INSA M5 TD 5 : Intégrales multiples et intégrales curvilignes

Exercice 1 (calculs d'aires) : Représenter les domaines suivant et calculer à l'aide d'intégrales leurs surfaces :

a) Ω est le triangle isocèle délimité par les points $\underline{a} = (-1, 0)$, $\underline{b} = (1, 0)$ et $\underline{c} = (0, 1)$.

b) $\Omega = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2,\ \ y \leq x \ \text{ et } \ y \geq x^2\}$

c) $\Omega = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2,\ \ 2x^2 + y^2 \leq 1\}$.
<u>Indication</u> : Reconnaître l'équation d'une ellipse et penser au changement de coordonnées $x(t) : t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t)$ pour calculer l'intégrale :

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 - 2x^2} dx$$

d) **(Bonus)** $\Omega = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2,\ \ |x| + |y| \geq 1 \ \text{ et } \ \max(|x|, |y|) \leq 2\}$.
<u>Indication</u> : Penser à décomposer en 2 domaines réguliers Ω_1 et Ω_2 vérifiant $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\text{Aire}(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 0$.

Exercice 2 (Fubini) : Vérifier le théorème de Fubini pour :

$$I = \iint_\Omega x^3 y dx dy$$

où $\Omega = \{\underline{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 3 (Fubini et continuité) : Considérons la fonction suivante :

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

qu'on cherche à intégrer sur le carré $[0, 1]^2$.

1) La fonction $f(x, y)$ est-elle continue en $(0, 0)$?

2) Après avoir calculé la dérivée partielle par rapport à x de

$$F_1(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)}$$

déduire :

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = -\frac{\pi}{4}$$

3) De même, après avoir calculé la dérivée partielle par rapport à y de

$$F_2(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)}$$

déduire :

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = \frac{\pi}{4}$$

Que conclure ?

Exercice 4 : On considère l'ellipse définie par :

$$\Omega = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2,\ \ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \leq 1\}$$

où $a > 0$ et $b > 0$.

1) À l'aide du changement de coordonnées $(\sqrt{a}\widetilde{x}, \sqrt{b}\widetilde{y}) = \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = (x, y)$, calculer l'aire de l'ellipse.

2) Calculer également :

$$\int\int_\Omega x dx dy \quad \text{et} \quad \int\int_\Omega y dx dy = 0$$

Interpréter les résultats.

Exercice 5 (chainette de Bernoulli) : On considère la courbe d'équation

$$y(x) : x \in [-1, 1] \to \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

À l'aide d'un parcours $\underline{x}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ et d'une fonction $f(x, y)$ bien choisis, calculer la longueur de la courbe $(x, y(x))$.
<u>Indication</u> : Penser à l'intégrale curviligne de f !

Exercice 6 (Travail d'une force) : Considérons la situation d'un bateau en mer qui va d'un point de départ $D = (0, 0)$ à un point d'arrivé $A = (1, 1)$ suivant 3 trajets possibles :

a) $\underline{\gamma}_1(t) = \begin{cases} (2t, 0) & \text{si} \quad t \in [0, 1/2] \\ (1, 2t-1) & \text{si} \quad t \in [1/2, 1] \end{cases}$

b) $\underline{\gamma}_2(t) = (t, t) \quad t \in [0, 1]$

c) $\underline{\gamma}_3(t) = \begin{cases} (0, 2t) & \text{si} \quad t \in [0, 1/2] \\ (2t-1, 1) & \text{si} \quad t \in [1/2, 1] \end{cases}$

On considère également deux situations de champs de force (modélisant le vent qui pousse le bateau supposé à voile...) qui sont représentés par les 1-formes suivantes :

$$\text{i)} \quad \omega^1_{\underline{x}} = dx + dy \qquad \text{ii)} \quad \omega^2_{\underline{x}} = -y dx + x dy$$

1) Commencer par représenter dans deux repères les deux champs de forces et les trajets du bateau.

2) Pour le premier champ de force $\omega^1_{\underline{x}}$, calculer le travail le long de chaque trajet. Qu'observez vous ?

3) Pour le second champ de force $\omega^2_{\underline{x}}$, calculer le travail le long de chaque trajet. Qu'observez vous ?

4) Les 1-formes proposées sont-elles exactes ?