M7 : Complément d'analyse et initiation à la topologie

Chapitre 5 :

Vers l'optimisation (convexe)

Cours 13-14

Année 2020 - 2021

Contact : A. Tonnoir

antoine.tonnoir@insa-rouen.fr

Au programme (chapitre 5) :

Objectif :

Déterminer les propriétés d'existence / unicité d'extrema d'une fonction.

Plan :

I. Les fonctions différentiables

II. Les fonctions convexes

I. Les fonctions différentiables

Considérons $f : E \to \mathbb{R}$ avec E un evn.

1.1 Définition (extrema)

On dit que f admet en $a \in E$:

- Un **minimum** (resp. **maximum**) **local** si

  $$\exists r > 0, \text{ t.q. } \forall x \in B(a, r), \quad f(x) \geq f(a) \ \ (\text{resp. } f(x) \leq f(a))$$

- Un **minimum** (resp. **maximum**) **local strict** si

  $$\exists r > 0, \text{ t.q. } \forall x \in B(a, r), \quad f(x) > f(a) \ \ (\text{resp. } f(x) < f(a))$$

- Un **extremum local** si f admet un maximum ou un minimum en a.

I. Les fonctions différentiables

1.2 Proposition

Si f est une fonction continue et $A \subset E$ compact, alors $f(A)$ est compact.

<u>Preuve :</u> au (vrai) tableau ! $\blacksquare$

1.2 Proposition

Si f est une fonction continue et $A \subset E$ compact, alors $f(A)$ est compact.

Preuve : au (vrai) tableau ! $\blacksquare$

Remarque :

Cette proposition n'est pas vrai pour un fermé !
Pour $f : x \in \mathbb{R} \to e^x$, on a $f(]-\infty,0]) =]0,1]$.

I. Les fonctions différentiables

1.2 Proposition

Si f est une fonction continue et $A \subset E$ compact, alors $f(A)$ est compact.

Preuve : au (vrai) tableau ! ■

Remarque 2 :

Cette proposition se généralise à $f : E \to F$ où l'espace d'arrivé est un evn.

I. Les fonctions différentiables

1.2 Proposition

Si f est une fonction continue et $A \subset E$ compact, alors $f(A)$ est compact.

1.3 Corollaire

Si f est une fonction continue et $A \subset E$ compact, alors f admet et atteint un maximum et un minimum sur A.

Preuve : au (vrai) tableau ! $\blacksquare$

I. Les fonctions différentiables

1.2 Proposition

Si f est une fonction continue et $A \subset E$ compact, alors $f(A)$ est compact.

1.3 Corollaire

Si f est une fonction continue et $A \subset E$ compact, alors f admet et atteint un maximum et un minimum sur A.

1.3 Corollaire (cf TD)

Dans un evn de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

I. Les fonctions différentiables

1.4 Définition (différentiabilité)

On dit que f est différentiable en $a \in E$ s'il existe une application linéaire de $E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall h \in E, \quad f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \|h\| \varepsilon_a(h)$$

où $\varepsilon_a : E \to \mathbb{R}$ est telle que $\varepsilon_a(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$

I. Les fonctions différentiables

1.4 Définition (différentiabilité)

On dit que f est différentiable en $a \in E$ s'il existe une application linéaire de $E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall h \in E, \quad f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \|h\| \varepsilon_a(h)$$

où $\varepsilon_a : E \to \mathbb{R}$ est telle que $\varepsilon_a(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$.

1.5 Proposition

Si f est différentiable sur O ouvert de E et f admet un extremum en a, alors $d_a f = 0$.

Preuve : au (vrai) tableau ! ∎

1.4 Définition (différentiabilité)

On dit que f est différentiable en $a \in E$ s'il existe une application linéaire de $E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall h \in E, \quad f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \|h\| \varepsilon_a(h)$$

où $\varepsilon_a : E \to \mathbb{R}$ est telle que $\varepsilon_a(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$

1.5 Proposition

Si f est différentiable sur O ouvert de E et f admet un extremum en a, alors $d_a f = 0.$

Remarque :

Ce résultat nous donne la démarche de recherche d'un extrema dans un ouvert.

1.4 Définition (différentiabilité)

On dit que f est différentiable en $a \in E$ s'il existe une application linéaire de $E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall h \in E, \quad f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \|h\| \varepsilon_a(h)$$

où $\varepsilon_a : E \to \mathbb{R}$ est telle que $\varepsilon_a(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$

1.5 Proposition

Si f est différentiable sur O ouvert de E et f admet un extremum en a, alors $d_a f = 0.$

Remarque 2 :

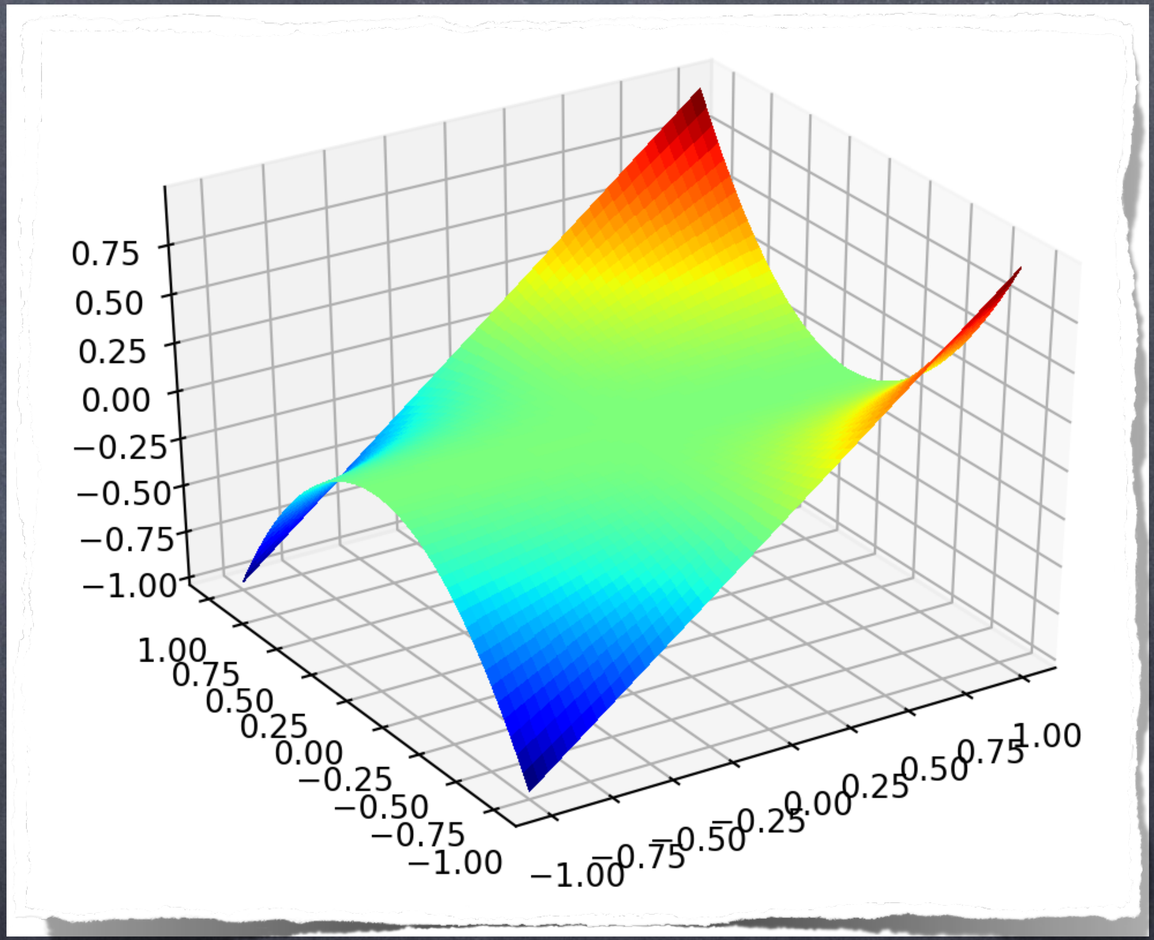
Si l'ensemble est fermé, on cherchera les extrema d'abord dans l'intérieur, puis sur les bords de l'ensemble.

I. Les fonctions différentiables

Exemple :

Déterminer le ou les extrema de $f(x,y) = x^2y$ sur le domaine $A = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(détails au (vrai) tableau)



$f(x,y) = x^2y$

Au programme (chapitre 5) :

Objectif :

Déterminer les propriétés d'existence / unicité d'extrema d'une fonction.

Plan :

I. Les fonctions différentiables

II. Les fonctions convexes

a) Définitions et propriétés

b) Le cas des fonctions différentiables

II. a) Définitions et propriétés

2.1 Définition (ensemble convexe)

Un ensemble $C \subset E$ est convexe ssi pour tous points x et y de C, et pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.

II. a) Définitions et propriétés

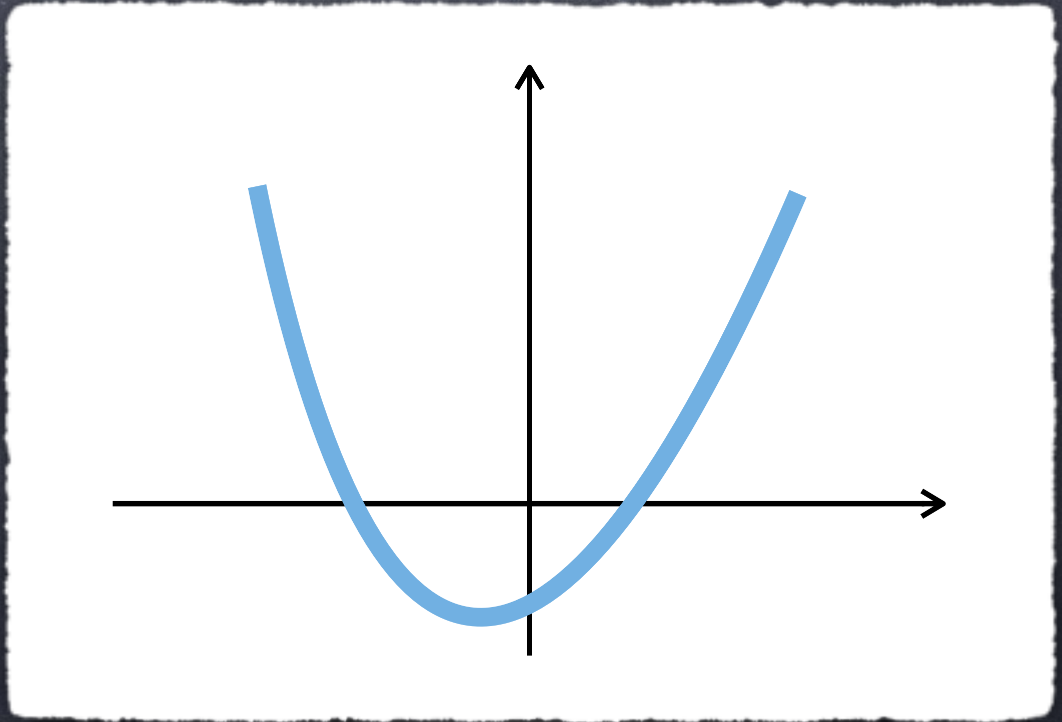
2.1 Définition (ensemble convexe)

Un ensemble $C \subset E$ est convexe ssi pour tous points x et y de C, et pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.

2.2 Définition (fonction convexe)

On dit qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tous points x et y, et pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$



II. a) Définitions et propriétés

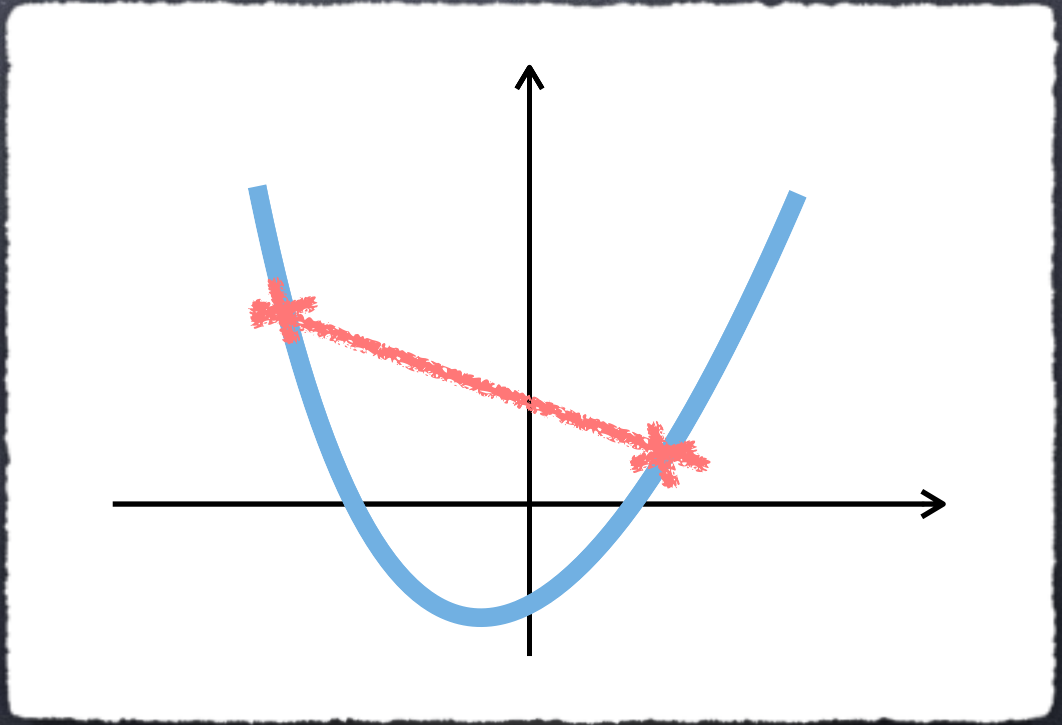
2.1 Définition (ensemble convexe)

Un ensemble $C \subset E$ est convexe ssi pour tous points x et y de C, et pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.

2.2 Définition (fonction convexe)

On dit qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tous points x et y, et pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$



II. a) Définitions et propriétés

2.1 Définition (ensemble convexe)

Un ensemble $C \subset E$ est convexe ssi pour tous points x et y de C, et pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.

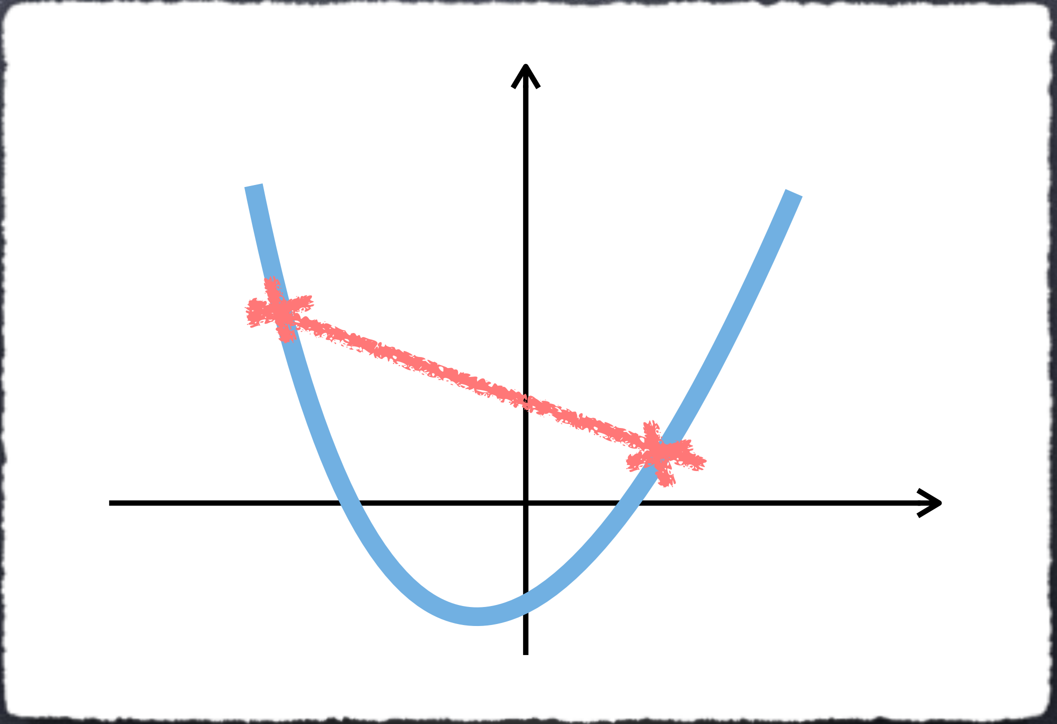
2.2 Définition (fonction convexe)

On dit qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tous points x et y, et pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

On dira qu'elle est strict. convexe ssi pour tout $\lambda \in]0,1[$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$



II. a) Définitions et propriétés

2.3 Proposition (inégalités des pentes)

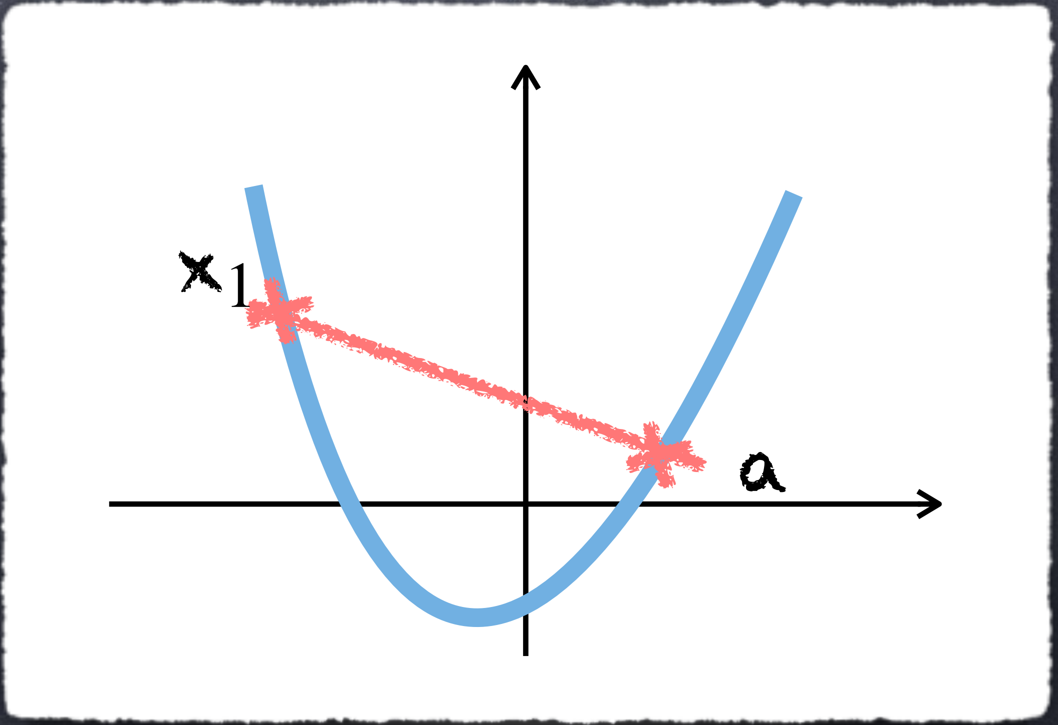
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe ssi $\forall a \in E$, l'application :

$P_a : x \to \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante.

<u>Preuve :</u> au (vrai) tableau ! ■

Dans l'exemple ci-contre, on a :

- $P_a(x_1) < 0$



II. a) Définitions et propriétés

2.3 Proposition (inégalités des pentes)

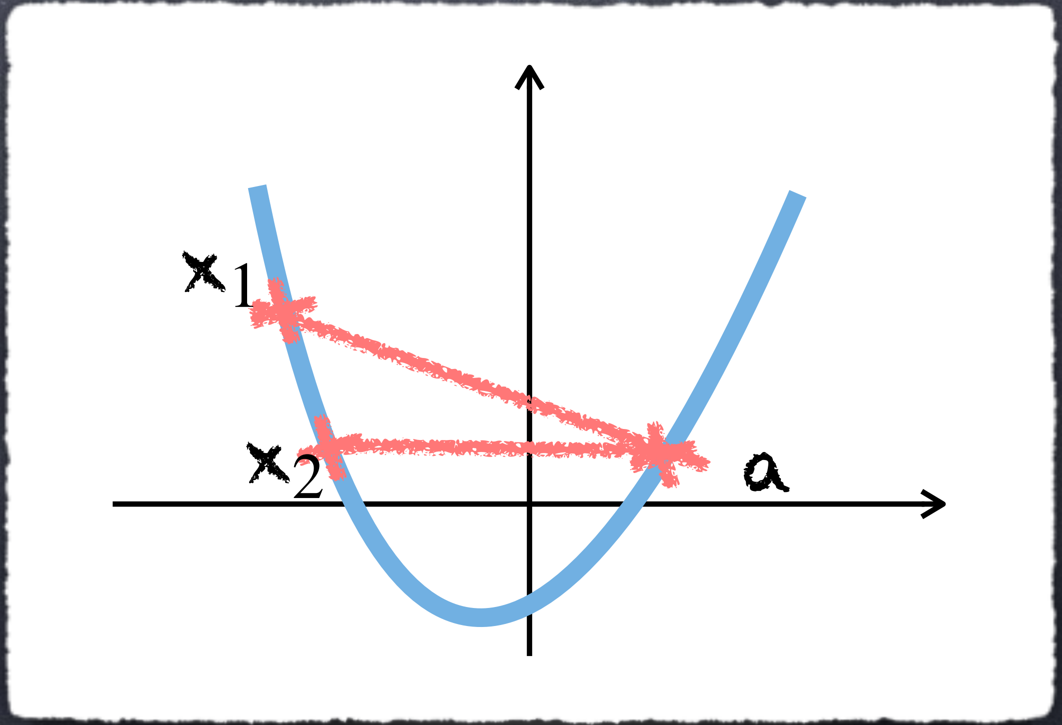
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe ssi $\forall a \in E$, l'application :

$$P_a : x \to \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ est croissante.

<u>Preuve :</u> au (vrai) tableau ! ■

Dans l'exemple ci-contre, on a :

- $P_a(x_1) < 0$
- $P_a(x_2) = 0$



II. a) Définitions et propriétés

2.3 Proposition (inégalités des pentes)

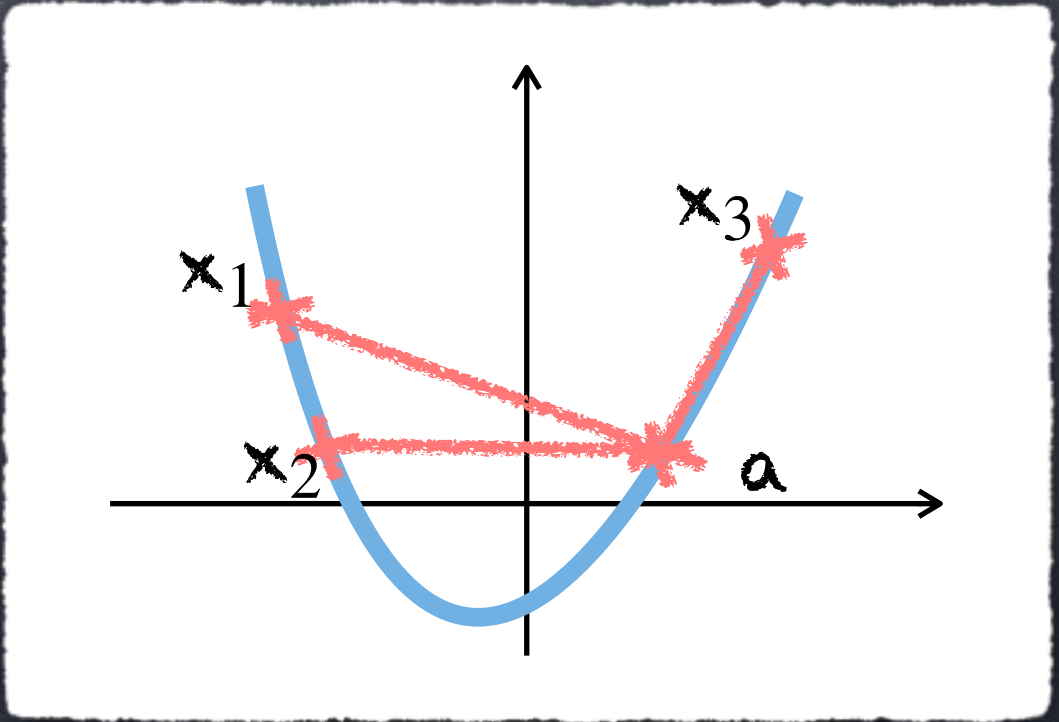
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe ssi $\forall a \in E$, l'application :

$$P_a : x \to \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ est croissante.

<u>Preuve</u> : au (vrai) tableau ! ∎

Dans l'exemple ci-contre, on a :

- $P_a(x_1) < 0$
- $P_a(x_2) = 0$
- $P_a(x_3) > 0$



II. a) Définitions et propriétés

2.3 Proposition (inégalités des pentes)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe ssi $\forall a \in E$, l'application :

$P_a : x \to \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante.

2.4 Proposition (épigraphe)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe ssi le domaine définie par $I(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) \leq y\}$ est convexe.

<u>Idée de la preuve</u> : au (vrai) tableau ! ∎

II. a) Définitions et propriétés

2.5 Proposition

$f : E \to \mathbb{R}$ une fonction strict. convexe. Si elle admet un minimum, alors ce dernier est unique et est global.

Preuve : au (vrai) tableau ! ■

Remarque :

Une fonction strict. convexe peut ne pas admettre de minimum. Par exemple, la fonction e^x.

II. a) Définitions et propriétés

2.5 Proposition

$f : E \to \mathbb{R}$ une fonction strict. convexe. Si elle admet un minimum, alors ce dernier est unique et est global.

2.6 Théorème (admis)

Si $f : E \to \mathbb{R}$ est coercive, i.e. $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, et strict. convexe alors f admet un unique minimum.

II. a) Définitions et propriétés

2.5 Proposition

$f : E \to \mathbb{R}$ une fonction strict. convexe. Si elle admet un minimum, alors ce dernier est unique et est global.

2.6 Théorème (admis)

Si $f : E \to \mathbb{R}$ est coercive, i.e. $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, et strict. convexe alors f admet un unique minimum.

Remarque :

Si f est uniquement coercive, alors on déduit qu'il existe un minimum, non nécessairement unique.

II. b) Cas f différentiable

Considérons ici $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2.6 Proposition

f est convexe ssi f' est strictement croissant.

Idée de la preuve : au (vrai) tableau ! ■

II. b) Cas f différentiable

Considérons ici $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2.6 Proposition

f est convexe ssi f' est strictement croissant.

2.7 Proposition

Soit f dérivable. f est convexe ssi sa courbe est au dessus de chacune de ses tangentes.

<u>Preuve :</u> au (vrai) tableau ! ■

II. b) Cas f différentiable

Considérons ici $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2.6 Proposition

f est convexe ssi f' est strictement croissant.

2.7 Proposition

Soit f dérivable. f est convexe ssi sa courbe est au dessus de chacune de ses tangentes.

Exemple :

Déduire que pour tout x, $e^x \geq x + 1$.

Plan détaillé chapitre 5

I. Les fonctions différentiables

II. Les fonctions convexes

a) Définitions et propriétés

b) Le cas des fonctions différentiables