, T], \{(x, z) | w(x, z, t) \leq 0\} = \{(x, z) | \vartheta(t, x) \leq z\}.$$

Le but est donc maintenant de caractériser la fonction  $w$ . Pour cela, nous allons la voir comme la fonction valeur d'un problème de contrôle en dimension supérieure. Plus précisément, on définit  $\xi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ ,  $F : \mathbb{R}^{d+1} \times A \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ ,  $\Phi : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$  de la manière suivante

$$\begin{cases} \xi(s) = z, Y(s) = (y(s), \xi(s))', \\ F(Y, a) = (f(y, a), 0)', \\ \Phi(Y) = \varphi(y) - \xi, \\ G(Y) = g(y). \end{cases}$$

Il est alors facile de voir que  $w$  est la fonction valeur du problème de contrôle optimal suivant : pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $z \in \mathbb{R}$

$$w(X, t) = \inf_{a \in A} \left\{ \max(\Phi(Y_X^a(t)), \max_{\theta \in [0, t]} G(\theta, Y_X^a(\theta))) \right\},$$

où  $X = (x, z)$  et  $Y_X^a$  est solution de

$$\begin{cases} \dot{Y}(s) = F(Y(s), a(s)), & \text{pour } s \in (0, t) \\ Y(0) = X. \end{cases}$$

Pour simplifier, on suppose que la donnée initiale est régulière (on renvoie à [FRZa] pour le cas semi-continue) :

(HC1)  $\varphi$  est bornée et uniformément continue,  
et on note

$$H(X, p) := \sup_{a \in A} (-F(X, a) \cdot p),$$

alors, on a la caractérisation suivante de la fonction  $w$

**Théorème 4.2. (Caractérisation de la fonction  $w$ , [FRZa, Théorème 2.5])**

On suppose que (H1) et (HC1) sont vérifiées. Alors  $w$  est l'unique solution de viscosité continue de

$$\begin{cases} \min \left( \partial_t w(X, t) + H(X, Dw), w(X, t) - G(X) \right) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}_+^*, \\ w(X, 0) = \max(\Phi(X), G(X)) & \text{sur } \mathbb{R}^{d+1}. \end{cases} \quad (2.26)$$

**Remarque 4.3.** En prenant une fonction  $g$  dépendante du temps, il est également possible de traiter le cas où l'ensemble de contraintes  $\mathcal{K}$  dépend du temps.

Une question intéressante (et importante) suite à ce travail est de regarder le problème de la reconstruction des trajectoires. En effet, en utilisant seulement l'épigraphe de la fonction valeur, il est possible de reconstruire une trajectoire optimale. Il serait alors intéressant d'écrire un schéma numérique et d'étudier sa convergence.

## 5 Problème de contrôle avec dynamique discontinue

On considère maintenant un problème de contrôle optimal avec contrainte sur l'état et avec des trajectoires discontinues. De manière plus précise, étant donné un temps final  $T > 0$ , une position initiale  $x \in \mathcal{K}$  et un contrôle  $\alpha \in \mathcal{A}$ , on considère la solution  $y_{x,\tau}^\alpha(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$  de

$$\begin{cases} dy(t) = g_0(t, y(t), a(t))dt + \sum_{i=1}^M g_i(t, y(t))d\mu_i \text{ for } t \in (\tau, T] \\ y(\tau^-) = x. \end{cases} \quad (2.27)$$

où  $\{\mu_i\}_{i=1,\dots,M}$  est une famille de mesure de Radon. On fait également les hypothèses suivantes sur les dynamiques :

**(Hg1)**  $g_0(t, y, \alpha) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times A \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $g_i(t, y) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , ( $i = 1, \dots, M$ ) sont continues, et  $g_0(\cdot, y, \alpha) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ .

**(Hg2)**  $\exists M_g$  tel que  $\forall y, z \in \mathbb{R}^d, \alpha \in A, t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$|g_0(t, y, \alpha) - g_0(t, z, \alpha)| + \sum_{i=1}^M |g_i(t, y) - g_i(t, z)| \leq M_g |y - z|.$$

$$|g_0(t, y, a)| \leq M_g \text{ et } |g_i(t, y)| \leq M_g.$$

Nous renvoyons à [65] pour une définition de solution pour l'équation d'état (2.27). Etant donnée une fonction coût  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  bornée, on considère le problème de contrôle optimal suivant :

$$\vartheta(x, \tau) := \inf_{a \in \mathcal{A}} \left\{ \varphi(y_{x,\tau}^\alpha(T)), y_{x,\tau}^\alpha \text{ solution de (2.27) et } y_{x,\tau}^\alpha(t) \in \mathcal{K}, \forall t \in [\tau, T] \right\} \quad (2.28)$$

Formellement, si l'on regarde l'équation HJB qui devrait être satisfaite par  $\vartheta$ , on obtient :

$$\begin{cases} -\vartheta_t(x, t) + H(t, x, D\vartheta(x, t)) = 0 & \text{dans } \mathcal{K} \times (0, T), \\ \vartheta(x, T) = \varphi(x) & \text{sur } \mathcal{K} \end{cases} \quad (2.29)$$

où l'Hamiltonien est donné par

$$H(t, x, p) = \sup_{a \in \mathcal{A}} \left\{ -p \cdot (g_0(t, x, a) + \sum_{i=1}^M g_i(t, x)\mu_i) \right\}. \quad (2.30)$$

Le problème ici est de pouvoir donner un sens au terme  $D\vartheta \cdot \mu_i$ . Pour surmonter cette difficulté, Dal Maso et Rampazzo ont proposé dans [65] d'utiliser une technique de complétion du graphe. Ils ont montré en particulier qu'il existe une fonction  $\mathcal{W} : [0, T] \rightarrow [0, 1]$  et une application continue  $\Phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^M) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  telles que si l'on considère la solution  $z_{x,\sigma}^a : [\sigma, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  de

$$\begin{cases} \dot{z}(s) = g_0(\phi^0(s), z(s), a(\phi^0(s))) \frac{d\phi^0(s)}{ds} \\ \quad + \sum_{i=1}^M g_i(\phi^0(s), z(s)) \left( \mu_i^a(\phi^0(s)) \frac{d\phi^0(s)}{ds} + \frac{d\phi^i(s)}{ds} \right) & \text{pour } s \in (\sigma, 1], \\ z(\sigma) = x. \end{cases} \quad (2.31)$$

où  $\sigma := \mathcal{W}(\tau)$  et  $\mu^a$  est la partie absolument continue de la mesure  $\mu$  par rapport à la mesure de Lebesgue, alors on a le théorème suivant (voir [43, Théorème 2.2]) :

**Théorème 5.1.** *On suppose que les propriétés (Hg1)-(Hg2) sont vérifiées, alors  $y_{x,\tau}^\alpha \in BV([\tau, T]; \mathbb{R}^d)$  est solution de (2.27) si, et seulement si, il existe une solution  $z_{x,\sigma}^\alpha \in AC([\sigma, 1]; \mathbb{R}^d)$  de (2.31) telle que*

$$z_{x,\sigma}^\alpha(\mathcal{W}(t)) = y_{x,\tau}^\alpha(t), \quad \forall t \in [\tau, T]. \quad (2.32)$$

L'approche proposée par Dal Maso et Rampazzo est illustrée dans la Figure 2.4. Elle consiste, lorsque la trajectoire  $y$  est discontinue au temps  $t$ , à ajouter un intervalle de temps fictif  $[\mathcal{W}(t-), \mathcal{W}(t+)]$  qui permet de faire passer la trajectoire de  $y_{x,\tau}^\alpha(t-)$  à  $y_{x,\tau}^\alpha(t+)$  de façon continue.

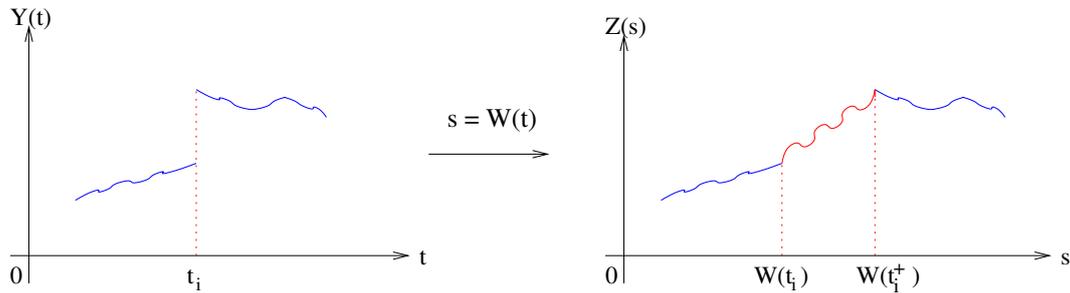


FIGURE 2.4 – Illustration de l'approche de Dal Maso et Rampazzo

Il est alors naturel d'essayer de caractériser la fonction valeur  $\vartheta$  à l'aide d'un problème de contrôle faisant intervenir les trajectoires  $z_{x,\sigma}^\alpha$  solutions de (2.31). La question est de savoir quelles contraintes il faut appliquer à la trajectoire  $z_{x,\sigma}^\alpha$ . La première consiste à imposer que la trajectoire  $z_{x,\sigma}^\alpha$  reste dans  $\mathcal{K}$  durant cet intervalle fictif. Il est assez évident de voir que dans ce cas, les deux problèmes ne sont pas équivalents. Néanmoins, il est possible d'ajouter des hypothèses de qualification (qui vont faire intervenir les dynamiques  $g^i$ ) pour récupérer l'équivalence des deux problèmes. Cette approche sera présentée dans la Section 5.1. Si l'on veut se passer de ces hypothèses de contrôlabilité, une idée consiste à dire que  $z_{x,\sigma}^\alpha(t)$  peut se déplacer dans  $\mathbb{R}^d$  tout entier où de manière équivalente que  $z_{x,\sigma}^\alpha$  doit rester dans un ensemble  $\mathbb{K}(t)$  dépendant du temps, qui est égal à  $\mathcal{K}$  quand  $y_{x,\tau}^\alpha$  et qui grossit suffisamment vite sur les intervalles fictifs pour que l'on soit assuré que  $y_{x,\tau}^\alpha \in \mathcal{K}$  si et seulement si  $z_{x,\sigma}^\alpha(t) \in \mathbb{K}(t)$  pour tout  $t \in [\sigma, 1]$ . Cette approche est illustrée dans la Figure 2.5 et sera détaillée dans la Section 5.2.

## 5.1 Cas avec hypothèses de contrôlabilité

Pour simplifier, on va supposer, uniquement dans cette section, que l'ensemble des contraintes  $\mathcal{K}$  est défini par :

$$\mathcal{K} = \bigcap_{j=1}^l \{x, h_j(x) \leq 0\}, \quad \mathring{\mathcal{K}} = \bigcap_{j=1}^l \{x, h_j(x) < 0\} \quad (2.33)$$

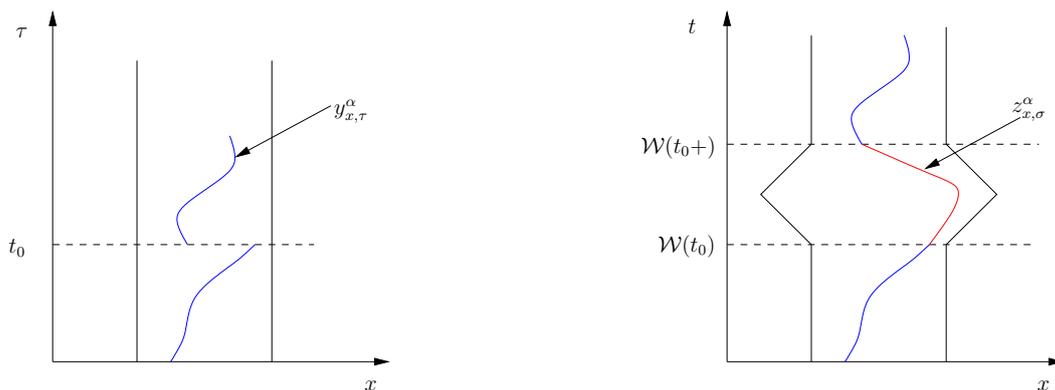


FIGURE 2.5 – Illustration de l'approche avec des contraintes dépendantes du temps

où  $\{h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=1,\dots,l}$  est une famille de fonction  $C^{1,1}$ . Pour être sûr que la trajectoire  $z_{x,\sigma}^\alpha$  reste dans  $\mathcal{K}$  sur les intervalles de temps fictifs que l'on a rajouté, on va supposer que  $\forall t \geq 0, \forall x \in \partial\mathcal{K}, \forall j \in I(x), \forall i = 1, \dots, M,$

$$g_i(t, x) \cdot \nabla_x h_j(x) \leq 0, \quad (2.34)$$

où

$$I(x) = \{j \in \{1, \dots, l\}, h_j(x) = 0\}$$

On a alors le théorème suivant

**Théorème 5.2. (Equivalence entre les dynamiques, [FRZb, Théorème 4])**

On suppose que **(Hg1)**-**(Hg2)** et (2.34) sont vérifiées, alors

$$y_{x,\tau}^\alpha(\cdot) \in \mathcal{K} \quad \text{si et seulement si} \quad z_{x,\sigma}^\alpha(\cdot) \in \mathcal{K}.$$

Si l'on considère le problème de contrôle

$$\bar{\vartheta}(x, \sigma) = \inf_{a \in \mathcal{A}} \{\varphi(z_{x,\sigma}^\alpha(1)), z_{x,\sigma}^\alpha(s) \in \mathcal{K} \text{ sur } [\sigma, 1]\}. \quad (2.35)$$

alors on a l'équivalence suivante des deux problèmes de contrôle :

**Théorème 5.3. (Equivalence entre les fonctions valeurs, [FRZb, Théorème 6])**

On suppose que **(Hg1)**-**(Hg2)** et (2.34) sont vérifiées. Soient  $\vartheta$  et  $\bar{\vartheta}$  les deux fonctions valeurs définies respectivement par (2.28) et (2.35). Pour tout  $x \in \mathcal{K}$  et  $\tau \in [0, T]$ , on a

$$\vartheta(x, \tau) = \bar{\vartheta}(x, \mathcal{W}(\tau)).$$

En utilisant les techniques classiques de caractérisation de la fonction valeur pour des Hamiltoniens mesurables en temps (voir par exemple [43] pour une définition des solutions dans le cas non contraint) et en rajoutant l'hypothèse de contrôlabilité suivante : il existe  $\beta > 0$  tel que  $\forall t \geq 0, \forall x \in \partial\mathcal{K}, \forall j \in I(x), \forall i = 1, \dots, M,$

$$g_0(t, x) \cdot \nabla_x h_j(x) \leq -\beta, \quad (2.36)$$

on a le théorème suivant :

**Théorème 5.4. (Caractérisation de  $\bar{v}$ , [FRZb, Théorème 16])**

On suppose que **(Hg1)**-**(Hg2)** et (2.34)-(2.36) sont vérifiées et que  $\varphi$  satisfait **(HC1)**. Alors  $\bar{v}$  est l'unique solution de viscosité  $L^1$  de

$$\begin{cases} -\bar{v}_s(x, s) + H(s, x, D\bar{v}(x, s)) = 0 & \text{pour } (x, s) \in \mathcal{K} \times (0, 1), \\ \bar{v}(x, 1) = \varphi(x) & \text{pour } x \in \mathcal{K} \end{cases} \quad (2.37)$$

où le Hamiltonien est défini par

$$H(s, x, p) = \sup_{a \in \mathcal{A}} \left\{ -p \cdot \left( g_0(\phi^0(s), x, \alpha) \frac{d\phi^0(s)}{ds} + \sum_{i=1}^M g_i(\phi^0(s), x) \frac{d\phi^i(s)}{ds} \right) \right\}.$$

**5.2 Cas sans hypothèses de contrôlabilité**

On utilise maintenant une approche complètement différente qui consiste à ne pas contraindre la trajectoire  $z_{x,\sigma}^\alpha$  sur les intervalles de temps fictifs. Comme indiqué précédemment, cela revient à construire un ensemble de contraintes dépendant du temps  $\mathbb{K}(t)$  convenable :

**Théorème 5.5. (Construction d'un ensemble de contraintes dépendant du temps, [FRZa, Théorème 2.4])**

Il existe un ensemble  $\mathbb{K} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  Lipschitzien tel que

$$y_{x,\tau}^\alpha(t) \in \mathcal{K} \quad \forall t \in [\tau, T] \quad \text{si et seulement si} \quad z_{x,\sigma}^\alpha(t) \in \mathbb{K}(t) \quad \forall t \in [\sigma, 1].$$

On a donc

$$\bar{v}(x, \tau) = \bar{v}(x, \sigma)$$

où

$$\bar{v}(x, \sigma) := \inf_{a \in \mathcal{A}} \left\{ \varphi(z_{x,\sigma}^\alpha(1)), z_{x,\sigma}^\alpha \text{ solution de (2.31) et } z_{x,\sigma}^\alpha(t) \in \mathbb{K}(t), \forall t \in [\sigma, 1] \right\}.$$

Pour que le résultat soit complet, il n'y a plus qu'à caractériser la fonction valeur  $\bar{v}$ . Cela peut être fait de la même manière que dans la Section 4 en remplaçant  $g$  par  $g(x, t)$  telle que

$$g(x, t) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{K}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^d.$$

En définissant alors  $w$  de la manière suivante

$$w(x, z, \sigma) = \inf_{a \in \mathcal{A}} \left\{ \max(\varphi(z_{x,\sigma}^\alpha(1)) - z, \max_{\theta \in [\sigma, 1]} g(\theta, z_{x,\sigma}^\alpha(\theta))) \right\},$$

la Proposition 4.1 et le Théorème 4.2 restent vrais où maintenant  $w$  est une solution de viscosité  $L^1$  de l'équation.

## Chapitre 3

# La Méthode Fast Marching généralisée

Pour simplifier, nous présentons les résultats en dimension  $N = 2$  mais tout reste valable en dimension quelconque.

### 1 Position du problème et résultats existants

La méthode Fast Marching (FMM) est une méthode numérique introduite par Sethian en 1996 [135] (voir aussi Tsitsiklis[147]) qui permet de suivre de manière très efficace la propagation d'un front évoluant avec une vitesse normale  $c(x)$  strictement positive. Cette méthode repose sur l'équation level set pour l'évolution d'un front (voir Osher, Sethian [129]). Celui-ci va être représenté de manière implicite comme la ligne de niveau zéro d'une fonction  $u$  qui va vérifier l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t(x, t) = c(x)|Du(x, t)| & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, T) \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $c(x) > 0$  représente la vitesse normale du front et  $u_0$  est une fonction régulière qui encode la donnée initiale (c'est à dire que  $u_0$  est positive à l'intérieur du front et négative à l'extérieur). Comme la vitesse du front est positive, plutôt que de suivre son évolution, on peut regarder en chaque point de l'espace à quel moment celui-ci va arriver. Formellement, ceci revient à chercher des solutions stationnaires de l'équation (3.1) de la forme  $u(x, t) = T(x) + t$  où  $T$  représente le temps minimal pour que le front atteigne le point  $x$  (voir Falcone [74]), et est solution de l'équation

$$\begin{cases} |DT(x)|c(x) = 1 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ T(x) = 0 & \text{sur } \Omega_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $\Omega_0 = \{x, u_0(x) \leq 0\}$  représente l'intérieur du front à l'instant initial. Il est bien connu que pour chercher la solution de viscosité d'une EDP, il est important d'utiliser un schéma monotone (voir par exemple le résultat général de convergence de Barles, Souganidis [28]).

La manière la plus simple de discrétiser l'équation (3.2) est donc par exemple d'utiliser le schéma introduit par Rouy, Tourin [133] :

$$\begin{aligned} & \max(T_{i_1, i_2} - T_{i_1-1, i_2}, T_{i_1, i_2} - T_{i_1+1, i_2}, 0)^2 + \max(T_{i_1, i_2} - T_{i_1, i_2-1}, T_{i_1, i_2} - T_{i_1, i_2+1}, 0)^2 \\ & = \left( \frac{\Delta x}{c_{i_1, i_2}} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

où  $\Delta x$  est le pas d'espace,  $T_{i_1, i_2}$  est l'approximation de  $T$  au point du maillage  $(x_{i_1}, x_{i_2}) = (i_1 \Delta x, i_2 \Delta x)$  et  $c_{i_1, i_2} = c(i_1 \Delta x, i_2 \Delta x)$ . La question est alors de savoir comment résoudre de manière rapide le schéma (3.3) en sachant qu'une méthode itérative serait trop coûteuse. L'idée essentielle de Sethian est de remarquer que le schéma est causal, c'est à dire que pour calculer  $T_{i_1, i_2}$ , on a besoin de connaître la valeur des temps sur les voisins uniquement pour ceux qui ont un temps inférieur à  $T_{i_1, i_2}$ , c'est à dire ceux qui ont déjà été atteints par le front. En d'autres mots, si l'on connaît l'ordre des  $T_{i_1, i_2}$  alors il est possible de résoudre le schéma (3.3) en une seule itération. Le principe de la FMM est de calculer en même temps l'ordre des  $T_{i_1, i_2}$  et leur valeur. Pour ce faire, on définit trois zones (voir Figure 3.1) :

1. Les points *acceptés* : ce sont les points qui ont déjà été atteints par le front et pour lesquels on connaît la valeur  $T$  ;
2. Les points de la *Narrow Band* (NB) : ce sont les points qui ont un voisin accepté (et qui ne sont pas encore acceptés). Il s'agit en fait des points qui peuvent être atteints immédiatement par le front ;
3. Les points *far away* : ce sont les points qui sont loins du front et ne peuvent pas être atteints dans l'immédiat.

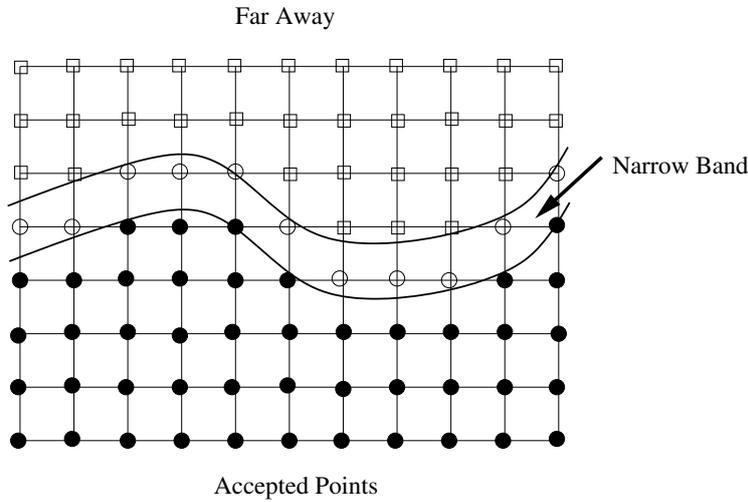


FIGURE 3.1 – Illustration de la Narrow Band

Les calculs sont alors faits uniquement dans la Narrow Band. Plus précisément, pour calculer le temps  $T_{i_1, i_2}$  pour un point  $(i_1, i_2)$  de la Narrow Band, on résout (3.3) en n'utilisant que les points déjà acceptés. L'algorithme est alors le suivant :

*Initialisation :*

$T_{i_1, i_2} = 0$  pour tout  $(i_1, i_2)$  tel que  $(i\Delta x, j\Delta x) \in \Omega_0$ .

*Boucle :*

1. Pour tout  $(i_1, i_2)$  dans la Narrow Band, on calcule  $T_{i_1, i_2}$  en résolvant (3.3).
2. On calcule le minimum  $t_n$  des temps  $T_{i_1, i_2}$ . Le(s) point(s)  $(i_1, i_2)$  de la Narrow Band ayant la plus petite valeur  $T_{i_1, i_2}$  est (sont) accepté(s) au temps  $t_n$ .
3. La Narrow Band est redéfinie comme la frontière de la nouvelle région acceptée.

Une preuve de convergence du schéma a été proposée par Cristiani, Falcone [63] où ils ont montré que la FMM calcule la même solution que celle donnée par une discrétisation de la méthode level sets. Le premier avantage de la FMM par rapport à la méthode level sets est le temps de calcul. En effet, on peut montrer que la complexité théorique de la FMM est en  $O(N \ln(N))$  (où  $N$  est le nombre total de points). Le second est que, contrairement à la méthode level sets classique où la fonction level sets peut s'aplatir, il n'y a pas de problème pour reconstruire le front (qui est donné ici par les points de la Narrow Band). Pour terminer, nous mentionnons quelques extensions de la FMM. Tout d'abord, Vladimirovsky [148] a généralisé la méthode au cas où la vitesse dépend du temps (mais reste positive). Chopp [56] a également proposé une généralisation au cas où la vitesse dépend uniquement de l'espace et peut changer de signe.

## 2 GFMM dans le cas à vitesse prescrite

### 2.1 Description de l'algorithme

Notre but est maintenant de présenter la généralisation de cette méthode au cas où la vitesse peut dépendre de l'espace et du temps et changer de signe en espace et/ou en temps. Il s'agit d'un travail en collaboration avec E. Carlini, M. Falcone et R. Monneau [CFFM08] que j'ai ensuite amélioré dans [For09]. Il y a essentiellement deux difficultés à résoudre.

La première est la dépendance en temps de la vitesse. Pour cela, il suffit de remarquer que le temps est donné implicitement par l'algorithme comme étant le minimum des temps sur la Narrow Band. A l'étape  $n$  de l'algorithme, il suffit donc de résoudre le schéma (3.3) en remplaçant  $c_{i_1, i_2}$  par  $c_{i_1, i_2}^{n-1} = c(x_{i_1}, x_{i_2}, t_{n-1})$ . Il y a par contre quelques précautions à prendre. Tout d'abord, le minimum des  $T_{i_1, i_2}$  calculés à l'étape  $n$  peut être plus petit que le temps  $t_{n-1}$  (par exemple si la vitesse croît en temps). Ensuite, le minimum des  $T_{i_1, i_2}$  calculés peut être très grand (par exemple si la vitesse est très petite). Dans ce cas, si on ne fait rien, l'algorithme avancerait beaucoup trop vite et ne verrait pas les changements de la vitesse au cours du temps. Pour cette raison, nous devons introduire un pas de temps  $\Delta t$  assez petit. Si le temps candidat calculé (c'est à dire le minimum des  $T_{i_1, i_2}$ ) n'est pas compris entre  $t_{n-1}$  et  $t_{n-1} + \Delta t$ , nous devons le tronquer.

La deuxième difficulté vient du fait que la vitesse peut changer de signe en espace et/ou en temps. Le front peut donc avancer dans un sens ou dans l'autre et nous devons

donc définir une double Narrow Band. Pour encoder le front, on définit un champ  $\theta$  qui vaudra 1 à l'intérieur et  $-1$  à l'extérieur. Dans la zone où la vitesse est positive, c'est en fait l'ensemble  $\{\theta = 1\}$  qui va grossir et la Narrow Band est donc incluse dans la région  $\{\theta = -1\}$  alors que dans la zone où la vitesse est négative c'est la zone  $\{\theta = -1\}$  qui va grossir et la Narrow Band est alors incluse dans la zone  $\{\theta = 1\}$  (voir Figure 3.2).

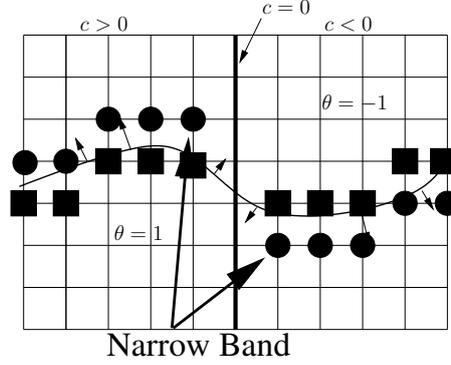


FIGURE 3.2 – Schéma de la Fast Marching Généralisée avec la double Narrow Band (les points ronds) et les points utiles (les points carrés)

Pour que la description de l'algorithme soit complète, il n'y a plus qu'à expliquer comment on calcule le temps  $T_{i_1, i_2}$  candidat pour un point  $(i_1, i_2)$  de la double Narrow Band. Pour cela, on doit d'abord définir l'ensemble des points  $(j_1, j_2)$  qui doivent être utilisés pour le calcul de  $T_{i_1, i_2}$  (les points *utiles*). Il s'agit uniquement des points qui sont à côté de  $(i_1, i_2)$  et qui sont de l'autre côté du front (i.e. qui ont un  $\theta$  différent). Pour un point  $(j_1, j_2)$  utile pour le calcul de  $(i_1, i_2)$ , le temps  $T_{j_1, j_2}$  doit être défini comme le temps auquel le front commence à aller du point  $(j_1, j_2)$  vers le point  $(i_1, i_2)$ . En particulier, si le point  $(j_1, j_2)$  est utile pour différents points, la valeur  $T_{j_1, j_2}$  peut dépendre de la direction, voir étape 10 de l'algorithme ci-dessous. Ceci est un point primordial de l'algorithme proposé dans [For09] qui permet d'obtenir un schéma complètement monotone (contrairement à celui proposé dans [CFFM08]).

On donne maintenant les détails de l'algorithme. Tout d'abord, pour des raisons techniques, nous avons besoin de régulariser la vitesse numérique en espace en ajoutant une bande de zéro pour séparer les régions où elle est positive de celles où elle est négative. On note  $\hat{c}$  cette vitesse régularisée. Pour simplifier, on note également  $I = (i_1, i_2)$ . Le voisinage de  $I$  est défini par :

$$V(I) \equiv \{J \in \mathbb{Z}^N : |J - I| \leq 1\}.$$

La Narrow Band est alors définie par :

$$NB^n = \{I \in \mathbb{Z}^2, \exists J \in V(I), \theta_I^n = -\theta_J^n \text{ et } \theta_I^n \hat{c}_I^n < 0\}.$$

Pour  $I \in NB^n$ , on définit les points utiles pour  $I$  par :

$$\mathcal{U}^n(I) = \{J \in V(I), \theta_I^n = -\theta_J^n\}, \quad \mathcal{U}^n = \cup_{I \in NB^n} \mathcal{U}^n(I)$$

et on note  $T_{J \rightarrow I}^n$  le temps auquel le front commence à aller de  $J$  vers  $I$ . L'algorithme est alors le suivant :

**Initialisation**

1. On pose  $n = 1$  et  $t_0 = 0$
2. Initialiser le champ  $\theta^0$  de la façon suivante :
$$\theta_I^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } x_I \in \Omega_0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$
3. Initialiser le temps du point  $I$

$$T_{I \rightarrow K}^0 = \begin{cases} t_0 & \text{si } I \in \mathcal{U}^0(K) \text{ et } K \in NB^0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

**Boucle**

4. Calculer le temps candidat  $\tilde{T}^{n-1}$  sur  $NB^{n-1}$   
 Soit  $I \in NB^{n-1}$ , alors on calcule  $\tilde{T}_I^{n-1}$  comme la solution de

$$\begin{cases} \max \left( \tilde{T}_I^{n-1} - T_{(i_1-1, i_2) \rightarrow I}^{n-1}, \tilde{T}_I^{n-1} - T_{(i_1+1, i_2) \rightarrow I}^{n-1}, 0 \right)^2 \\ + \\ \max \left( T_{(i_1, i_2-1) \rightarrow I}^{n-1}, \tilde{T}_I^{n-1} - T_{(i_1, i_2+1) \rightarrow I}^{n-1}, 0 \right)^2 \end{cases} = \frac{(\Delta x)^2}{|\tilde{c}_I^{n-1}|^2}$$

5.  $\tilde{t}_n = \min \left\{ \tilde{T}_I^{n-1}, I \in NB^{n-1} \right\}$ .
6. Tronquer  $\tilde{t}_n$   
 $t_n = \max(t_{n-1}, \min\{\tilde{t}_n, t_{n-1} + \Delta t\})$
7. Si  $t_n = t_{n-1} + \Delta t$  et  $t_n < \tilde{t}_n$  aller à 10 avec  $\theta^n = \theta^{n-1}$
8. Initialiser les nouveaux acceptés  
 $NA^n = \{I \in NB^{n-1}, \tilde{T}_I^{n-1} = \tilde{t}_n\}$ ,
9. Réinitialiser  $\theta^n$

$$\theta_I^n = \begin{cases} -\theta_I^{n-1} & \text{si } I \in NA^n \\ \theta_I^{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

10. Réinitialiser  $T_{I \rightarrow K}^n$

$$T_{I \rightarrow K}^n = \begin{cases} \min(T_{I \rightarrow K}^{n-1}, t_n) & \text{si } I \in \mathcal{U}^n(K) \text{ et } K \in NB^n \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

11. Poser  $n := n + 1$  et aller à 4

Le schéma présenté ici correspond à celui proposé dans [For09] et est une version complètement monotone (voir Théorème 2.1 ci-dessous) de celui précédemment proposé dans [CFFM08].

## 2.2 Résultats de convergence et de monotonie

Pour énoncer le résultat de convergence, on commence par étendre le champ  $\theta_I^n$  en une fonction de  $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$ . Pour cela, comme la suite de temps  $\{t_n, n \in \mathbb{N}\}$  définie à l'étape 6 de l'algorithme est croissante (au sens large), on peut extraire une sous-suite  $\{t_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$  strictement croissante telle que :

$$t_{n_k} = t_{n_{k+1}} = \dots = t_{n_{k+1}-1} < t_{n_{k+1}}.$$

On définit alors la fonction

$$\theta^\varepsilon(x, t) = \theta_I^{n_{k+1}-1} \text{ si } (x, t) \in [x_{i_1}, x_{i_1} + \Delta x] \times [x_{i_2}, x_{i_2} + \Delta x] \times [t_{n_k}, t_{n_{k+1}}[. \quad (3.4)$$

où  $\varepsilon$  désigne le couple  $\varepsilon = (\Delta x, \Delta t)$ . On définit ensuite les semi-limites relaxées :

$$\bar{\theta}^0(x, t) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0, y \rightarrow x, s \rightarrow t} \theta^\varepsilon(y, s), \quad \underline{\theta}^0(x, t) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0, y \rightarrow x, s \rightarrow t} \theta^\varepsilon(y, s). \quad (3.5)$$

On a alors le résultat de convergence suivant :

### **Théorème 2.1. (Résultat de convergence pour l'algorithme GFMM, [CFFM08, Théorème 2.5])**

*On suppose que  $c \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  et que  $\Omega_0$  est un ouvert de classe  $C^2$ . Alors  $\bar{\theta}^0$  (resp.  $\underline{\theta}^0$ ) est une sous-solution de viscosité (resp. sur-solution) de*

$$\begin{cases} \theta_t = c(x, t)|D\theta| & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty), \\ \theta(\cdot, 0) = 1_{\Omega_0} - 1_{\Omega_0^c} & \text{sur } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (3.6)$$

*En particulier, si (3.6) satisfait un principe de comparaison, alors  $\bar{\theta}^0 = (\underline{\theta}^0)^*$  et  $(\bar{\theta}^0)_* = \underline{\theta}^0$  est l'unique solution de viscosité discontinue de (3.6).*

Le résultat énoncé ici est un résultat de convergence typique pour les solutions de viscosité discontinues. Il peut paraître assez faible *a priori* (car il ne donne pas la convergence de  $\theta^\varepsilon$  vers la solution de (3.6)) mais cela vient du fait qu'il n'y a pas unicité pour l'équation (3.6). L'idée de la preuve est inspirée de celle de Barles, Souganidis [28] et utilise essentiellement la monotonie du schéma (3.3) et la consistance uniquement pour l'évolution des plans. De manière plus précise, la stratégie est de toucher  $\bar{\theta}^0$  par au-dessus en  $(x_0, t_0)$  par une fonction test  $\varphi$  et de montrer que  $\varphi_t((x_0, t_0) \leq c(x_0, t_0)|D\varphi(x_0, t_0)|$ . Pour récupérer cette information, on utilise que la fonction  $\varphi$  touche  $\theta^\varepsilon$  par au-dessus en un point proche de  $(x_0, t_0)$ . Pour  $\varepsilon$  assez petit, la ligne de niveau zéro de  $\varphi$  ressemble localement à un plan et il suffit donc de comparer l'évolution de ce plan à celle donnée par la GFMM.

Comme expliqué ci-dessus, l'apport principal de [For09] par rapport à [CFFM08] est que le schéma est maintenant complètement monotone, ce qui sera utile dans la suite pour étudier des équations non-locales. Plus précisément, on a le résultat suivant :

**Théorème 2.2. (Principe de comparaison pour la GFMM, [For09, Théorème 3.4])**

On considère deux vitesses  $c_u$  et  $c_v$  et deux données initiales  $\theta_{u,J}^0$  et  $\theta_{v,J}^0$  tels que

$$\theta_{v,J}^0 \geq \theta_{u,J}^0 \quad \text{pour tout } J \in \mathbb{Z}^N.$$

On suppose que les deux vitesses satisfont pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T - \Delta t]$

$$\inf_{s \in [t, t + \Delta t]} c_v(x, s) \geq \sup_{s \in [t, t + \Delta t]} c_u(x, s).$$

Alors

$$\theta_v^\varepsilon(x, t) \geq \theta_u^\varepsilon(x, t)$$

pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]$ .

### 2.3 Simulations numériques

On présente ici quelques simulations numériques afin de mettre en évidence les bonnes qualités de la méthode proposée. On choisit comme front initial une droite d'équation  $x_2 + 1.5x_1 = 0$  et  $\theta^0$  est donc défini de la manière suivante :

$$\theta(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 + 1.5x_1 > 0, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.7)$$

La vitesse normale est donnée par  $c(x, t) = x_1$  et le domaine de calcul est  $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$ . Dans ce cas, on peut calculer une solution exacte et donc évaluer la distance de Hausdorff  $\mathcal{H}(\cdot, \cdot)$  entre le front exact et la solution calculée en utilisant la GFMM. Dans la table 3.1, on compare les résultats obtenus par la GFMM et ceux obtenus par la méthode level set [129] avec respectivement 50, 100, 200, 400 points sur chaque côté du domaine de calcul. Les résultats graphiques sont présentés dans la Figure 3.3 avec  $\Delta x = 0.01$ .

	GFMM		FD	
$\Delta x$	$\mathcal{H}(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}})$	CPU	$\mathcal{H}(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}})$	CPU
0.04	$5.08 \cdot 10^{-2}$	0.19 s	$4.10 \cdot 10^{-2}$	1.82 s
0.02	$2.72 \cdot 10^{-2}$	0.73 s	$2.05 \cdot 10^{-2}$	13.2 s
0.01	$1.35 \cdot 10^{-2}$	3.98 s	$1.03 \cdot 10^{-2}$	102 s
0.005	$6.80 \cdot 10^{-3}$	76 s	$2.60 \cdot 10^{-3}$	810 s

TABLE 3.1 – Distance de Hausdorff : GFMM versus FD.

Dans la Table 3.1, on observe une meilleure précision de la méthode level set par rapport à la GFMM. Ceci s'explique par le fait que dans la méthode level set, pour obtenir le front, on cherche la ligne de niveau zéro d'une fonction continue qui peut donc être obtenu par interpolation alors que dans la méthode GFMM, le front est représenté par le saut de la fonction  $\theta$ , ce qui est explique une erreur de l'ordre de  $\Delta x$ . L'avantage de la GFMM est surtout le gain en temps de calcul puisqu'elle est 10 fois plus rapide (notons que nous n'avons pas utiliser une méthode level set avec Narrow Band qui aurait amélioré le temps de calcul).

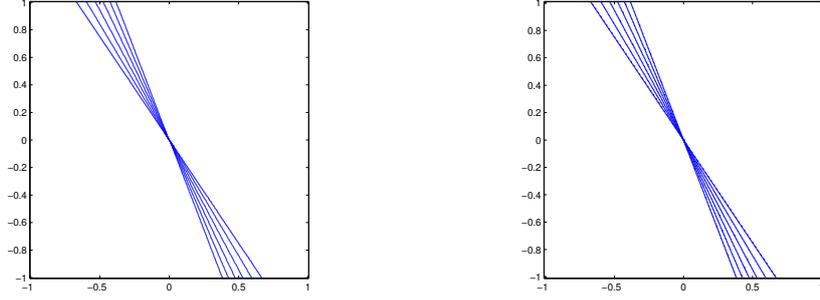


FIGURE 3.3 – Simulation d’une droite tournant avec la GFMM (à gauche) et la level set (à droite) au temps  $t_n = n0.1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

### 3 Application à la dynamique des dislocations

Le but est maintenant de résoudre l’équation non-locale suivante :

$$\begin{cases} \theta_t = ((c_0 \star \theta(\cdot, t))(x) + c_1(x, t)) |D\theta| & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty), \\ \theta(\cdot, 0) = 1_{\Omega_0} - 1_{\Omega_0^c} & \text{sur } \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (3.8)$$

en utilisant la GFMM. Cette équation modélise l’évolution d’une ligne de dislocation (voir Chapitre 1)

Pour cela, étant donné un champ  $\theta = (\theta_I)_{I \in \mathbb{Z}^N}$ , on définit son extension sur  $\mathbb{R}^N$  par

$$\theta^\Delta(x) = \sum_{I \in \mathbb{Z}^2} \theta_I 1_{[x_{I_1}, x_{I_1} + \Delta x] \times [x_{I_2}, x_{I_2} + \Delta x]}(x) \quad (3.9)$$

et la vitesse non-locale correspondante par :

$$c[\theta^\Delta](x, t) = (c_0 \star \theta^\Delta)(x) + c_1(x, t)$$

Pour éviter de recalculer la vitesse non-locale à chaque itération, on introduit également un pas de temps  $\Delta T$  (qui est déconnecté de  $\Delta x$  et  $\Delta t$ ) et on ne recalcule la vitesse que tous les  $\Delta T$ . La GFMM non-locale est alors définie à partir de la GFMM local en ajoutant une étape d’initialisation avant l’étape 1 et en ajoutant une étape (qui recalcule la vitesse) avant l’étape 10.

2b. *Initialiser la vitesse* :  $c_I^0 \equiv c[(\theta^0)^\Delta](x_I, 0)$ .

9b. *Calculer la vitesse  $c_I^n$*  :

Etant donné  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $t_{n-1} \in [p\Delta T, (p+1)\Delta T)$ , on pose

$$c_I^n \equiv \begin{cases} c_I^{n-1} & \text{si } t_n < (p+1)\Delta T \\ c[(\theta^{n-1})^\Delta](x_I, t_n) & \text{si } t_n \geq (p+1)\Delta T \end{cases}$$

### 3. Application à la dynamique des dislocations

---

Dans la suite, quand il s'agira de l'équation non-locale, on notera  $\varepsilon$  le paramètre de discrétisation, i.e.

$$\varepsilon = (\Delta x, \Delta t, \Delta T)$$

qui devra tendre vers zéro pour assurer la convergence de la GFMM.

**Remarque 3.1.** *Le fait que l'on utilise  $\theta^{n-1}$  pour recalculer la vitesse au temps  $t_n$  (alors que l'on connaît  $\theta^n$ ) peut paraître curieux. La raison est que, une fois que l'on a calculé la solution  $(\theta_I^n)_{n,I}$  donnée par la GFMM non-locale et que l'on a reconstruit  $\theta^\varepsilon$ , il est possible d'interpréter la GFMM non-locale comme une GFMM dont la vitesse est calculée en utilisant seulement la solution  $\theta^\varepsilon$ .*

*D'une manière plus technique, cela est dû au fait que l'on peut écrire la vitesse comme une convolution avec la fonction  $\theta^\varepsilon$ . En effet, si l'on recalcule la vitesse alors nécessairement  $t_{n-1} < t_n$  et donc  $n-1 = n_{k+1} - 1$  pour un certain indice  $k$ . En utilisant la définition de  $\theta^\varepsilon$ , on obtient :*

$$\theta^\varepsilon(x, t) = \theta_I^{n_{k+1}-1} = \theta_I^{n-1} \text{ si } (x, t) \in [x_{I_1}, x_{I_1} + \Delta x] \times [x_{I_2}, x_{I_2} + \Delta x] \times [t_{n_k}, t_{n_{k+1}}].$$

ce qui nous permet d'écrire la vitesse de la manière suivante :

$$c_I^n = c[\theta^\varepsilon(\cdot, t_{n_k})](x_I, t_{n_{k+1}}).$$

Le premier résultat de convergence pour la GFMM pour la dynamique des dislocations concerne le cas d'une courbe dans  $\mathbb{R}^2$  où un résultat d'existence et d'unicité est connu (voir [7]).

**Théorème 3.2. (Boucle de dislocation en temps court avec une vitesse changeant de signe, [CFM, Théorème 3.1])**

*On suppose que  $c_1 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty))$ ,  $c_0 \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  et que  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$  est un ensemble ouvert borné, connecté et simplement connecté de classe  $C^3$ . Alors, il existe  $T^* > 0$  tel que*

$$\theta^\varepsilon \rightarrow \theta \quad \text{dans } L^\infty([0, T^*]; L^1(\mathbb{R}^N))$$

*quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , où  $\theta^\varepsilon$  est la solution donnée dans (3.4) en utilisant la GFMM non locale et  $\theta$  est l'unique solution de (3.8) sur l'intervalle de temps  $[0, T^*]$ .*

Dans le cas où la vitesse non-locale est positive et sous certaines hypothèses de régularité supplémentaire, un résultat d'existence et d'unicité en temps long est connu (voir [4]). Dans ce cas, on a également la convergence de la GFMM.

**Théorème 3.3. (Dynamique des dislocations en temps grand avec une vitesse positive, [CFM, Théorème 3.2])**

*On suppose que  $c_0 \in W^{2,1}(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $c_1 \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty))$  et  $c_1(x, t) \geq |c_0|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \delta$  avec  $\delta > 0$ . On suppose également que  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$  est un ouvert borné de classe  $C^2$ . Alors*

$$\theta^\varepsilon \rightarrow \theta \quad \text{dans } L^\infty([0, +\infty); L^1(\mathbb{R}^N))$$

*quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , où  $\theta^\varepsilon$  est la solution donnée dans (3.4) en utilisant la GFMM non locale et  $\theta$  est l'unique solution de (3.8)*

L'idée de la preuve de ces deux théorèmes est assez simple et utilise un argument de type barrière. De manière plus précise, si l'on note  $c[\theta](x, t)$  la vitesse non-locale apparaissant dans (3.8), alors, étant donné  $e = e(t) > 0$ , on définit :

- $\theta$  : la solution de (3.8) ;
- $\theta^\varepsilon$  : la solution donnée dans (3.4) en utilisant la GFMM non locale ;
- $\theta^{\pm e}$  : la solution de (3.6) avec une vitesse locale  $c[\theta](x, t) \pm e$  ;
- $\theta^{\pm e, \varepsilon}$  : la solution donnée par la GFMM locale avec la vitesse  $c[\theta](x, t) \pm e$ .

Par le principe de comparaison (resp. en continue et en discret), on obtient alors pour  $e$  pas trop petit (dépendant de  $\Delta x$  et  $\Delta t$ )

$$\theta^{-e} \leq \theta \leq \theta^{+e} \quad \text{et} \quad \theta^{-e, \varepsilon} \leq \theta^\varepsilon \leq \theta^{+e, \varepsilon}.$$

De plus, pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , le résultat de convergence à vitesse donnée nous dit que  $\theta^{\pm e, \varepsilon}$  est proche de  $\theta^{\pm e}$ . Pour obtenir la convergence de  $\theta^\varepsilon$  vers  $\theta$ , on utilise finalement que  $\theta^{\pm e}$  est proche de  $\theta$  pour  $e$  pas trop grand.

On présente maintenant une simulation pour illustrer la méthode. Il s'agit de l'évolution d'un carrée qui va disparaître. Pour plus détails sur l'implémentation et en particulier sur le calcul de la vitesse non-locale, nous renvoyons à [CFM]. On choisit  $c_1 \equiv 0$  et les calculs sont faits sur le domaine  $D \equiv [-3, 3] \times [-3, 3]$ , avec 160 points sur chaque côté. On remet à jour la vitesse tous les  $\Delta T = 0.001$  le contour est représenté tous les 0.05. Les résultats sont présentés dans la Figure 3.4, où on compare les résultats obtenus avec la GFMM et ceux obtenus avec la méthode level set présentée dans [6].

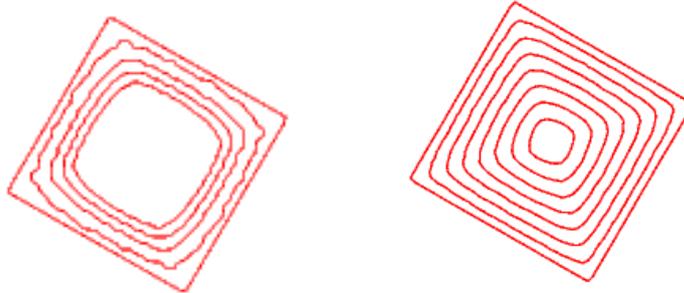


FIGURE 3.4 – Evolution d'un carrée avec la méthode level set (à gauche) et la GFMM (à droite)

Dans cette simulation, on voit que la méthode level set produit des oscillations. Cela vient du fait que le gradient de la fonction level set s'aplatit rapidement et on n'est pas en mesure de reconstruire correctement la ligne de niveau zéro de la fonction level set (notons que nous n'avons pas utilisé la méthode de la vitesse étendue, voir par exemple [57]). La GFMM ne souffre pas de ce problème et aucune oscillation n'est produite durant l'évolution.

## 4 Application à la segmentation d'image

On présente maintenant une application de la GFMM à la segmentation d'image. Il s'agit d'un travail en collaboration avec C. Gout et C. Le Guyader [FLGG08] et repose sur un modèle simplifié de celui proposé par Chan, Vese [54].

Etant donné un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , on considère une image  $I : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ . Le but est de détecter un contour dans l'image. Pour cela, on se donne un contour initial  $\Omega_0$  et on définit la vitesse normale au temps  $t_n$  par

$$c(x, t_n) = (I(x) - c_2)^2 - (I(x) - c_1)^2$$

où

$$c_1 = \frac{\int_{\{(\theta^n)^\Delta=1\}} I(x) dx}{\int_{\{(\theta^n)^\Delta=1\}} dx} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{\int_{\{(\theta^n)^\Delta=-1\}} I(x) dx}{\int_{\{(\theta^n)^\Delta=-1\}} 1 dx}.$$

Le choix de la vitesse pour segmenter l'image peut être facilement justifié en considérant une image générique contenant une ellipse noire ( $I(x) = 1$ ) sur un fond blanc ( $I(x) = 0$ ) (voir Figure 3.5 où le front est représenté en rouge). Il est facile de voir que  $c_2 \simeq 0$  et  $c_1 \simeq \frac{1}{2}$ . Si l'on considère la vitesse normale au point vert, on a alors

$$c(x, t_n) = (c_2)^2 - (c_1)^2 \simeq -\frac{1}{4}$$

alors que la vitesse au point rouge est donné par

$$c(x, t_n) = (1 - c_2)^2 - (1 - c_1)^2 \simeq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Cela implique que pour les points blancs (i.e. tels que  $I(x) = 0$ ) la vitesse est négative et le front bougera vers l'intérieur alors que sur les points noirs (i.e. tels que  $I(x) = 1$ ), la vitesse est positive et le front bougera vers l'extérieur.

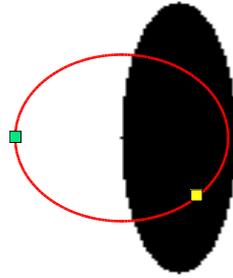


FIGURE 3.5 – Illustration du critère de segmentation dans le modèle

Pour illustrer la méthode, on présente dans la Figure 3.6 une simulation concernant la segmentation du cerveau. L'avantage principale de la méthode est que la vitesse peut changer de signe et il n'y a donc plus de contrainte sur la donnée initiale.

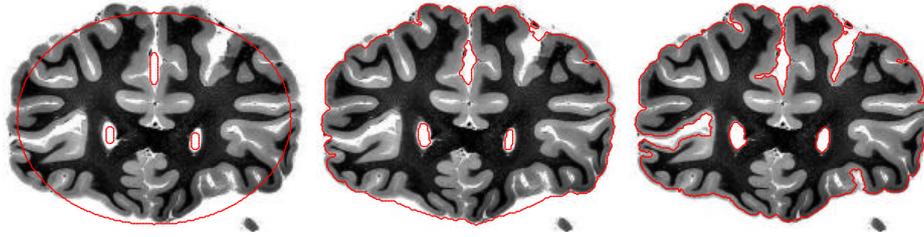


FIGURE 3.6 – Différentes étapes de la segmentation. L'ensemble initial  $\Omega_0$  est un cercle avec trois trous.

## 5 Application au contrôle optimal

Le but de cette section est de résoudre des équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman en utilisant la méthode Fast Marching. La résolution de ces équations étant étroitement liées à la résolution d'équation de transport (voir [38]), nous devons nous restreindre au cas de la dimension 1. L'équation que nous considérons est donc la suivante :

$$\begin{cases} \vartheta_t + \max(f_+(x)\vartheta_x, f_-(x)\vartheta_x) = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times (0, T) \\ \vartheta(\cdot, 0) = v_0 & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.10)$$

où  $v_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ . En particulier,  $v_0$  peut être discontinue. Pour simplifier la présentation, nous supposons ici que  $v_0$  est Lipschitzienne. De plus,  $v_0$  n'est pas à valeur dans  $\{0, 1\}$  et il ne s'agit pas a priori d'un problème de mouvement de front. Pour surmonter cette difficulté, l'idée est de décomposer la donnée initiale en ensemble de niveaux puis de faire évoluer chaque ensemble de niveaux séparément. Grâce au principe de comparaison discret, on peut montrer que les ensembles de niveaux restent ordonnés et on peut donc reconstruire une approximation de la fonction valeur simplement en superposant ces ensembles de niveaux.

De manière plus précise, on définit une approximation par ensemble de niveaux  $w_0$  de  $v_0$  de la manière suivante : étant donné  $p \geq 1$  et  $(h_k)_{k=1, \dots, p} \subset \mathbb{R}_+^*$ ,  $h = \max_{i=1, \dots, p} h_i$ , on définit :

$$w_0(x) = \sum_{k=1}^p h_k w_{0,k}(x), \quad \text{avec } w_{0,k}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } v_0(x) > \sum_{i=1}^k h_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, pour chaque niveau  $k = 1, \dots, p$ , la fonction  $w_{0,k}$  prend ses valeurs dans  $\{0, 1\}$ . Il est donc possible d'utiliser un algorithme basé sur la Méthode Fast Marching pour faire évoluer chaque fonction  $w_{0,k}$ , pour  $k = 1, \dots, p$ . En notant  $\rho$  le paramètre de discrétisation, on obtient alors pour tout  $k$  une approximation  $\vartheta_k^\rho$  de la solution de (3.10) associée à la condition initiale  $w_{0,k}$ . L'approximation de la solution  $\vartheta$  de (3.10) est alors obtenu par

$$\vartheta^\rho(t, x) = \sum_{k=1}^p h_k \vartheta_k^\rho(t, x).$$

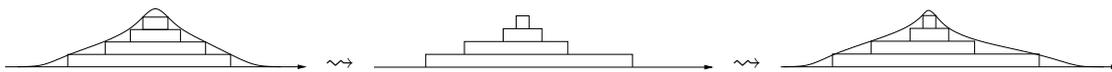


FIGURE 3.7 – Illustration de la méthode : 1) découpage en ensemble de niveau. 2) Evolution de chaque ensemble de niveau. 3) Reconstruction de l’approximation.

Le schéma est illustré dans la Figure 3.7.

Pour ne pas alourdir la présentation, nous ne donnons pas les détails de l’algorithme ici (qui ressemble essentiellement à celui présenté dans la section 2) mais nous expliquons seulement les idées principales pour le construire (nous renvoyons à [BFZ10a] pour une description détaillée). Tout d’abord, pour chaque ensemble de niveau, il est très facile de définir une Narrow Band. La Narrow Band complète est alors définie comme l’union de toutes ces Narrow Band. La difficulté principale est de savoir comment calculer le temps candidat. Pour cela, il suffit de calculer un temps candidat pour chaque dynamique ( $f_+$  et  $f_-$ ) et de prendre le minimum de ces deux temps. Pour chaque dynamique, l’équation locale à résoudre est une équation de transport en dimension 1 qu’il est donc très facile de résoudre (notons au passage que la limitation dans la dimension vient justement du fait que l’on ne sait pas résoudre une équation de transport en dimension  $N \geq 2$  en utilisant un schéma de type GFMM).

On a alors le résultat de convergence suivant :

**Théorème 5.1. (Convergence de la FMM appliquée à HJB, [BFZ10a, Théorème 2.6])**

*On suppose que  $f_+$  et  $f_-$  sont lipschitziennes et vérifient qu’il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $f_-(x) + \varepsilon \leq f_+(x)$ . On suppose également que*

$$\text{supp}(v_0) \subset [\alpha, \beta].$$

*et que  $v_0$  admet un nombre fini d’extremum sur  $[\alpha, \beta]$ . Alors on a le résultat de convergence suivant :*

$$\vartheta^p \rightarrow \vartheta \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}).$$

## 6 Perspectives

Il reste encore beaucoup de chose à faire concernant la méthode GFMM. Tout d’abord, il serait intéressant de comparer de manière précise cette méthode avec la méthode level sets avec narrow band. Concernant les performances en temps de calcul de la GFMM et dans le cadre d’une collaboration entre l’INRIA et la société HPC project, nous sommes en train de développer une bibliothèque de code parallèle, ce qui devrait permettre d’améliorer de manière importante les résultats obtenus.

Un autre point qui m’intéresse particulièrement est l’obtention d’estimations d’erreur sur la distance de Hausdorff entre les fronts pour l’algorithme Fast Marching. Avec Z. Rao (dont je co-encadre la thèse), nous nous intéressons au cas  $c = c(x, t) > 0$  où aucune

estimation d'erreur n'est connue. L'idée principale est d'utiliser la monotonie du schéma (montré dans [For09]) pour faire une preuve à la Crandall-Lions mais plus géométrique (c'est à dire sur des ensembles plutôt que sur des fonctions).

Enfin il serait intéressant d'étudier la généralisation de la méthode à des maillages non structurés, à des équations plus générales de mouvements de fronts (autre que l'équation eikonale, par exemple des équations anisotropes), ou encore au mouvement par courbure moyenne (en utilisant par exemple les travaux [DLFM08] et [For08b] qui donnent une façon d'obtenir une approximation de la courbure moyenne de manière localisée). Ce dernier point serait en particulier intéressant pour les méthodes de segmentation d'image qui utilisent un terme de courbure moyenne afin de régulariser le front.

# Publications de l'auteur

- [BFZ] O. Bokanowski, N. Forcadel, and H. Zidani. Value function characterisations for some deterministic state constraint optimal control problems without controllability assumptions. To appear in ESAIM :COCV.
- [BFZ10a] O. Bokanowski, N. Forcadel, and H. Zidani.  $L^1$ -error estimates for numerical approximations of Hamilton-Jacobi-Bellman equations in dimension 1. *Math. Comp.*, 79(271) :1395–1426, 2010.
- [BFZ10b] O. Bokanowski, N. Forcadel, and H. Zidani. Reachability and minimal times for state constrained nonlinear problems without any controllability assumption. *SIAM J. Control Optim.*, 48(7) :4292–4316, 2010.
- [CCF06] E. Carlini, E. Cristiani, and N. Forcadel. A non-monotone fast marching scheme for a hamilton-jacobi equation modeling dislocation dynamics. in A. Bermudez de Castro, D. Gomez, P. Quintela, P. Salgado (Eds.), "Numerical Mathematics and Advanced Applications - ENUMATH2005", Springer, pages 724–731, 2006.
- [CDLFM07] P. Cardaliaguet, F. Da Lio, N. Forcadel, and R. Monneau. Dislocation dynamics : a non-local moving boundary. In *Free boundary problems*, volume 154 of *Internat. Ser. Numer. Math.*, pages 125–135. Birkhäuser, Basel, 2007.
- [CFFM08] E. Carlini, M. Falcone, N. Forcadel, and R. Monneau. Convergence of a generalized fast-marching method for an eikonal equation with a velocity-changing sign. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(6) :2920–2952, 2008.
- [CFM] E. Carlini, N. Forcadel, and R. Monneau. Generalized fast marching method for dislocation dynamics. To appear in SIAM Journal on numerical analysis.
- [DLFM08] F. Da Lio, N. Forcadel, and R. Monneau. Convergence of a non-local eikonal equation to anisotropic mean curvature motion. Application to dislocation dynamics. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 10(4) :1061–1104, 2008.
- [EHF08] A. El Hajj and N. Forcadel. A convergent scheme for a non-local coupled system modelling dislocations densities dynamics. *Math. Comp.*, 77(262) :789–812, 2008.
- [FIMa] N. Forcadel, C. Imbert, and R. Monneau. Work in preparation.
- [FIMb] N. Forcadel, C. Imbert, and R. Monneau. Homogenization of overdamped frenkel-kontorova models with n types of particles. To appear in Transaction of the AMS.

- [FIMc] N. Forcadel, C. Imbert, and R. Monneau. Uniqueness and existence of spirals moving by forced mean curvature motion. Preprint.
- [FIMd] Nicolas Forcadel, Cyril Imbert, and Régis Monneau. Viscosity solutions for particle systems and homogenization of dislocation dynamics. Alvino, Angelo (ed.) et al., On the notions of solution to nonlinear elliptic problems : results and developments. Caserta : Dipartimento di Matematica, Seconda Università di Napoli ; Rome : Aracne. *Quaderni di Matematica* 23, 230-253 (2008).
- [FIM07] N. Forcadel, C. Imbert, and R. Monneau. Recent results on dislocations dynamics and homogenization. *PAMM*, 7(1) :1040203–1040204, 2007.
- [FIM09a] N. Forcadel, C. Imbert, and R. Monneau. Homogenization of fully overdamped Frenkel-Kontorova models. *J. Differential Equations*, 246(3) :1057–1097, 2009.
- [FIM09b] N. Forcadel, C. Imbert, and R. Monneau. Homogenization of some particle systems with two-body interactions and of the dislocation dynamics. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 23(3) :785–826, 2009.
- [FLG] N. Forcadel and C. Le Guyader. A short time existence/uniqueness result for a nonlocal topology-preserving segmentation model. Preprint.
- [FLGG08] N. Forcadel, C. Le Guyader, and C. Gout. Generalized fast marching method : applications to image segmentation. *Numer. Algorithms*, 48(1-3) :189–211, 2008.
- [FM09a] N. Forcadel and R. Monneau. Existence of solutions for a model describing the dynamics of junctions between dislocations. *SIAM J. Math. Anal.*, 40(6) :2517–2535, 2009.
- [FM09b] N. Forcadel and A. Monteillet. Minimizing movements for dislocation dynamics with a mean curvature term. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 15(1) :214–244, 2009.
- [For07] N. Forcadel. *Contribution à l'analyse d'équations aux dérivées partielles décrivant le mouvement de fronts avec applications à la dynamique des dislocations*. PhD thesis, Ecole des Ponts et Chaussées, 2007.
- [For08a] N. Forcadel. Dislocation dynamics with a mean curvature term : short time existence and uniqueness. *Differential Integral Equations*, 21(3-4) :285–304, 2008.
- [For08b] N. Forcadel. An error estimate for a new scheme for mean curvature motion. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(5) :2715–2741, 2008.
- [For09] N. Forcadel. Comparison principle for a generalized fast marching method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(3) :1923–1951, 2009.
- [FRZa] N. Forcadel, Z. Rao, and H. Zidani. Work in preparation.
- [FRZb] N. Forcadel, Z. Rao, and H. Zidani. Optimal control problems of by trajectories with pointwise state constraints. Preprint.

# Bibliographie Générale

- [1] F. ALMGREN, J. E. TAYLOR, AND L. WANG, *Curvature-driven flows : a variational approach*, SIAM J. Control Optim., 31 (1993), pp. 387–438.
- [2] O. ALVAREZ AND M. BARDI, *Viscosity solutions methods for singular perturbations in deterministic and stochastic control*, SIAM J. Control Optim., 40 (2001/02), pp. 1159–1188 (electronic).
- [3] ———, *Singular perturbations of nonlinear degenerate parabolic PDEs : a general convergence result*, Arch. Ration. Mech. Anal., 170 (2003), pp. 17–61.
- [4] O. ALVAREZ, P. CARDALIAGUET, AND R. MONNEAU, *Existence and uniqueness for dislocation dynamics with nonnegative velocity*, Interfaces and Free Boundaries, 7 (2005), pp. 415–434.
- [5] O. ALVAREZ, E. CARLINI, R. MONNEAU, AND E. ROUY, *Convergence of a first order scheme for a non local eikonal equation*, IMACS Journal "Applied Numerical Mathematics", 56 (2006), pp. 1136–1146.
- [6] ———, *A convergent scheme for a nonlocal hamilton-jacobi equation, modeling dislocation dynamics*, Numerische Mathematik, 104 (2006), pp. 413–572.
- [7] O. ALVAREZ, P. HOCH, Y. LE BOUAR, AND R. MONNEAU, *Dislocation dynamics : short time existence and uniqueness of the solution*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 85 (2006), pp. 371–414.
- [8] L. AMBROSIO, *Minimizing movements*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5), 19 (1995), pp. 191–246.
- [9] L. AMBROSIO, *Geometric evolution problems, distance function and viscosity solutions*, in Calculus of variations and partial differential equations (Pisa, 1996), Springer, Berlin, 2000, pp. 5–93.
- [10] C. BAESENS AND R. S. MACKAY, *A novel preserved partial order for cooperative networks of units with overdamped second order dynamics, and application to tilted Frenkel-Kontorova chains*, Nonlinearity, 17 (2004), pp. 567–580.
- [11] M. BARDI AND I. CAPUZZO-DOLCETTA, *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Systems & Control : Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997. With appendices by Maurizio Falcone and Pierpaolo Soravia.

- [12] M. BARDI, P. GOATIN, AND H. ISHII, *A Dirichlet type problem for nonlinear degenerate elliptic equations arising in time-optimal stochastic control*, Adv. Math. Sci. Appl., 10 (2000), pp. 329–352.
- [13] G. BARLES, *Discontinuous viscosity solutions of first-order Hamilton-Jacobi equations : a guided visit*, Nonlinear Anal., 20 (1993), pp. 1123–1134.
- [14] ———, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, vol. 17 of Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], Springer-Verlag, Paris, 1994.
- [15] ———, *Solutions de viscosité et équations elliptiques du deuxième ordre*, Cours de DEA, (1997).
- [16] ———, *A new stability result for viscosity solutions of nonlinear parabolic equations with weak convergence in time*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 343 (2006), pp. 173–178.
- [17] ———, *Some homogenization results for non-coercive hamilton-jacobi equations*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 30 (2007), pp. 449–466.
- [18] G. BARLES, S. BITON, M. BOURGOING, AND O. LEY, *Uniqueness results for quasi-linear parabolic equations through viscosity solutions' methods*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 18 (2003), pp. 159–179.
- [19] G. BARLES, P. CARDALIAGUET, O. LEY, AND R. MONNEAU, *Global existence results and uniqueness for dislocation equations*, SIAM J. Math. Anal., 40 (2008), pp. 44–69.
- [20] G. BARLES, P. CARDALIAGUET, O. LEY, AND A. MONTEILLET, *Existence of weak solutions for general nonlocal and nonlinear second-order parabolic equations*, Nonlinear Anal., 71 (2009), pp. 2801–2810.
- [21] ———, *Uniqueness results for nonlocal Hamilton-Jacobi equations*, J. Funct. Anal., 257 (2009), pp. 1261–1287.
- [22] G. BARLES AND C. GEORGELIN, *A simple proof of convergence for an approximation scheme for computing motions by mean curvature*, SIAM J. Numer. Anal., 32 (1995), pp. 484–500.
- [23] G. BARLES AND O. LEY, *Nonlocal first-order Hamilton-Jacobi equations modelling dislocations dynamics*, Comm. Partial Differential Equations, 31 (2006), pp. 1191–1208.
- [24] G. BARLES AND B. PERTHAME, *Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems*, RAIRO M2AN, 21 (1987), pp. 557–579.
- [25] ———, *Exit time problems in optimal control and vanishing viscosity method*, SIAM J. Control Optim., 26 (1988), pp. 1133–1148.
- [26] ———, *Comparaison principe for Dirichlet-type Hamilton-Jacobi equations and singular perturbations of degenerated elliptic equations*, Appl. Math. Optim, 21 (1990), pp. 21–44.
- [27] G. BARLES, H. M. SONER, AND P. E. SOUGANIDIS, *Front propagation and phase field theory*, SIAM J. Control Optim., 31 (1993), pp. 439–469.
- [28] G. BARLES AND P. E. SOUGANIDIS, *Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations*, Asymptotic Anal., 4 (1991), pp. 271–283.

- [29] D. M. BARNETT AND S. D. GAVAZZA, *The self-force on a planar dislocation loop in an anisotropic linear-elastic medium*, *Phy. stat. sol. (a)*, 38 (1976), p. 637.
- [30] E. N. BARRON AND H. ISHII, *The Bellman equation for minimizing the maximum cost*, *Nonlinear Nanalysis T.M.A*, 13 (1989), pp. 1067–1090.
- [31] E. N. BARRON AND R. JENSEN, *Semicontinuous viscosity solutions for Hamilton-Jacobi equations with convex Hamiltonians*, *Comm. Partial Differential Equations*, 15 (1990), pp. 1713–1742.
- [32] ———, *Optimal control and semicontinuous viscosity solutions*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 113 (1991), pp. 397–402.
- [33] A. BLANC, *Deterministic exit time problems with discontinuous exit cost*, *SIAM J. Control Optim.*, 35 (1997), pp. 399–434.
- [34] A.-P. BLANC, *Comparison principle for the Cauchy problem for Hamilton-Jacobi equations with discontinuous data*, *Nonlinear Anal.*, 45 (2001), pp. 1015–1037.
- [35] L. BOCCARDO, F. MURAT, AND J.-P. PUEL, *Existence de solutions faibles pour des équations elliptiques quasi-linéaires à croissance quadratique*, in *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. IV (Paris, 1981/1982)*, vol. 84 of *Res. Notes in Math.*, Pitman, Boston, Mass., 1983, pp. 19–73.
- [36] ———, *Résultats d'existence pour certains problèmes elliptiques quasilineaires*, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 11 (1984), pp. 213–235.
- [37] ———, *Existence results for some quasilinear parabolic equations*, *Nonlinear Anal.*, 13 (1989), pp. 373–392.
- [38] O. BOKANOWSKI AND H. ZIDANI, *Anti-diffusive schemes for linear advection and application to Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, *J. Sci. Computing*, 30 (2007), pp. 1–33.
- [39] W. BOLLMANN. *Phys. Rev.*, 103, (1956), pp 1588-1589.
- [40] A. BONNET, *On the regularity of the edge set of Mumford-Shah minimizers*, in *Variational methods for discontinuous structures (Como, 1994)*, vol. 25 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, Birkhäuser, Basel, 1996, pp. 93–103.
- [41] M. BOURGOING, *Viscosity solutions of fully nonlinear second order parabolic equations with  $L^1$  dependence in time and Neumann boundary conditions*, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 21 (2008), pp. 763–800.
- [42] ———, *Viscosity solutions of fully nonlinear second order parabolic equations with  $L^1$  dependence in time and Neumann boundary conditions. Existence and applications to the level-set approach*, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 21 (2008), pp. 1047–1069.
- [43] A. BRIANI AND H. ZIDANI, *Characterisation of the value function of final state constrained control problems with bv trajectories*. Preprint.
- [44] L. BRONSARD AND F. REITICH, *On three-phase boundary motion and the singular limit of a vector-valued Ginzburg-Landau equation*, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 124 (1993), pp. 355–379.

- [45] L. BROWN, *The self-stress of dislocations and the shape of extended nodes*, Phil. Mag., 10 (1964), p. 441.
- [46] W. K. BURTON, N. CABRERA, AND F. C. FRANK, *The growth of crystals and the equilibrium structure of their surfaces*, Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A., 243 (1951), pp. 299–358.
- [47] M. CANNONE, A. EL HAJJ, R. MONNEAU, AND F. RIBAUD, *Global existence for a system of non-linear and non-local transport equations describing the dynamics of dislocation densities*, Arch. Ration. Mech. Anal., 196 (2010), pp. 71–96.
- [48] I. CAPUZZO-DOLCETTA AND P.-L. LIONS, *Hamilton-Jacobi equations with state constraints*, Trans. Amer. Math. Soc., 318 (1990), pp. 643–683.
- [49] P. CARDALIAGUET AND C. MARCHI, *Regularity of the eikonal equation with Neumann boundary conditions in the plane : application to fronts with nonlocal terms*, SIAM J. Control Optim., 45 (2006), pp. 1017–1038 (electronic).
- [50] P. CARDALIAGUET AND D. PASQUIGNON, *On the approximation of front propagation problems with nonlocal terms*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., 35 (2001), pp. 437–462.
- [51] P. CARDALIAGUET, M. QUINCAMPOIX, AND P. SAINT-PIERRE, *Optimal times for constrained nonlinear control problems without local controllability*, Appl. Math. Optim, 36 (1997), pp. 21–42.
- [52] ———, *Numerical schemes for discontinuous value function of optimal control*, Set-Valued analysis, 8 (2000), pp. 111–126.
- [53] A. CHAMBOLLE AND M. NOVAGA, *Approximation of the anisotropic mean curvature flow*, Math. Models Methods Appl. Sci., 17 (2007), pp. 833–844.
- [54] T. F. CHAN AND L. A. VESE, *Active contour and segmentation models using geometric PDE's for medical imaging*, in Geometric methods in bio-medical image processing, Math. Vis., Springer, Berlin, 2002, pp. 63–75.
- [55] Y. G. CHEN, Y. GIGA, AND S. GOTO, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, J. Differential Geom., 33 (1991), pp. 749–786.
- [56] D. CHOPP, *Handbook of Biomedical Image Analysis, chapter Recent Advances in the Level Set Method*, vol. 1, Kluwer Academic, 2005.
- [57] D. L. CHOPP, *Another look at velocity extensions in the level set method*, SIAM J. Sci. Comput., 31 (2009), pp. 3255–3273.
- [58] K.-S. CHOU AND Y.-C. KWONG, *On quasilinear parabolic equations which admit global solutions for initial data with unrestricted growth*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 12 (2001), pp. 281–315.
- [59] M. G. CRANDALL, H. ISHII, AND P.-L. LIONS, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 27 (1992), pp. 1–67.
- [60] M. G. CRANDALL AND P.-L. LIONS, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 277 (1983), pp. 1–42.

- 
- [61] M. G. CRANDALL AND P.-L. LIONS, *Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Math. Comp., 43 (1984), pp. 1–19.
- [62] ———, *Convergent difference schemes for nonlinear parabolic equations and mean curvature motion*, Numer. Math., 75 (1996), pp. 17–41.
- [63] E. CRISTIANI AND M. FALCONE, *Fast semi-Lagrangian schemes for the eikonal equation and applications*, SIAM J. Numer. Anal., 45 (2007), pp. 1979–2011 (electronic).
- [64] F. DA LIO, C. I. KIM, AND D. SLEPČEV, *Nonlocal front propagation problems in bounded domains with Neumann-type boundary conditions and applications*, Asymptot. Anal., 37 (2004), pp. 257–292.
- [65] G. DAL MASO AND F. RAMPAZZO, *On systems of ordinary differential equations with measures as controls*, Differential Integral Equations, 4 (1991), pp. 739–765.
- [66] A. EL HAJJ, *Global existence and uniqueness for a non-conservative burgers type system describing the dynamics of dislocations densities*. To appear in SIAM Journal on Mathematical Analysis.
- [67] H. ENGLER AND S. M. LENHART, *Viscosity solutions for weakly coupled systems of Hamilton-Jacobi equations*, Proc. London Math. Soc. (3), 63 (1991), pp. 212–240.
- [68] L. C. EVANS, *The perturbed test function method for viscosity solutions of nonlinear PDE*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 111 (1989), pp. 359–375.
- [69] ———, *Periodic homogenisation of certain fully nonlinear partial differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 120 (1992), pp. 245–265.
- [70] ———, *Convergence of an algorithm for mean curvature motion*, Indiana Univ. Math. J., 42 (1993), pp. 533–557.
- [71] ———, *Regularity for fully nonlinear elliptic equations and motion by mean curvature*, in Viscosity solutions and applications (Montecatini Terme, 1995), vol. 1660 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1997, pp. 98–133.
- [72] L. C. EVANS AND J. SPRUCK, *Motion of level sets by mean curvature. I*, J. Differential Geom., 33 (1991), pp. 635–681.
- [73] ———, *Motion of level sets by mean curvature. II*, Trans. Amer. Math. Soc., 330 (1992), pp. 321–332.
- [74] M. FALCONE, *The minimum time problem and its applications to front propagation*, in Motion by mean curvature and related topics (Trento, 1992), de Gruyter, Berlin, 1994, pp. 70–88.
- [75] M. FALCONE, T. GIORGI, AND P. LORETI, *Level sets of viscosity solutions : some applications to fronts and rendez-vous problems*, SIAM J. Applied Mathematics, 54 (1994), pp. 1335–1354.
- [76] H. FRANKOWSKA, *Lower semicontinuous solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, SIAM J. Control Optim., 31 (1993), pp. 257–272.
- [77] H. FRANKOWSKA AND S. PLASKACZ, *Semicontinuous solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations with degenerate state constraints*, J. Math. Anal. Appl., 251 (2000), pp. 818–838.
-

- [78] H. FRANKOWSKA AND R. B. VINTER, *Existence of neighboring feasible trajectories : applications to dynamic programming for state-constrained optimal control problems*, J. Optim. Theory Appl., 104 (2000), pp. 21–40.
- [79] A. GARRONI. Personal communications.
- [80] A. GARRONI AND S. MÜLLER,  *$\gamma$ -limit of a phase-field model of dislocations*, preprint, (2004).
- [81] —, *A variational model for dislocations in the line tension limit*, preprint, (2004).
- [82] A. GHORBEL, *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, (2007).
- [83] A. GHORBEL, P. HOCH, AND R. MONNEAU, *A numerical study for the homogenization of one-dimensional models describing the motion of dislocations*. Preprint.
- [84] Y. GIGA, *Surface evolution equations*, vol. 99 of Monographs in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006. A level set approach.
- [85] Y. GIGA AND S. GOTO, *Geometric evolution of phase-boundaries*, in On the evolution of phase boundaries (Minneapolis, MN, 1990–91), vol. 43 of IMA Vol. Math. Appl., Springer, New York, 1992, pp. 51–65.
- [86] Y. GIGA, N. ISHIMURA, AND Y. KOHSAKA, *Spiral solutions for a weakly anisotropic curvature flow equation*, Adv. Math. Sci. Appl., 12 (2002), pp. 393–408.
- [87] E. GODLEWSKI AND P.-A. RAVIART, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, SMAI, Ellipses, 1991.
- [88] I. GROMA AND P. BALOGH, *Investigation of dislocation pattern formation in a two-dimensional self-consistent field approximation*, Acta mater, 47 (1999), pp. 3647–3654.
- [89] P. HIRSCH, R. HORNE, AND M. WHELAN. Phil. Mag., 8(1), (1956), pp 677-684.
- [90] J. P. HIRTH AND J. LOTHE, *Theory of dislocations, Second edition*, Krieger, Malabar, Florida, 1992.
- [91] B. HU, W.-X. QIN, AND Z. ZHENG, *Rotation number of the overdamped Frenkel-Kontorova model with ac-driving*, Phys. D, 208 (2005), pp. 172–190.
- [92] D. HULL AND D. BACON, *Introduction to dislocations, 4th ed.*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2001.
- [93] C. IMBERT AND R. MONNEAU, *Homogenization of first-order equations with  $(u/\epsilon)$ -periodic Hamiltonians. I. Local equations*, Arch. Ration. Mech. Anal., 187 (2008), pp. 49–89.
- [94] C. IMBERT, R. MONNEAU, AND E. ROUY, *Homogenization of first order equations with  $(u/\epsilon)$ -periodic Hamiltonians. II. Application to dislocations dynamics*, Comm. Partial Differential Equations, 33 (2008), pp. 479–516.
- [95] H. ISHII, *Hamilton-Jacobi equations with discontinuous Hamiltonians on arbitrary open sets*, Bull. Fac. Sci. Engrg. Chuo Univ., 28 (1985), pp. 33–77.
- [96] —, *Perron’s method for Hamilton-Jacobi equations*, Duke Math. J., 55 (1987), pp. 369–384.
- [97] —, *Perron’s method for monotone systems of second-order elliptic partial differential equations*, Differential Integral Equations, 5 (1992), pp. 1–24.

- [98] ———, *A generalization of the Bence, Merriman and Osher algorithm for motion by mean curvature*, in *Curvature flows and related topics* (Levico, 1994), vol. 5 of GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., Gakkōtoshō, Tokyo, 1995, pp. 111–127.
- [99] H. ISHII AND S. KOIKE, *Viscosity solutions for monotone systems of second-order elliptic PDEs*, *Comm. Partial Differential Equations*, 16 (1991), pp. 1095–1128.
- [100] ———, *Viscosity solutions of a system of nonlinear second-order elliptic PDEs arising in switching games*, *Funkcial. Ekvac.*, 34 (1991), pp. 143–155.
- [101] ———, *A new formulation of state constraint problems for first-order PDEs*, *SIAM J. Control Optim.*, 34 (1996), pp. 554–571.
- [102] H. ISHII, G. E. PIRES, AND P. E. SOUGANIDIS, *Threshold dynamics type approximation schemes for propagating fronts*, *J. Math. Soc. Japan*, 51 (1999), pp. 267–308.
- [103] A. KARMA AND M. PLAPP, *Spiral surface growth without desorption*, *Physical Review Letters*, 81 (1998), pp. 4444–4447. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.4444>.
- [104] M. KOSŁOWSKI AND M. ORTIZ, *A multi-phase field model of planar dislocation networks*, *Modelling Simul. mter. sci. eng.*, 12 (2004), pp. 1087–1097.
- [105] A. KURZHANSKI, I. M. MITCHELL, AND P. VARAIYA, *Optimization technics for state constrained control and obstacle problems*, *Journal of Optimization, Theory and Applications*, 128 (2006), pp. 499–521.
- [106] A. KURZHANSKI AND P. VARAIYA, *Ellipsoidal techniques for reachability under state constraints*, *SIAM J. Control Optim.*, 45 (2006), pp. 1369–1394.
- [107] R. LARDNER, *Mathematical Theory of Dislocations and Fracture*, University of Toronto Press, Toronto and Buffalo, 1974.
- [108] S. M. LENHART, *Viscosity solutions for weakly coupled systems of first-order partial differential equations*, *J. Math. Anal. Appl.*, 131 (1988), pp. 180–193.
- [109] S. M. LENHART AND S. A. BELBAS, *A system of nonlinear partial differential equations arising in the optimal control of stochastic systems with switching costs*, *SIAM J. Appl. Math.*, 43 (1983), pp. 465–475.
- [110] S. M. LENHART AND N. YAMADA, *Viscosity solutions associated with switching game for piecewise-deterministic processes*, *Stochastics Stochastics Rep.*, 38 (1992), pp. 27–47.
- [111] P.-L. LIONS, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, vol. 69 of *Research Notes in Mathematics*, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass., 1982.
- [112] P.-L. LIONS, G. C. PAPANICOLAOU, AND S. R. S. VARADHAN, *Homogenization of Hamilton-Jacobi equations*, unpublished, 1986.
- [113] P.-L. LIONS AND P. E. SOUGANIDIS, *Stochastic homogenization of Hamilton-Jacobi and “viscous”-Hamilton-Jacobi equations with convex nonlinearities—revisited*, *Commun. Math. Sci.*, 8 (2010), pp. 627–637.
- [114] A. LUNARDI, *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*, *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, 16, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

- [115] J. LYGEROS, *On reachability and minimum cost optimal control*, Automatica, 40 (2004), pp. 917–927.
- [116] J. LYGEROS, C. TOMLIN, AND S. SASTRY, *Controllers for reachability specifications for hybrid systems*, Automatica, 35 (1999), pp. 349–370.
- [117] Y. MAEKAWA, *On a free boundary problem for viscous incompressible flows*, Interfaces Free Bound., 9 (2007), pp. 549–589.
- [118] B. MERRIMAN, J. BENCE, AND S. OSHER, *Diffusion generated motion by mean curvature*, in : J. Taylor (Ed.), Proceedings of the Computational Crystal Growers Workshop, AMS, Providence, RI, (1992), pp. 73–83.
- [119] I. MITCHELL, A. BAYEN, AND C. TOMLIN, *A time-dependent Hamilton-Jacobi formulation of reachable sets for continuous dynamic games*, IEEE Transactions on automatic control, 50 (2005), pp. 947–957.
- [120] M. MOTTA, *On nonlinear optimal control problems with state constraints*, SIAM J. Control Optim., 33 (1995), pp. 1411–1424.
- [121] D. NUNZIANTE, *Uniqueness of viscosity solutions of fully nonlinear second order parabolic equations with discontinuous time-dependence*, Differential Integral Equations, 3 (1990), pp. 77–91.
- [122] ———, *Existence and uniqueness of unbounded viscosity solutions of parabolic equations with discontinuous time-dependence*, Nonlinear Anal., 18 (1992), pp. 1033–1062.
- [123] A. M. OBERMAN, *A convergent monotone difference scheme for motion of level sets by mean curvature*, Numer. Math., 99 (2004), pp. 365–379.
- [124] T. OGIWARA AND K.-I. NAKAMURA, *Spiral traveling wave solutions of some parabolic equations on annuli*, in NLA99 : Computer algebra (Saitama, 1999), vol. 2 of Josai Math. Monogr., Josai Univ., Sakado, 2000, pp. 15–34.
- [125] ———, *Spiral traveling wave solutions of nonlinear diffusion equations related to a model of spiral crystal growth*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 39 (2003), pp. 767–783.
- [126] T. OHTSUKA, *A level set method for spiral crystal growth*, Adv. Math. Sci. Appl., 13 (2003), pp. 225–248.
- [127] E. OROWAN. Z. Phys, 89, (1934), pp 605, 614, 634.
- [128] S. OSHER AND N. PARAGIOS, eds., *Geometric level set methods in imaging, vision, and graphics*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [129] S. OSHER AND J. A. SETHIAN, *Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*, J. Comput. Phys., 79 (1988), pp. 12–49.
- [130] S. OSHER AND C.-W. SHU, *High essentially nonoscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equations*, SIAM J. Numer. Anal., 28 (1991), pp. 907–922.
- [131] M. POLANYI. Z. Phys, 89, (1934), p. 660.
- [132] M. QUINCAMPOIX AND O. SEREA, *A viability approach for optimal control with infimum cost*, Annals. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi,s.I a, Mat, XLVIII (2002), pp. 113–132.

- [133] E. ROUY AND A. TOURIN, *A viscosity solutions approach to shape-from-shading*, SIAM J. Numer. Anal., 29 (1992), pp. 867–884.
- [134] P. SAINT-PIERRE, *Approximation of the viability kernel*, Appl. Math. Optim, 29 (1994), pp. 187–2009.
- [135] J. A. SETHIAN, *A fast marching level set method for monotonically advancing fronts*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 93 (1996), pp. 1591–1595.
- [136] ———, *Level set methods and fast marching methods*, vol. 3 of Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, second ed., 1999. Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science.
- [137] D. SLEPČEV, *Approximation schemes for propagation of fronts with nonlocal velocities and Neumann boundary conditions*, Nonlinear Anal., 52 (2003), pp. 79–115.
- [138] P. SMERKA, *Spiral crystal growth*, Phys. D, 138 (2000), pp. 282–301.
- [139] H. M. SONER, *Optimal control with state-space constraint. I*, SIAM J. Control Optim., 24 (1986), pp. 552–561.
- [140] ———, *Optimal control with state-space constraint. II*, SIAM J. Control Optim., 24 (1986), pp. 1110–1122.
- [141] P. SORAVIA, *Optimality principles and representation formulas for viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. II. Equations of control problems with state constraints*, Differential Integral Equations, 12 (1999), pp. 275–293.
- [142] P. SORAVIA AND P. E. SOUGANIDIS, *Phase-field theory for FitzHugh-Nagumo-type systems*, SIAM J. Math. Anal., 27 (1996), pp. 1341–1359.
- [143] P. E. SOUGANIDIS, *Front propagation : theory and applications*, in Viscosity solutions and applications (Montecatini Terme, 1995), vol. 1660 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1997, pp. 186–242.
- [144] G. TAYLOR. Proc. R. Soc. A, 145, (1934), pp 362-.
- [145] J. E. TAYLOR, *The motion of multiple-phase junctions under prescribed phase-boundary velocities*, J. Differential Equations, 119 (1995), pp. 109–136.
- [146] ———, *A variational approach to crystalline triple-junction motion*, J. Statist. Phys., 95 (1999), pp. 1221–1244.
- [147] J. N. TSITSIKLIS, *Efficient algorithms for globally optimal trajectories*, IEEE Trans. Automat. Control, 40 (1995), pp. 1528–1538.
- [148] A. VLADIMIRSKY, *Static pdes for time-dependent control problems*, Interfaces and Free Boundaries, 8 (2006), pp. 281–300.
- [149] N. YAMADA, *Viscosity solutions for a system of elliptic inequalities with bilateral obstacles*, Funkcial. Ekvac., 30 (1987), pp. 417–425.