INSA Département GM : TP méthodes numériques pour les EDO

Dans ce TP, on se propose d'étudier et de mettre en oeuvre plusieurs méthodes pour résoudre des EDO. Plus particulièrement, on s'intéressera aux EDO liées à la mécanique céleste et au problème à N-corps. On rappelle qu'entre deux corps de masse m_1 et m_2, la force d'attraction gravitationnelle est :

$$\underline{F}_{12} = \frac{-Gm_1m_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}^3}\begin{bmatrix} x_1-x_2 \\ y_1-y_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12}$$

où (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont les positions des objets 1 et 2. Dans le TP, pour simplifier, on prendra la constante gravitationnelle $G = 1$.

Vous rendrez à la fin de la séance de TP vos codes, puis pour une semaine plus tard, vous m'enverrez par mail **vos codes et votre rapport au format pdf**.

Problème à 2-corps

Considérons le cas de deux objets. On supposera le référentiel placé sur le deuxième, i.e. $(x_2, y_2) = (0, 0)$. La 2-ème loi de Newton nous apprend que la dynamique, c'est à dire le mouvement, du corps 1 est régit par l'EDO suivante :

$$m_1 \begin{bmatrix} x_1''(t) \\ y_1''(t) \end{bmatrix} = \frac{-m_1m_2}{\left(\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right)^3}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

On prendra dans la suite $m_2 = 1$.

(Théorie)

1. a) Rappeler l'équation paramétrique d'un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 et déduire une trajectoire solution de (1).

   b) En introduisant le vecteur $p(t) = [x(t)\ y(t)\ x'(t)\ y'(t)]$, réécrire (1) sous la forme $p'(t) = f(t, p(t))$. Avec la question précédente, déduire un vecteur initial p_0 pour lequel on connait la solution exacte du système différentiel.

   c) Est-on assuré de l'existence et de l'unicité d'une solution pour notre système d'EDO ? Justifier !

2. Considérons la méthode de RK (appelée *θ-schéma*) donnée par le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|c} \theta & \theta \\ \hline & 1 \end{array} \quad \text{où} \quad \theta \in [0, 1] \tag{2}$$

   a) À quelle méthode correspond le *θ-schéma* pour $\theta = 0$ et $\theta = 1$? Justifier !

   b) Déterminer la valeur de θ assurant l'ordre maximal pour la méthode. Cette méthode est-elle explicite ou implicite ? Dans le cas où la méthode est implicite, expliquer comment calculer p_{n+1}.

3. Considérons maintenant la méthode à 2-pas (appelée *méthode de Nyström*) :

$$p_{n+1} = p_{n-1} + 2\Delta t\ f(t_n, p_n)$$

   Déterminer l'ordre théorique de cette méthode.

(Code)

1. Pour $\theta = 0$:

   a) Compléter dans le fichier *algo.py* la fonction $f(t, p, Mp)$ correspondant à la fonction f obtenue à la question 1.b) de la partie **Théorique**.

   b) Compléter ensuite dans le même fichier la fonction *thetaSch* implémentant le θ-schéma pour le cas $\theta = 0$.

   c) Dans la partie I du fichier *main.py*, modifier le *vecteur initial* p_0 pour obtenir une trajectoire (en théorie) circulaire. Tester la méthode en utilisant le choix 1 ("Visualisation d'une planète") avec les paramètres $T = 4\pi$ et $dt = 0.1, 0.01$ puis $dt = 0.001$. Commenter.

   d) De même, dans la partie III du fichier *main.py*, modifier le *vecteur initial* p_0 pour obtenir une trajectoire (en théorie) circulaire et compléter la partie sur le calcul de la solution exacte. Tester le programme avec le choix 3 ("Analyse de convergence"). Retrouver à l'aide de la courbe obtenue l'ordre de convergence théorique.

2. Pour $\theta > 0$:

   a) Après avoir écrit l'*équation implicite* à résoudre pour implémenter le θ-schéma, déduire l'algorithme de Newton pour compléter la méthode *Newton* dans le fichier *algo.py*.

b) Compléter ensuite le cas $\theta > 0$ de la fonction *thetaSch*.

c) Comme précédemment pour les questions 1.c) et 1.d) ci-dessus, tester la méthode pour les mêmes paramètres T et dt. En particulier, retrouver l'ordre théorique de convergence pour le θ optimale obtenue dans la partie **Théorique**.

3. On se propose finalement d'implémenter la *méthode de Nyström*.

   a) Compléter la méthode *Nyström* dans le fichier *algo.py*. Tester la méthode comme précédemment. En particulier, retrouver l'ordre théorique de la méthode.

   b) Commenter et expliquer l'initialisation de la méthode *Nystrom*.

   c) Comparer la vitesse de calcul entre la méthode de *Nystrom* et le *θ-schéma* pour la valeur de θ assurant l'ordre le plus élevé. Pour cela, tester dans le cas 1 pour $dt = 0.002$ et $T = 6\pi$. Expliquer l'intérêt de la méthode de *Nyström* par rapport au *θ-schéma*.

   d) Changer maintenant le vecteur initial dans le cas 1 en prenant $p_0 = [1, 0, 0, 0, 0.2]$ et refaites les tests précédent. Essayer d'expliquer les résultats obtenus avec la méthode de *Nyström*.

Problème à 3-corps

Pour terminer ce TP, je vous invite ici à tester quelques extensions. On considère cette fois le cas de 3 objets avec comme précédemment un des objets servant de référentiel.

(Théorique)

1. En notant $(x_1(t), y_1(t))$ et $(x_2(t), y_2(t))$ les positions des corps 1 et 2, écrire le sytème d'EDO à l'ordre 2 (on a alors 4 équations à 4 inconnues).

2. Déduire le système 8×8 d'EDO à l'ordre 1.

(Code)

1. Pour les paramètres $dt = 0.001$, $T = 4\pi$ et :

$$\left| \begin{array}{lcl} p_0 & = & \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & x_2 & 0.5 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix} \\ M_p & = & \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

   et à l'aide du choix 2 ("Visualisation de deux planètes"), observer les simulations pour les différentes valeurs de $x_2 = \{-2.2,\ -2.1,\ -2.0\}$. Commenter. Les deux méthodes *θ-schéma* et *Nyström* donnent-elles des résultats similaires ?

2. **(Bonus)** Adapter le programme *main.py* pour traiter le problème à $N-$corps. Faire des tests avec 3 ou plus objets.

3. **(Bonus)** Implémenter et tester une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Quelques remarques de conclusion

Ce TP a pour but de vous présenter quelques unes des difficultés rencontrées lors des simulations de mouvements d'astres et planètes. Ces simulations ont diverses applications telles que le calcul des éphémérides (voir le site de l'IMCCE).

Au travers de ces simulations, on entrevoit aussi la complexité des trajectoires et la difficulté de prédire la mouvement de satellites et de sondes spatiales. On comprend ainsi (un peu mieux !) l'exploit réalisé lors de la mission ROSETTA-Philae !

Enfin, si vous êtes curieux d'en apprendre davantage sur l'utilisation des méthodes numériques pour les EDO et leurs applications aux problèmes de calculs de trajectoires, je vous invite à consulter ce document pdf.