INSA M5 TD 3 : Fonction de plusieurs variables (Partie 1)

Exercice 1 (Propriétés des normes) : Soit $N(\underline{x}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une norme. On notera par $B(\underline{0}, 1)$ la boule unité (fermée) associée.

1. a) Montrer que si $\underline{x} \in B(\underline{0}, 1)$, alors $-\underline{x} \in B(\underline{0}, 1)$.

   b) Montrer que si $\underline{x} \in B(\underline{0}, 1)$ et $\underline{y} \in B(\underline{0}, 1)$, alors pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda\underline{x} + (1-\lambda)\underline{y} \in B(\underline{0}, 1)$.
2. Supposons que les points $(0, 1/2)$ et $(2, 0)$ appartiennent à $B(\underline{0}, 1)$, déduire des résultats précédents la surface minimale que doit couvrir $B(\underline{0}, 1)$ (faire un dessin).

Exercice 2 : Déterminer et dessiner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(\underline{x}) = \ln(2x_1 + x_2 - 3)$ 2) $f(\underline{x}) = \sqrt{1 - x_1 x_2^2}$

3) $f(\underline{x}) = \sqrt{|x_1| + |x_2| - 1} + \ln(1 - x_1^2 - x_2^2)$ 4) $f(\underline{x}) = \ln(\sin(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}))$

Dire également si ces ensembles sont *ouverts*, *fermés* ou ni l'un ni l'autre.

Exercice 3 (Limites) : Étudier l'existence éventuelle de la limite en $(0, 0)$ des fonctions suivantes :

1) $f(\underline{x}) = \dfrac{(x_1 - x_2)x_2}{|x_1| + |x_2|}$ 2) $f(\underline{x}) = \dfrac{\sqrt{|x_1|}}{1 + \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}}$

3) $f(\underline{x}) = \dfrac{\sin^2(x_1 - x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$ 4) $f(\underline{x}) = \dfrac{x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^\alpha}$

Indications : On pourra utiliser des normes usuelles appropriées à certain cas. De plus, pour la dernière question, il faudra discuter selon les valeurs de $\alpha > 0$.

Exercice 4 : Après avoir montrer que $2|x_1 x_2| \leq x_1^2 + x_2^2$, déduire la limite en $(0, 0)$ de

$$1)\ f(\underline{x}) = \frac{(x_1 - \sin(x_1))x_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{et} \quad 2)\ f(\underline{x}) = \frac{3x_1^2 + x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

Exercice 5 (Dérivées partielles) : Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1) $f(\underline{x}) = e^{-x_1^2} \cos(x_1 + x_2)$ 2) $f(\underline{x}) = (x_1^2 + x_2^2)\cos(x_1 x_2)$

3) $f(\underline{x}) = \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ 4) $f(\underline{x}) = \arctan\left(\dfrac{x_1 + 2x_2}{2 - x_1 x_2}\right)$

Exercice 6 (Dérivées directionnelles) : On rappelle que la dérivée directionnelle d'une fonction f en $\underline{a}$ dans la direction $\underline{v}$ est définie par :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{a} + t\underline{v}) - f(\underline{a})}{t}$$

En partant du point $(0, 0)$ et en considérant que la fonction $f(\underline{x}) = x_1 e^{-(x_1^2 + x_2^2)}$ représente une altitude, déterminer à l'aide de la dérivée directionnelle dans quelle direction $\underline{v}$ on doit se déplacer pour "monter" le plus possible ?

Exercice 7 : Considérons la fonction :

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{\max(|x_1|, |x_2|)}{|x_1| + |x_2|} & \text{si} \quad \underline{x} \neq \underline{0} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans quelles directions $\underline{v}$ cette fonction admet des dérivées directionnelles en $(0, 0)$? Est-elle continue en $(0, 0)$?

Exercice 8 (Différentielle) : En utilisant la définition, montrer que la fonction :

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} x_1^2 \sin(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}) & \text{si} \quad \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est différentiable en $(0, 0)$ et donner sa différentielle. Est-ce une fonction de classe C^1 ?

Exercice 9 : À l'aide de la différentielle, donner une approximation de :

$$A = 1.03^{3.02} \qquad B = \sqrt{1.01} \ln\left(\frac{2.02}{1.97}\right) \qquad C = e^{0.01} 1.03^3$$

Indication : Pour le C, on peut procéder de deux manières.

Exercice 10 (EDP) : Soit $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction représentant la pression dans un fluide. La loi hydrostatique permet de définir la relation :

$$\underline{\nabla} p = \rho \, \underline{g} \quad \text{où} \quad \underline{\nabla} p = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} p \\ \partial_{x_2} p \\ \partial_{x_3} p \end{bmatrix}$$

et où $\underline{g} = (0, 0, -g)$ est le champ de pesanteur et ρ la masse volumique du fluide (supposée constante).

1) Déterminer $\partial_{x_1} p$, $\partial_{x_2} p$ et $\partial_{x_3} p$ et en déduire la forme générale de $p(\underline{x})$.
2) En considérant une masse volumique de 1 tonne par m^3 pour l'eau de l'océan et une pesanteur de 10m.s^{-2}, calculer la pression à 4000m de profondeur en sachant que la pression à la surface est de 1bar $= 10^5$ Pa.

Exercice 11 : Déterminer la forme la plus générale que vous pouvez des solutions des EDP suivantes :

1) $\partial_{x_1} f = 0$
2) $\partial_{x_2} f = x_2^2 + 2x_1$
3) $\partial_{x_1} f + \alpha \partial_{x_2} f = 0$
4) $\partial_{x_1} f + \partial_{x_2} f = f$

Indication : Pour le 3), penser à l'équation de transport. Pour le 4), chercher des solutions à variables séparées, c'est à dire $f(x_1, x_2) = g(x_1)h(x_2)$.