M7 : Complément d'analyse et initiation à la topologie

Chapitre 4 :

Théorème de point fixe et applications

Cours 11-12

Année 2020 - 2021

Contact : A. Tonnoir

antoine.tonnoir@insa-rouen.fr

Au programme (chapitre 4) :

Objectif :

Déterminer des conditions d'existence et d'unicité de solution d'équation.

Plan :

I. Théorème de point fixe

II. Théorème de Cauchy-Lipschtiz

III. Série dans un Banach

Au programme (chapitre 4) :

Objectif :

Déterminer des conditions d'existence et d'unicité de solution d'équation.

Plan :

I. Théorème de point fixe

a) Enoncé et preuve

b) Applications

II. Théorème de Cauchy-Lipschtiz

III. Série dans un Banach

I. a) Enoncé et preuve

1.1 Définition (contraction)

Une fonction $f : E \to F$ est dite contractante ssi elle est Lip. de constante $k < 1$, i.e.

I. a) Enoncé et preuve

1.1 Définition (contraction)

Une fonction $f : E \to F$ est dite contractante ssi elle est Lip. de constante $k < 1$, i.e.

1.2 Théorème (point fixe)

Si $f : E \to E$ est contractante et E un espace de Banach, alors :

- l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution x^*
- et la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers x^*

Preuve : au (vrai) tableau ! ∎

I. b) Applications

Approximation de zéros d'une fonction :

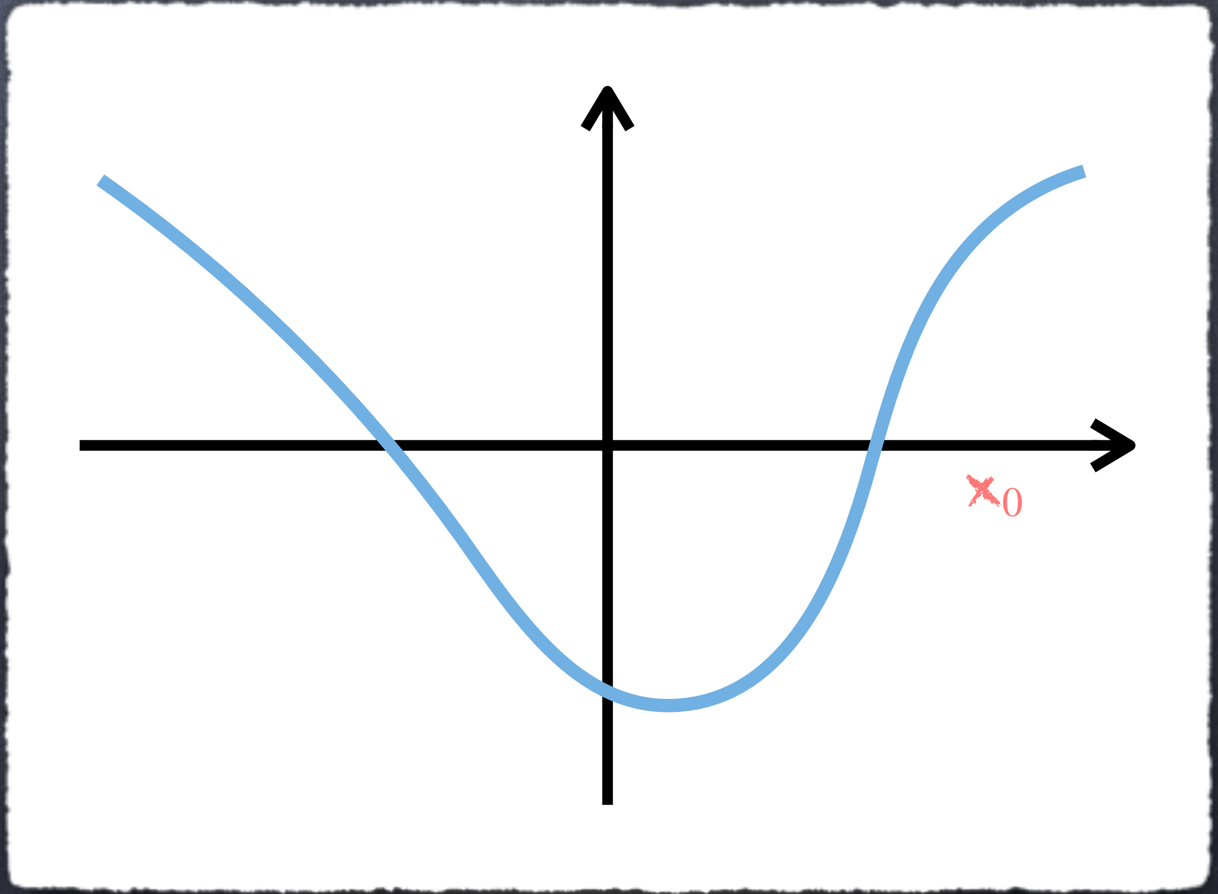
Supposons qu'on cherche à résoudre une équation de la forme $f(x) = 0$ où $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

L'idée de la méthode de Newton est de générer la suite

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Alors si f s'annule en x^*, si $f'(x^*) \neq 0$ et si x_0 est proche de x^*, x_n tend vers x^*.

(détails en TD)



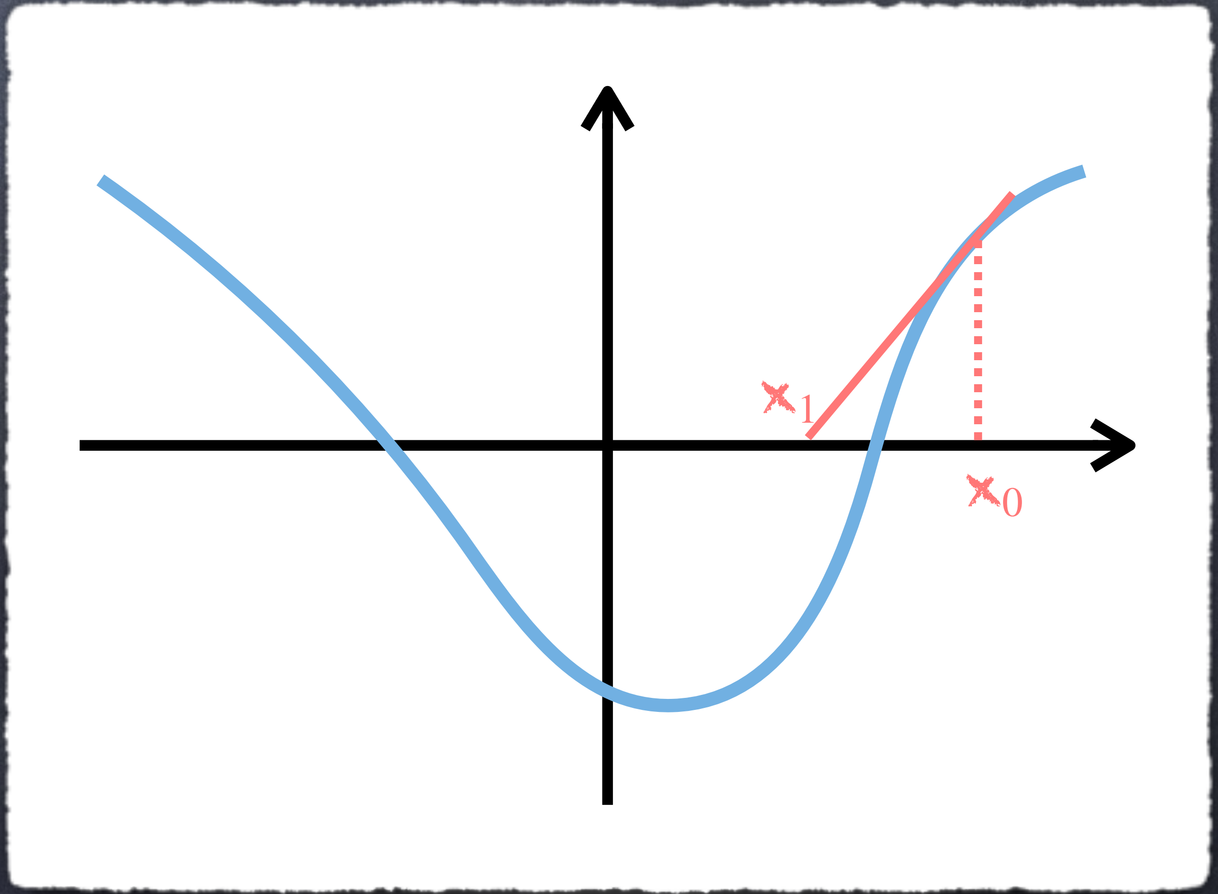
I. b) Applications

Approximation de zéros d'une fonction :

Supposons qu'on cherche à résoudre une équation de la forme $f(x) = 0$ où $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

L'idée de la méthode de Newton est de générer la suite

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Alors si f s'annule en x^*, si $f'(x^*) \neq 0$ et si x_0 est proche de x^*, x_n tend vers x^*.

(détails en TD)

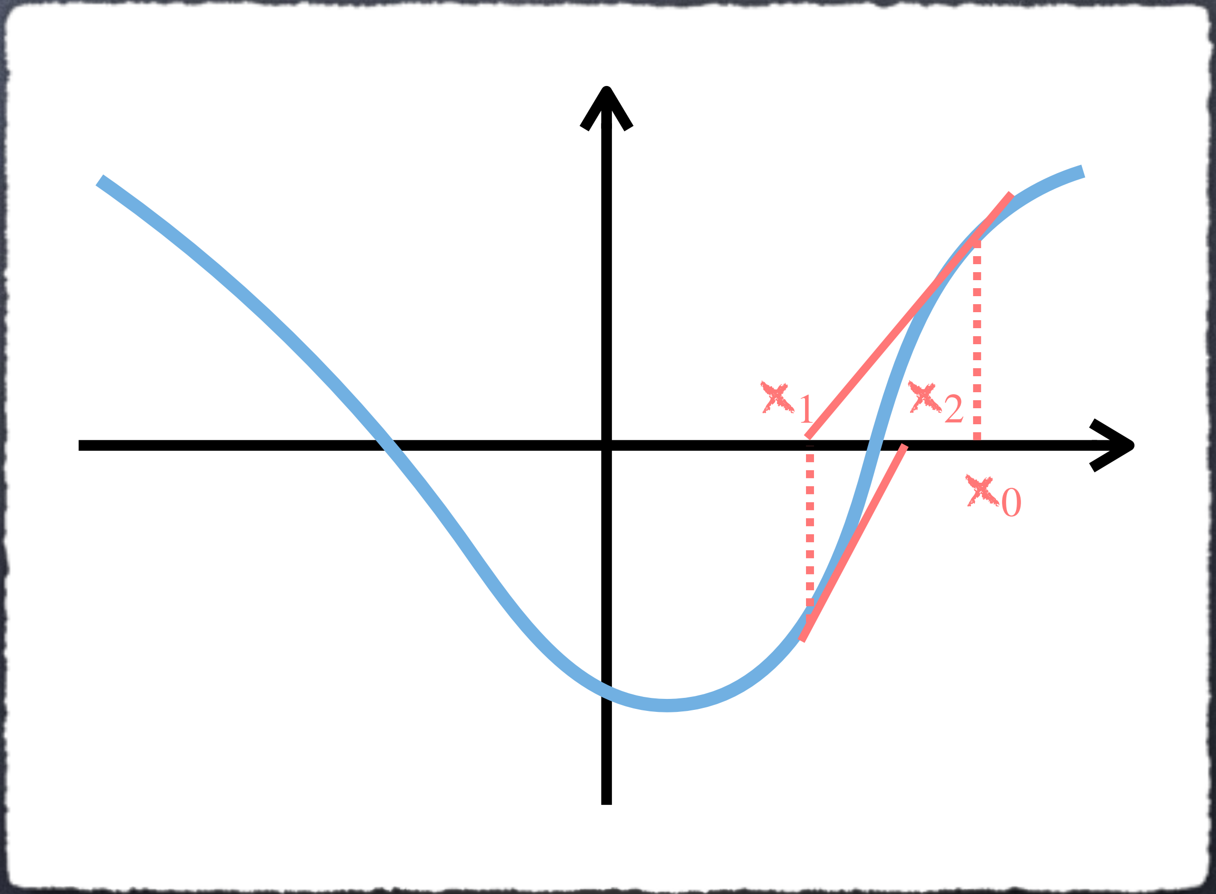
I. b) Applications

Approximation de zéros d'une fonction :

Supposons qu'on cherche à résoudre une équation de la forme $f(x) = 0$ où $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

L'idée de la méthode de Newton est de générer la suite

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Alors si f s'annule en x^*, si $f'(x^*) \neq 0$ et si x_0 est proche de x^*, x_n tend vers x^*.

(détails en TD)

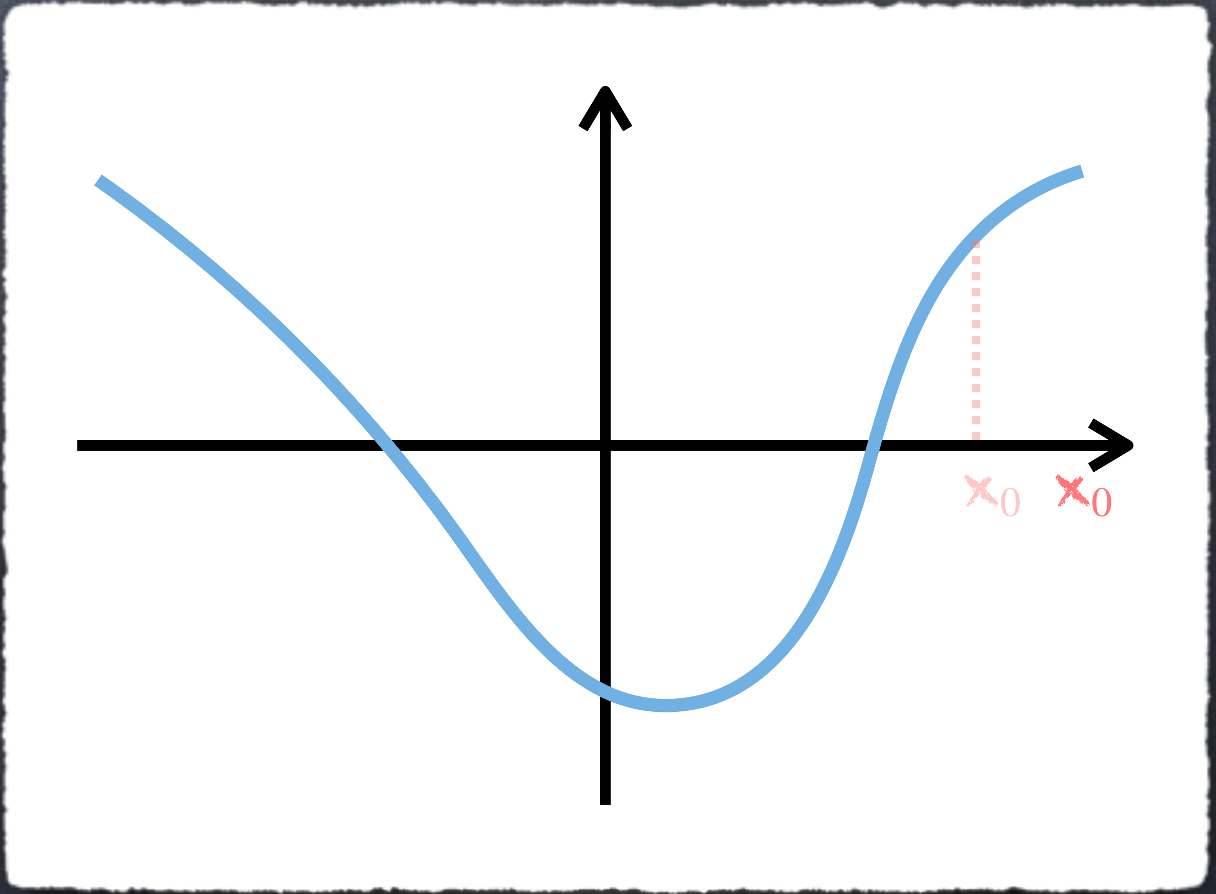
I. b) Applications

Approximation de zéros d'une fonction :

Supposons qu'on cherche à résoudre une équation de la forme $f(x) = 0$ où $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

L'idée de la méthode de Newton est de générer la suite

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Alors si f s'annule en x^*, si $f'(x^*) \neq 0$ et si x_0 est proche de x^*, x_n tend vers x^*.

(détails en TD)

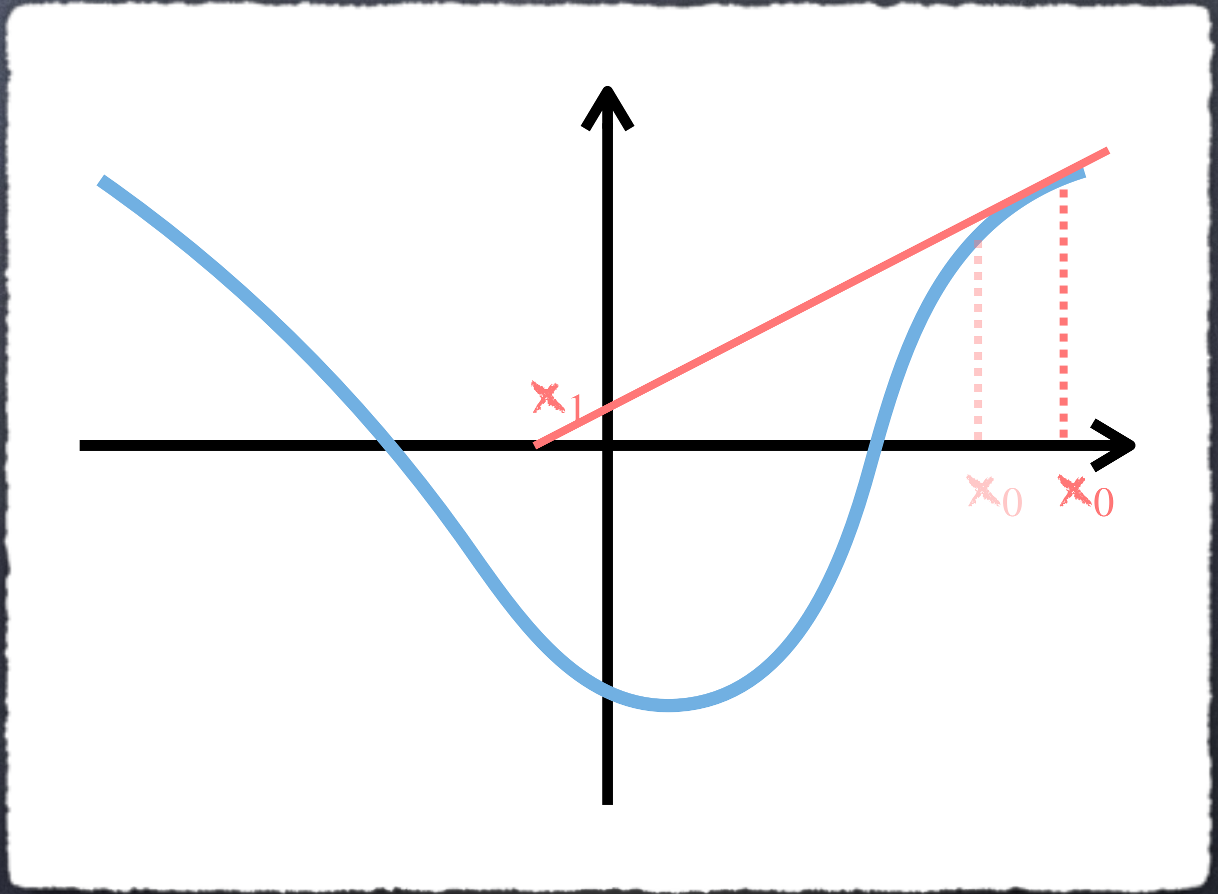
I. b) Applications

Approximation de zéros d'une fonction :

Supposons qu'on cherche à résoudre une équation de la forme $f(x) = 0$ où $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

L'idée de la méthode de Newton est de générer la suite

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Alors si f s'annule en x^*, si $f'(x^*) \neq 0$ et si x_0 est proche de x^*, x_n tend vers x^*.

(détails en TD)

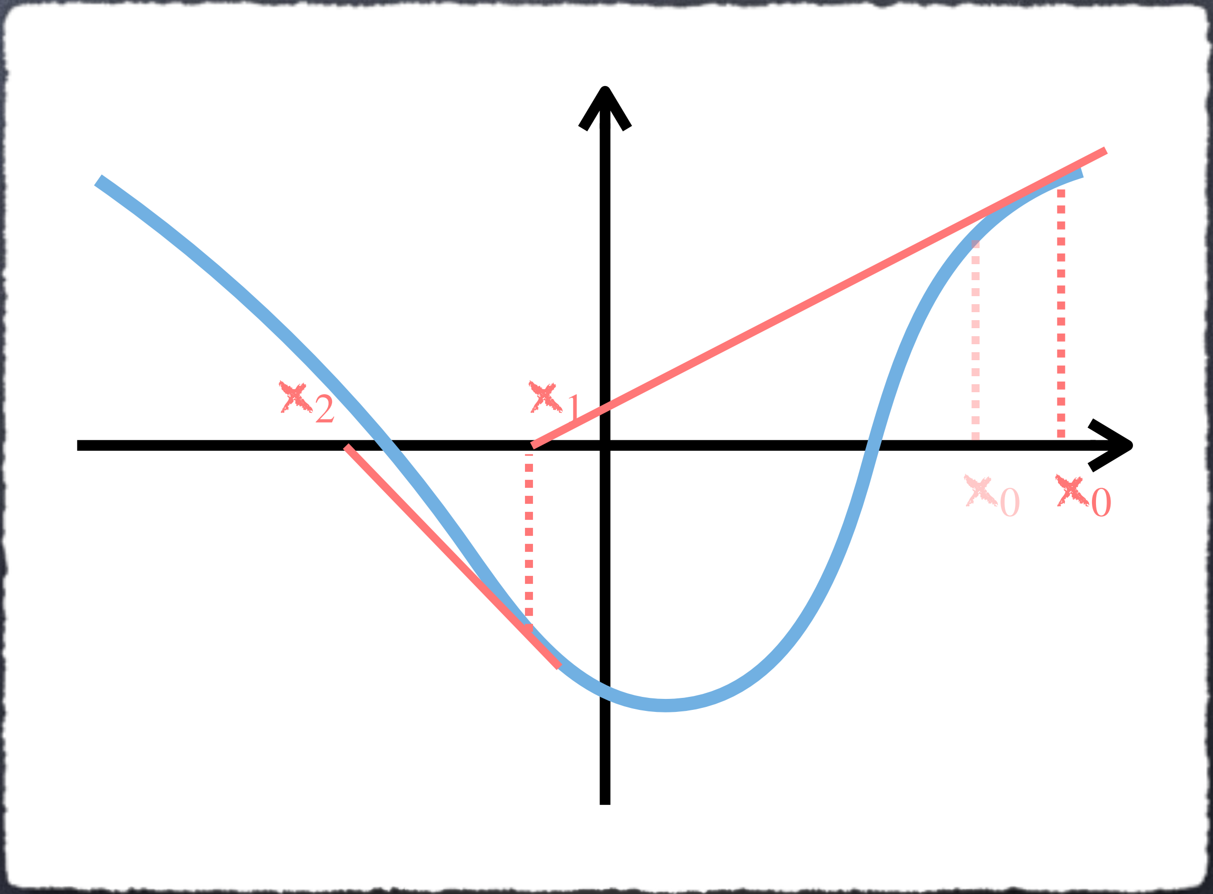
I. b) Applications

Approximation de zéros d'une fonction :

Supposons qu'on cherche à résoudre une équation de la forme $f(x) = 0$ où $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

L'idée de la méthode de Newton est de générer la suite

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Alors si f s'annule en x^*, si $f'(x^*) \neq 0$ et si x_0 est proche de x^*, x_n tend vers x^*.

(détails en TD)

I. b) Applications

Résolution d'équations implicites

I. b) Applications

Résolution d'équations implicites

1.3 Théorème (fonctions implicites)

Soit $f : E \times E \to \mathbb{R}$ différentiable, t.q. $f(x_0, y_0) = 0$ et $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$. Alors, il existe un voisinage U de x_0 et une fonction $\varphi : U \to V \subset E$ t.q. :

$$\forall x \in U, \varphi(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(x, y) = 0$$

De plus, si f est de classe C^p alors φ est de classe C^p et

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\partial_x f(x_0, y_0)}{\partial_y f(x_0, y_0)}$$

Idée de la preuve : au (vrai) tableau !

I. b) Applications

Résolution d'équations implicites

Considérons par exemple l'application :

$$f(x,y) = x^2 - y + \cos(xy)$$

Étudions la ligne de niveau f(A) associée au point $A = (0,1)$.

(détails au (vrai) tableau)

I. b) Applications

Tasse de café et tourbillon

I. b) Applications

Tasse de café et tourbillon

1.4 Lemme

Si $f : [0,1] \to [0,1]$ est continue, alors elle admet au moins un point fixe.

Preuve : Par le théorème des valeurs intermédiaires. ∎

I. b) Applications

Tasse de café et tourbillon

Ce théorème nous apprend qu'en mélangeant son café, au moins un point sur la surface ne bouge pas !

I. b) Applications

Tasse de café et tourbillon

1.4 Lemme

Si $f:[0,1]\to[0,1]$ est continue, alors elle admet au moins un point fixe.

1.5 Théorème (point fixe Brouwer, admis)

Si $f:B(0,1)\to B(0,1)$ est continue, alors elle admet au moins un point fixe.

Ce théorème nous apprend qu'en mélangeant son café, au moins un point sur la surface ne bouge pas !

Au programme (chapitre 4) :

Objectif :

Déterminer des conditions d'existence et d'unicité de solution d'équation.

Plan :

I. Théorème de point fixe

II. Théorème de Cauchy-Lipschtiz

III. Série dans un Banach

II. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Considérons le problème dit de Cauchy : Trouver $y : t \to \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [a, b] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où $t_0 \in [a, b]$ et y_0 sont données.

II. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Considérons le problème dit de Cauchy : Trouver $y : t \to \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\begin{vmatrix} y'(t) & = & f(t, y(t)), \quad t \in [a, b] \\ y(t_0) & = & y_0 \end{vmatrix}$$

où $t_0 \in [a, b]$ et y_0 sont données.

2.1 Théorème (de Cauchy-Lipschitz)

Si f est continue et est Lip. par rapport à sa deuxième variable, alors il existe une unique solution au problème de Cauchy.

II. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Considérons le problème dit de Cauchy : Trouver $y : t \to \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\begin{vmatrix} y'(t) & = & f(t, y(t)), \quad t \in [a, b] \\ y(t_0) & = & y_0 \end{vmatrix}$$

où $t_0 \in [a, b]$ et y_0 sont données.

2.1 Théorème (de Cauchy-Lipschitz)

Si f est continue et est Lip. par rapport à sa deuxième variable, alors il existe une unique solution au problème de Cauchy.

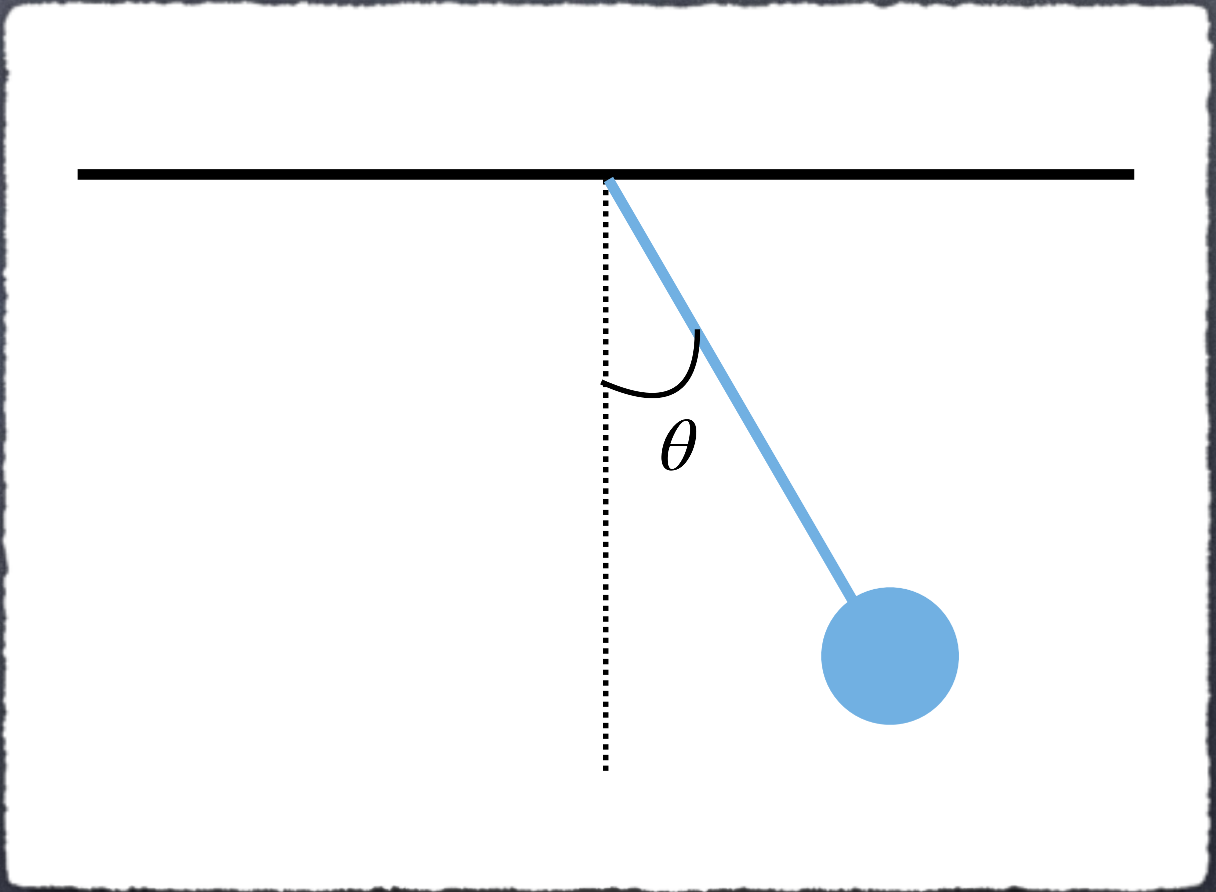
Idée de la preuve : au (vrai) tableau ! ∎

II. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Un exemple d'application : le pendule

En appliquant le PFD, on peut montrer que le pendule suit l'EDO suivante :

$$\theta''(t) = \sin(\theta(t))$$



À l'aide du Thm. de C.L., on peut montrer qu'il existe une unique solution !

(détails au (vrai) tableau)

Remarque :

Sans l'approximation des petits angles, il est difficile de résoudre cette EDO.

Au programme (chapitre 4) :

Objectif :

Déterminer des conditions d'existence et d'unicité de solution d'équation.

Plan :

I. Théorème de point fixe

II. Théorème de Cauchy-Lipschtiz

III. Série dans un Banach

a) Définition et propriétés

b) Exponentielle de matrice

III. a) Définition et propriétés

3.1 Définition

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E.

On dit que la série $\sum_n x_n$ est convergente ssi la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ converge vers S. On aura alors $S = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

III. a) Définition et propriétés

3.1 Définition

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E.
On dit que la série $\sum_n x_n$ est convergente ssi la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ converge vers S. On aura alors $S = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

3.2 Définition (convergence normale)

On dira que la série est normalement convergente ssi la série $\sum_n \|x_n\|_E$ est convergente.

III. a) Définition et propriétés

3.3 Proposition

Dans un espace de Banach, toute série normalement convergente et convergente.

Preuve : au (vrai) tableau ! ■

Remarque :

L'exemple de la fonction exponentielle vue au chapitre précédent est un cas particulier de série.

III. b) Exponentielle de matrice

3.4 Définition

On définit l'exponentielle d'une matrice : $e^{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

Remarques :

- L'ensemble des matrices est evn de dimension finie, donc est un espace de Banach.

III. b) Exponentielle de matrice

3.4 Définition

On définit l'exponentielle d'une matrice : $e^{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

Remarques :

- L'ensemble des matrices est evn de dimension finie, donc est un espace de Banach.

- La série ci-dessus est bien définie car elle est normalement convergente.

  (détails au (vrai) tableau)

III. b) Exponentielle de matrice

3.4 Définition

On définit l'exponentielle d'une matrice : $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

3.5 Proposition

Si A est diagonalisable, i.e $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, alors on a $e^A = Pe^D P^{-1}$.

<u>Preuve</u> : au (vrai) tableau !

■

III. b) Exponentielle de matrice

3.6 Théorème (admis)

L'application $\varphi : t \in [a, b] \to e^{tA}$ est C^1 et on a :
$\varphi'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$

III. b) Exponentielle de matrice

3.6 Théorème (admis)

L'application $\varphi : t \in [a,b] \to e^{tA}$ est C^1 et on a :
$\varphi'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$

3.7 Corollaire

Les solutions du système d'EDO $y' = Ay$ sont données par $y(t) = e^{tA}y_0$ où $y_0 \in \mathbb{R}^n$

Idée de la preuve : au (vrai) tableau ! ■

III. b) Exponentielle de matrice

Application :

Considérons le système masse ressort :

Le PFD nous apprend que le mouvement libre des masse est donnée par le système d'EDO :

$$\left|\begin{array}{lcl} my_1'' & = & -ky_1 - k(y_1 - y_2) \\ my_2'' & = & -k(y_2 - y_1) \end{array}\right.$$

(détails au (vrai) tableau)

Plan détaillé chapitre 4

I. Théorème de point fixe

a) Enoncé et preuve

b) Applications

II. Théorème de Cauchy-Lipschtiz

III. Série dans un Banach

a) Définition et propriétés

b) Exponentielle de matrice