INSA M5 TD 1 - 2 : Equations différentielles ordinaires

Exercice 1 : Pour chacune des équations différentielles suivantes, donner l'*ordre* de l'EDO, dire si elle est *linéaire*, *autonome* ou autre, et mettre sous forme normale.

1) $y'(t) = t^2 y(t)$ 2) $y'(t) = y^2(t) - (1+t^2)y''(t)$
3) $(2+\sin(t))y^{(3)}(t) - \cos(y(t)) + 3e^t = 0$

Exercice 2 (Décroissance radioactive) : Une manière de dater des matériaux (organiques) anciens est l'utilisation du Carbone 14, un isotope radioactif du carbone. Si on suppose que $y(t)$ représente la proportion de cette isotope à un instant t, on sait que ce dernier se désintègre avec une vitesse proportionnelle à $y(t)$.

1) Donner l'équation différentielle vérifiée par $y(t)$ et la résoudre.
2) Sachant que pour le carbone 14 le *temps de demi-vie* est de (environ) 5568 ans, déterminer la constante de proportionnalité de la vitesse de désintégration (aussi appelé *constante de radioactivité*)
3) (Bonus) On retrouve des ossements contenant 9 fois moins de carbone 14 que des ossements similaires d'aujourd'hui. Déterminer l'âge de ces ossements.

Exercice 3 (Médicament) : On considère une quantité $y(t)$ de médicament qui évolue dans le corps selon l'EDO suivante :

$$y'(t) = -y(t) + f(t), \quad t \geq 0$$

où $f(t) = \alpha e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, représente la quantité de médicament injecté.

1) Vérifier que pour tout α, la quantité totale de médicament injecté entre $[0, +\infty[$ est la même.
2) a) Résoudre le problème de Cauchy : Trouver y solution de l'EDO t.q. $y(0) = 0$.
   b) Pour quelle valeur de α a-t-on y solution du problème de Cauchy ci-dessus et $y'(0) = 1$?

Exercice 4 : Résoudre les EDO suivantes sur $\mathbb{R}$:

1) $y'(t) - y(t) = (-6t^2 + 4t - 1)e^{-t}$ 2) $y'(t) + y(t) = (\cos(2t) - \sin(2t))e^{2t}$
3) $y'(t) + 2y(t) = e^{-2t}(3t^2 + t - 1)$ 4) $y'(t) - y(t) = te^{-t} - e^t \sin(t)$
5) $y'(t) + y(t) = \dfrac{1 - e^{-2t}}{e^t + e^{-t}}$

Exercice 5 : Résoudre les EDO suivantes :

1) $y'(t) + e^t y(t) = te^t + 1, \ t \in \mathbb{R}$ 2) $y'(t) + \dfrac{1}{t}y(t) = \dfrac{\ln(t)}{t^2}, \quad t > 0$
3) $y'(t) - \dfrac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}y(t) = e^t, \ t \in \mathbb{R}$ 4) $y'(t) + \tan(t)\, y(t) = \sin(t), \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Exercice 6 : Résoudre les EDO suivantes et dire s'il existe des solutions sur tout $\mathbb{R}$:

1) $(e^t - 1)y'(t) + e^t y(t) = 1, \quad t \in \mathbb{R}$ 2) $ty'(t) - 2y(t) = (t-1)(t+1)^2, \quad t \in \mathbb{R}$
3) $|t|y'(t) + (t-1)y(t) = t^2, \quad t \in \mathbb{R}$ 4) $|t||t-1|y'(t) + 2y(t) = 1, \quad t \in \mathbb{R}$

Indication : Pour le 1) et le 3), il sera utile d'utiliser le fait que $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ où $o(t^2) = t^2\epsilon(t)$ avec $\epsilon(t)$ une fonction qui tend vers 0 quand $t \to 0$.

Exercice 7 (Modèle de Verhulst) : En biologie, un modèle mathématique pour décrire l'évolution d'une population de bactérie dans un espace avec des ressources limitées a été introduit par Pierre François Verhulst (1804-1849). Si $y(t)$ représente le taux de bactérie à l'instant t dans une boite de Petri (1852-1921) ($y(t) = 1$ correspondant à une boite remplie à 100%), alors son évolution dans le temps est décrit par l'EDO *non linéaire* :

$$y'(t) = y(t)(1 - y(t)), \quad t \geq 0$$

1) En supposant que si $y(0) \neq 0$ alors $y(t) \neq 0$ et $y(t) \neq 1$ pour tout $t > 0$, résoudre l'équation ci-dessus à l'aide d'une *technique de séparation de variables.* Indication : Il est utile de rappeler la règle de dérivation $(G \circ y)' = (G' \circ y)y'$
2) En déduire le comportement quand $t \to +\infty$ de la population de bactérie.

Exercice 8 (Newton) : Le principe fondamentale de la dynamique de Newton nous apprend que la trajectoire d'un point $\underline{x} = (x(t),\, y(t))$ vérifie l'EDO :

$$m\,\underline{x}'' = \underline{F}$$

où $\underline{F}$ correspond à la somme des forces. Ici, on considèrera que $\underline{F} = (0, -g)$ correspondant simplement à la force de gravité.

1) Déterminer la forme générale de $x(t)$ et $y(t)$.
2) Partant de $\underline{x}(0) = \underline{0}$ et $\underline{x}'(0) = (1,\, 1)$, déterminer la trajectoire de l'objet.

Exercice 9 : Trouver les solutions réelles des EDO suivantes :

1) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = t^2$
2) $2y''(t) + 2y'(t) - 4y(t) = e^{-t}(t^2 - 1)$
3) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^t(t - 3)$
4) $y''(t) - 7y'(t) + 10y(t) = \cos(2t) - e^t \sin(t)$

Exercice 10 (Sismographe) : Considérons une masse m suspendue à un ressort de raideur k. Si $y(t)$ désigne la position de la masse par rapport à sa position d'équilibre, on sait par le principe fondamentale de la dynamique que $y(t)$ satisfait l'EDO suivante :

$$my''(t) + \lambda y'(t) + ky(t) = 0$$

où $m > 0$ désigne la masse, $k > 0$ la raideur du ressort et $\lambda > 0$.

1) Déterminer la forme générale des solutions et interpréter le rôle de λ.
2) Considérons $\lambda = 0$. On suppose qu'un tremblement de Terre génère une source $f(t) = \cos(\omega_0 t)$, ce qui nous ramène à l'EDO suivante :

$$my''(t) + ky(t) = \cos(\omega_0 t)$$

où $\omega_0 > 0$. Déterminer la solution $y(t)$ satisfaisant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$. Discuter les deux cas $\omega_0 \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Exercice 11 (Résonances) : On considère une corde de longueur l fixée à ses deux bouts qui vibre à une certaine fréquence $\omega > 0$. Si $y(x)$ représente la hauteur de la corde par rapport à sa position au repos, alors $y(x)$ satisfait l'EDO :

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0.$$

1) Déterminer les fréquences ω pour lesquelles il existe des solutions réelles non nulles à l'EDO ci-dessus satisfaisant $y(0) = y(l) = 0$.
2) En étudiant la plus petite fréquence ω pour laquelle une solution existe, en déduire que plus la corde est petite plus elle émettra en vibrant un son aigu.

Exercice 12 (Système d'EDO) : Considérons deux quantités $y_1(t)$ et $y_2(t)$ vérifiant le système d'EDO suivant :

$$\left|\begin{aligned} & y_1'(t) = y_1(t) - \alpha y_2(t) \\ & y_2'(t) = \alpha y_2(t) - y_1(t) \end{aligned}\right.$$

1) Montrer que la somme $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ est constante.
2) a) Montrer que la résolution de ce système d'EDO est équivalent à résoudre :

$$\left|\begin{aligned} & y_1''(t) - (1 + \alpha) y_1'(t) = 0 \\ & y_2'(t) = \alpha y_2(t) - y_1(t) \end{aligned}\right.$$

   b) Déduire la forme générale des solutions du système d'EDO.