INSA M5 TD 4 : Fonction de plusieurs variables (Partie 2)

Exercice 1 : Pour les fonctions :

$$\text{a)}\quad f(\underline{x}) = x^2 - y^2, \qquad\qquad \text{b)}\quad f(\underline{x}) = \cos(\pi x) y$$

1) Dessiner quelques lignes de niveau. Dessiner également en différents points le gradient des fonctions.
2) Déterminer le plan tangent à la surface $(\underline{x}, f(\underline{x}))$ en $(1, 1, f(1, 1))$.

Exercice 2 (équation cartésienne) : On considère l'équation dite *cartésienne*

$$2x^2 - y^2 + 2xz + z^2 = 1 \tag{1}$$

L'ensemble des points (x, y, z) vérifiant cette équation décrit une surface S dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'équation du plan tangent à S en $\underline{a} = (1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 3 (courbes de niveau) : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dont les courbes de niveau sont :

1) la famille de droites d'équation $y_\gamma = x + \gamma$,
2) des cercles concentriques centrés en $(0, 0)$,
3) **(Bonus)** des cercles concentriques centrés en $(0, 0)$ et la droite $y = x$.

Exercice 4 (Jacobien et changement de coordonnées) Soit $e(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$e(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Considérons également $\underline{\varphi}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction vectorielle définie par

$$\underline{\varphi}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = (a\widetilde{x}, b\widetilde{y})$$

1) Calculer de deux manières les dérivées partielles de $\widetilde{e}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = (e \circ \underline{\varphi})(\widetilde{x}, \widetilde{y})$.
2) a) Calculer le gradient de e en (a, b).
   b) Calculer le gradient de $\widetilde{e}$ en $(1, 1)$.
   c) Calculer la Jacobienne de $\underline{\varphi}$ en $(1, 1)$ et expliquer le lien avec les gradients calculés.

Exercice 5 (courbes de niveau et EDP) : Considérons un champ de vecteurs $\underline{v}(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y)) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et un point du plan $\underline{x}(t)$ "porté" par $\underline{v}$, c'est à dire que $\underline{x}'(t) = \underline{v}(\underline{x}(t))$.

1) Que vérifie chacune des composantes de $\underline{x}(t)$?
2) Montrer que $\underline{x}(t)$ décrit une courbe de niveau de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ solution de :

$$v_1(x, y)\, \partial_x f \quad + \quad v_2(x, y)\, \partial_y f = 0$$

3) Dans le cas $\underline{v}(x, y) = [1, c]$:
   a) Calculer $\underline{x}(t)$ et déduire la forme générale des solutions de l'EDP ci-dessus. Retrouver en particulier la solution de l'équation de transport.
   b) **(Bonus)** À l'aide du changement de coordonnées $u = y - cx$ et $v = y$ et du *théorème de la chaine*, résoudre l'EDP ci-dessus et retrouver le résultat.
4) Considérons maintenant le cas

$$\underline{v}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -\omega y - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \omega x - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{bmatrix}$$

   défini pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ où $\omega > 0$.
   a) Représenter le champ $\underline{v}$ en quelques points dans le plan (par exemple en prenant $\omega = 1$), et essayer d'en déduire intuitivement la trajectoire de $\underline{x}(t)$.
   b) À l'aide des coordonnées polaires, résoudre cette EDP et retrouver la trajectoire de $\underline{x}(t)$.
   Indication : Après le changement de coordonnées, penser à l'équation de transport.

Exercice 6 (Thm. de Schwarz) : Soit la fonction $f(x, y)$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1) Montrons que la fonction est C^1 sur $\mathbb{R}^2$:
   a) Commencer par calculer $\partial_x f$ pour $\underline{x} \neq \underline{0}$ et pour $\underline{x} = \underline{0}$. Déduire que $\partial_x f(x,y)$ est continue.
   b) Idem pour $\partial_y f$.
2) Calculer $\partial^2_{xy} f(0,0)$ et $\partial^2_{yx} f(0,0)$. Conclure.

Exercice 7 (Extrema) : Déterminer les extrema éventuels des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = xy$ b) $g(x,y) = \sin(x)\sin(y)$

(Bonus) : Pour $g(x,y)$, dessiner la courbe de niveau 0 et celle de niveau 1.

Exercice 8 (Optimisation) : Considérons un pavé de dimension $x \times y \times z$ (longueur, largeur, hauteur), où $(x,y,z) > 0$. On souhaite déterminer les dimensions assurant un *volume maximal* étant donnée une *surface* totale fixée. Formaliser et résoudre le problème.

Exercice 9 : On considère l'*équation des ondes* (ou de *d'Alembert*, 1717 - 1783) :

$$\partial^2_{tt} u(t,x) - c^2 \partial^2_{xx} u(t,x) = 0 \tag{2}$$

Dans cette équation, $u(t,x)$ représente la hauteur d'une corde qui oscille à l'instant t et au point x. Nous allons chercher à déterminer les solutions de cette EDP.

1) a) En considérant le changement de coordonnées $(X,Y) = (x+ct, x-ct)$ et à l'aide de la règle de la chaîne, calculer $\partial_t u$ et $\partial_x u$ en fonction de $\partial_X U$ et $\partial_Y U$ où $u(t,x) = U(X,Y)$.
   b) En déduire $\partial^2_{tt} u$ et $\partial^2_{xx} u$.
2) a) Déduire de la question précédente que $u(t,x)$ solution de (2) est équivalent à :

$$\partial^2_{XY} U(X,Y) = 0$$

   b) Résoudre l'EDP ci-dessus est montrer que :

$$u(t,x) = U(X,Y) = F(X) + G(Y) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

   où $F(X)$ et $G(Y)$ sont deux fonctions d'une variable arbitraire.
   c) **(Bonus)** Déterminer F et G pour que $u(t,x)$ soit solution du problème de Cauchy $u(0,x) = e^{-x^2}$ et $\partial_t u(0,x) = 0$. Interpréter.