M7 : Complément d'analyse et initiation à la topologie

Chapitre 3 :

Continuité dans les evn

Cours $7^{1/2}$-8-9-10

Année 2020 - 2021

Contact : A. Tonnoir

antoine.tonnoir@insa-rouen.fr

Au programme (chapitre 3) :

Objectif :

Étudier les propriétés de fonctions continues d'un evn dans un autre.

Plan :

I. Limite et continuité

II. Les applications linéaires

III. L'intégrale de Riemann

Au programme (chapitre 3) :

Objectif :

Étudier les propriétés de fonctions continues d'un evn dans un autre.

Plan :

I. Limite et continuité

  a) Caractérisation topologique

  b) Continuité uniforme

II. Les applications linéaires

III. L'intégrale de Riemann

I. a) Caractérisation topologique

Considérons f une fonction d'un evn $(E, \|\cdot\|_E)$ dans un second evn $(F, \|\cdot\|_F)$.

1.1 Définition (limite en a)

Pour un point $a \in \overline{D}(f)$, on dira que f a pour limite l en ce point ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D(f),\quad \|x - a\|_E \leq \eta \ \Rightarrow\ \|f(x) - l\|_F \leq \varepsilon$$

Remarque :

La notion de limite est définie sur l'adhérence de l'ensemble de définition de f.

I. a) Caractérisation topologique

Considérons f une fonction d'un evn $(E, \|\cdot\|_E)$ dans un second evn $(F, \|\cdot\|_F)$.

1.1 Définition (limite en a)

Pour un point $a \in \overline{D}(f)$, on dira que f a pour limite l en ce point ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D(f),\quad \|x - a\|_E \leq \eta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - l\|_F \leq \varepsilon$$

1.2 Proposition

La limite de f en a est l ssi pour toute suite $(x_n) \in D$ tendant vers a, on a $f(x_n)$ qui tend vers l.

Preuve : au (vrai) tableau ! $\blacksquare$

I. a) Caractérisation topologique

Considérons f une fonction d'un evn $(E, \|\cdot\|_E)$ dans un second evn $(F, \|\cdot\|_F)$.

1.1 Définition (limite en a)

Pour un point $a \in \overline{D}(f)$, on dira que f a pour limite l en ce point ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D(f),\quad \|x - a\|_E \leq \eta \ \Rightarrow\ \|f(x) - l\|_F \leq \varepsilon$$

1.3 Définition (continuité)

On dira que f est continue en $a \in D(f)$ ssi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

De même, on dira que f est continue sur $D(f)$ ssi elle est continue en chaque point $a \in D(f)$.

I. a) Caractérisation topologique

Exemple :

1.4 Lemme

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$$

Preuve : au (vrai) tableau ! $\blacksquare$

I. a) Caractérisation topologique

Exemple :

1.4 Lemme

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

<u>Preuve :</u> au (vrai) tableau !

$\blacksquare$

1.5 Corollaire

La norme comme application de $(E, \|\cdot\|)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est une application continue.

<u>Preuve :</u> au (vrai) tableau !

$\blacksquare$

I. a) Caractérisation topologique

1.6 Proposition

Une fonction $f : E \to F$ est continue ssi pour tout ouvert O, l'image réciproque $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E.

Preuve : au (vrai) tableau ! ■

I. a) Caractérisation topologique

1.6 Proposition

Une fonction $f : E \to F$ est continue ssi pour tout ouvert O, l'image réciproque $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E.

1.7 Corollaire

Une fonction $f : E \to F$ est continue ssi pour tout fermé F, l'image réciproque $f^{-1}(F)$ est un fermé de E.

Preuve : au (vrai) tableau ! ∎

I. a) Caractérisation topologique

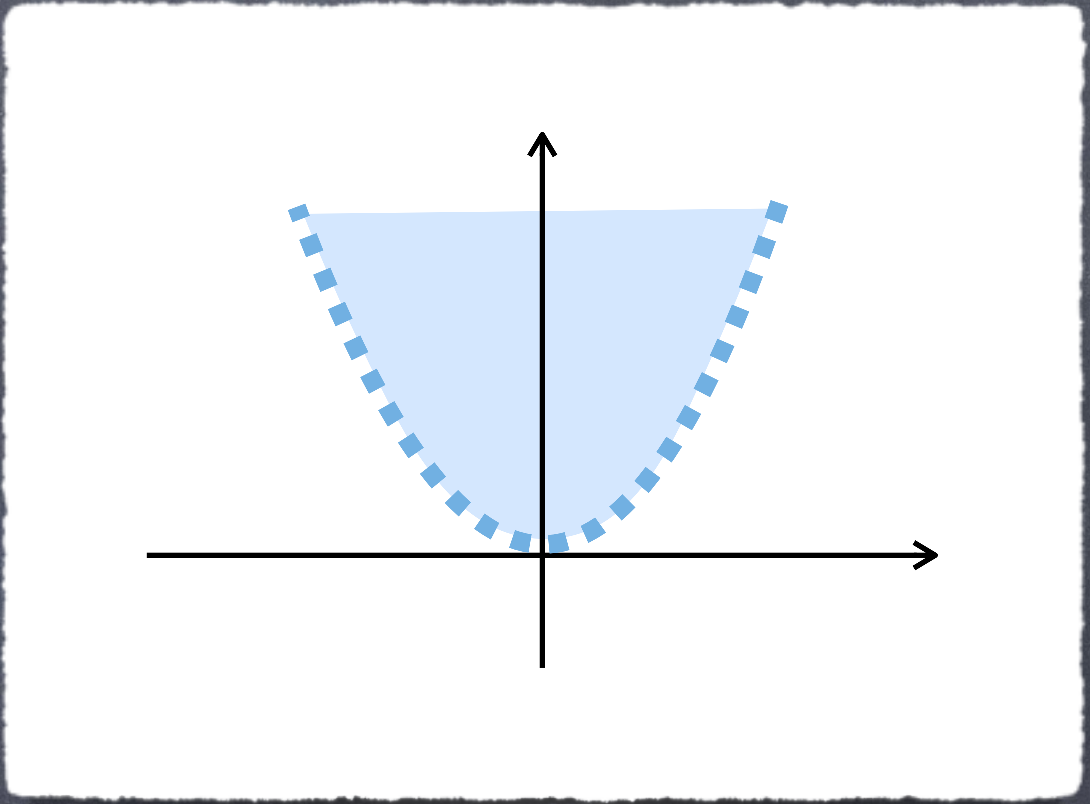
Exemples :

- Montrons que l'ensemble

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > x^2\}$$

est un ouvert.

(détails au (vrai) tableau)



I. a) Caractérisation topologique

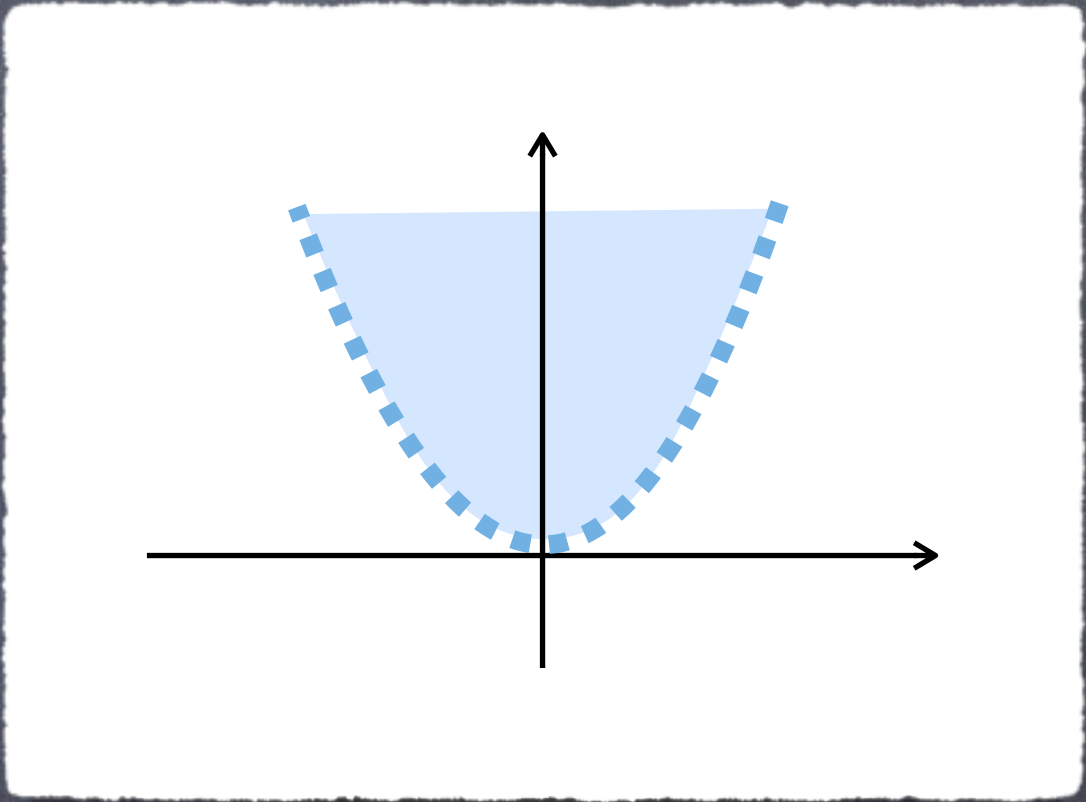
Exemples :

- Montrons que l'ensemble

  $$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > x^2\}$$

est un ouvert.

(détails au (vrai) tableau)



- L'ensemble définie par :

  $$A = \{f \in E \text{ t.q. } \|f\|_1 = 1\} \quad \subset \quad E = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$$

est un fermé.

(détails au (vrai) tableau)

I. a) Caractérisation topologique

1.6 Proposition

Une fonction $f : E \to F$ est continue ssi pour tout ouvert O, l'image réciproque $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E.

1.7 Corollaire

Une fonction $f : E \to F$ est continue ssi pour tout fermé F, l'image réciproque $f^{-1}(F)$ est un fermé de E.

Remarque :

L'image d'un ouvert par une application continue n'est pas nécessairement un ouvert !
Pour $f : x \in \mathbb{R} \to x^2$, on a $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$ fermé.

I. b) Continuité uniforme

1.8 Définition (continuité uniforme)

Soit $f : D(f) \to F$. f est dite uniformément continue ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall (x, y) \in D(f)^2 \quad \|x - y\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$$

I. b) Continuité uniforme

1.8 Définition (continuité uniforme)

Soit $f : D(f) \to F$. f est dite uniformément continue ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall (x, y) \in D(f)^2 \quad \|x - y\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$$

Remarques :

- À la différence de la continuité qui est une notion locale (en un point), la continuité uniforme est une notion globale.

I. b) Continuité uniforme

1.8 Définition (continuité uniforme)

Soit $f : D(f) \to F$. f est dite uniformément continue ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall (x, y) \in D(f)^2 \quad \|x - y\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$$

Remarques :

- À la différence de la continuité qui est une notion locale (en un point), la continuité uniforme est une notion globale.
- Une fonction uniformément continue est continue sur $D(f)$.

I. b) Continuité uniforme

1.8 Définition (continuité uniforme)

Soit $f : D(f) \to F$. f est dite uniformément continue ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall (x, y) \in D(f)^2 \quad \|x - y\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$$

I. b) Continuité uniforme

1.8 Définition (continuité uniforme)

Soit $f : D(f) \to F$. f est dite uniformément continue ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall (x,y) \in D(f)^2 \quad \|x-y\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_F \leq \varepsilon$$

1.9 Théorème de Heine (admis)

Une fonction continue sur A compact est uniformément continue sur A.

I. c) Continuité uniforme

Exemple (fonctions Lip.)

1.10 Définition (fonction Lipschitzienne)

On dit que f est Lipschitzienne ssi il existe $k > 0$ t.q.

$$\forall (x, y) \in D(f)^2 \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$$

I. c) Continuité uniforme

Exemple (fonctions Lip.)

1.10 Définition (fonction Lipschitzienne)

On dit que f est Lipschitzienne ssi il existe $k > 0$ t.q.

$$\forall (x, y) \in D(f)^2 \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$$

1.11 Lemme

Les fonctions Lip. sont uniformément continue.

Preuve : il suffit de prendre $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ ∎

I. c) Continuité uniforme

Exemple (fonctions Lip.)

1.10 Définition (fonction Lipschitzienne)

On dit que f est Lipschitzienne ssi il existe $k > 0$ t.q.

$$\forall (x, y) \in D(f)^2 \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$$

1.11 Lemme

Les fonctions Lip. sont uniformément continue.

1.12 Proposition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. f est Lip. ssi $|f'(x)| \leq k$

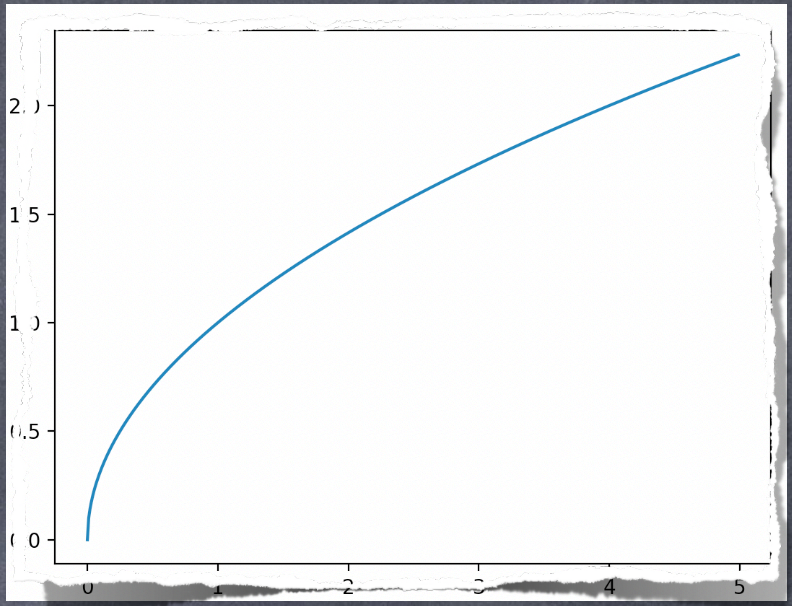
Preuve : au (vrai) tableau.

I. c) Continuité uniforme

Autre exemples :

- Montrons que la fonction $f : x \in \mathbb{R}^+ \to \sqrt{x}$ est uniformément continue.

  (détails au (vrai) tableau)

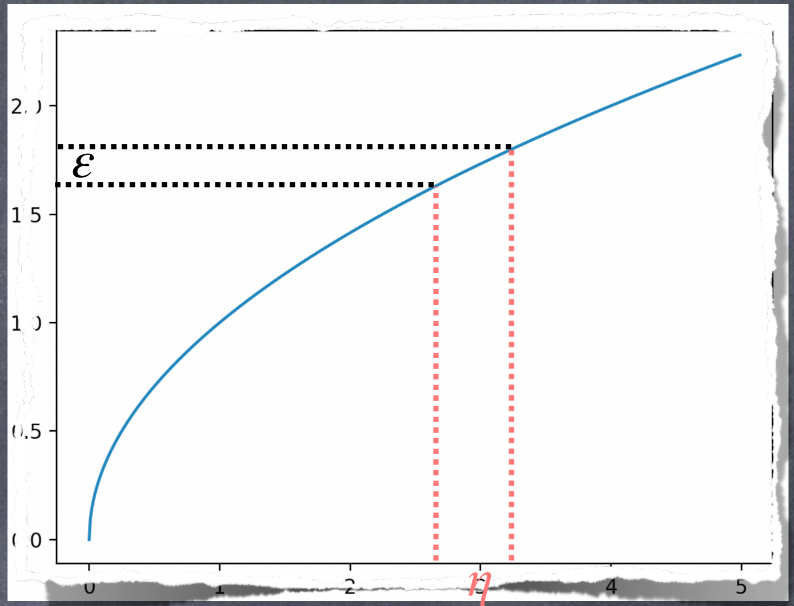


I. c) Continuité uniforme

Autre exemples :

- Montrons que la fonction $f : x \in \mathbb{R}^+ \to \sqrt{x}$ est uniformément continue.

  (détails au (vrai) tableau)

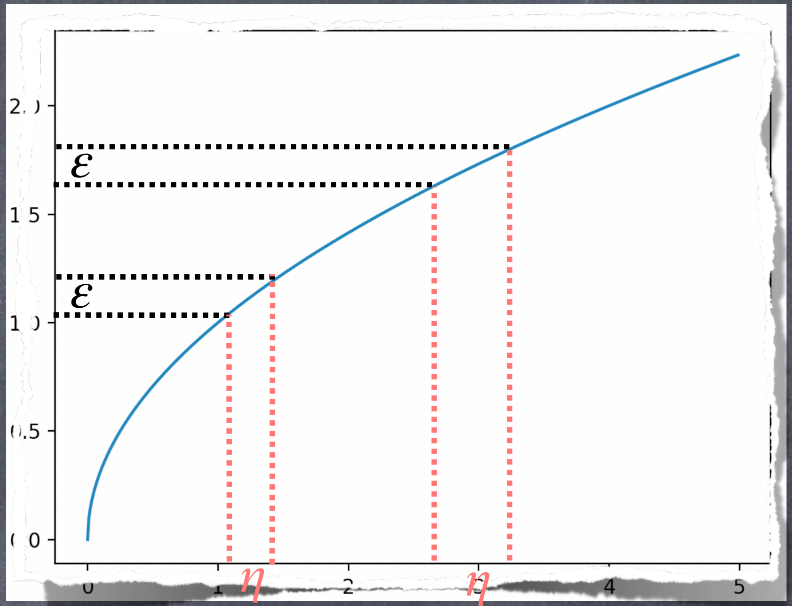


I. c) Continuité uniforme

Autre exemples :

- Montrons que la fonction $f : x \in \mathbb{R}^+ \to \sqrt{x}$ est uniformément continue.

  (détails au (vrai) tableau)

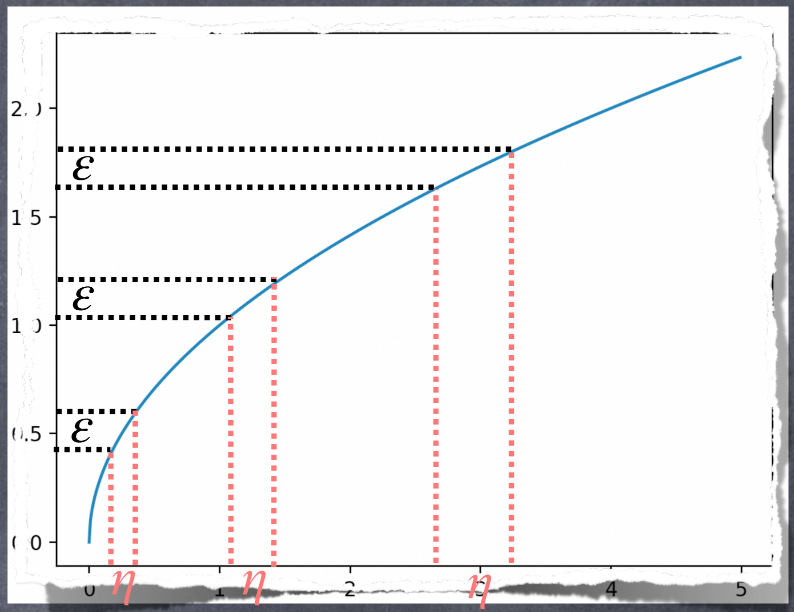


I. c) Continuité uniforme

Autre exemples :

- Montrons que la fonction $f : x \in \mathbb{R}^+ \to \sqrt{x}$ est uniformément continue.

  (détails au (vrai) tableau)



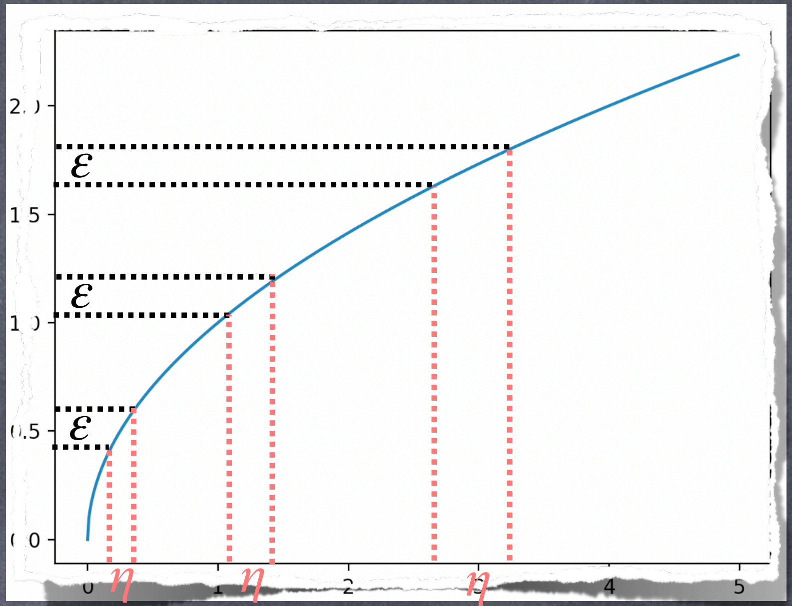
$\eta > 0$

I. c) Continuité uniforme

Autre exemples :

- Montrons que la fonction $f : x \in \mathbb{R}^{+} \to \sqrt{x}$ est uniformément continue.

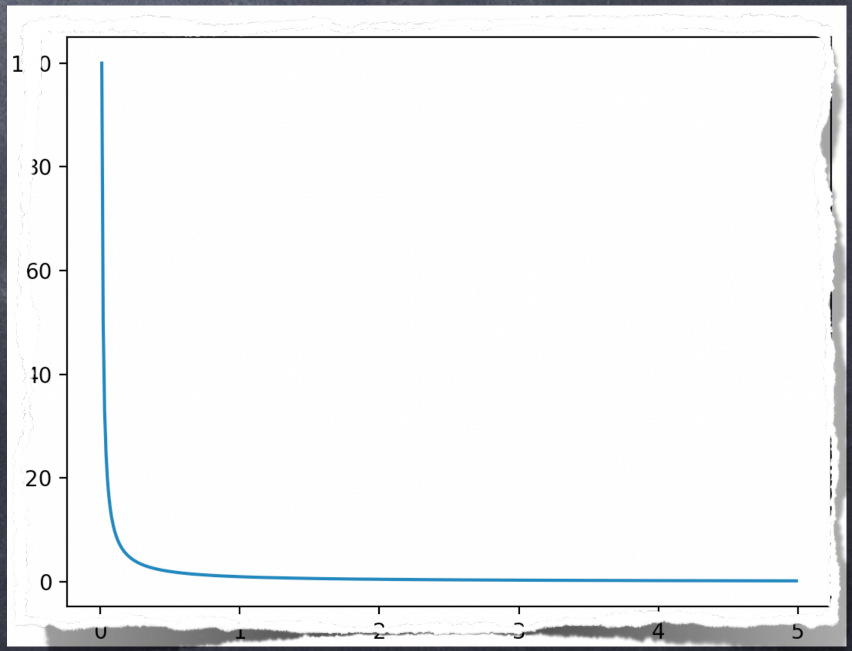
  (détails au (vrai) tableau)



$\eta > 0$

- Que peut-on dire pour la fonction $f : x \in \mathbb{R}^{*+} \to \dfrac{1}{x}$?

  (détails au (vrai) tableau)

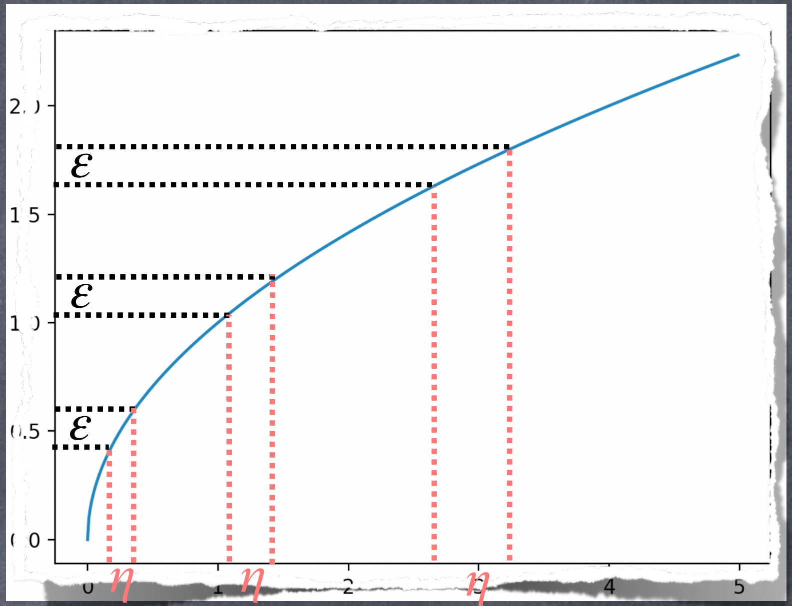


I. c) Continuité uniforme

Autre exemples :

- Montrons que la fonction $f : x \in \mathbb{R}^+ \to \sqrt{x}$ est uniformément continue.

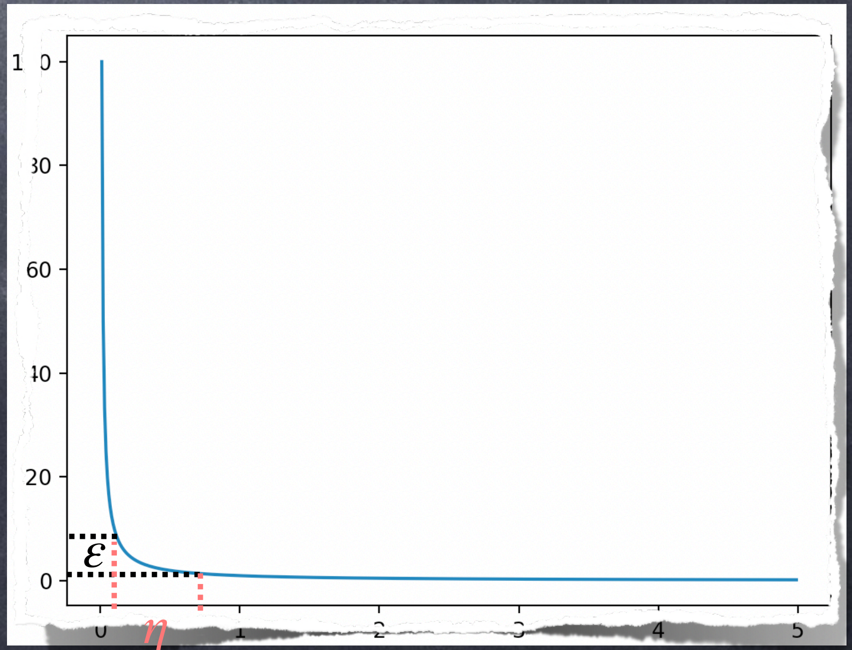
  (détails au (vrai) tableau)



$\eta > 0$

- Que peut-on dire pour la fonction $f : x \in \mathbb{R}^{*+} \to \dfrac{1}{x}$?

  (détails au (vrai) tableau)

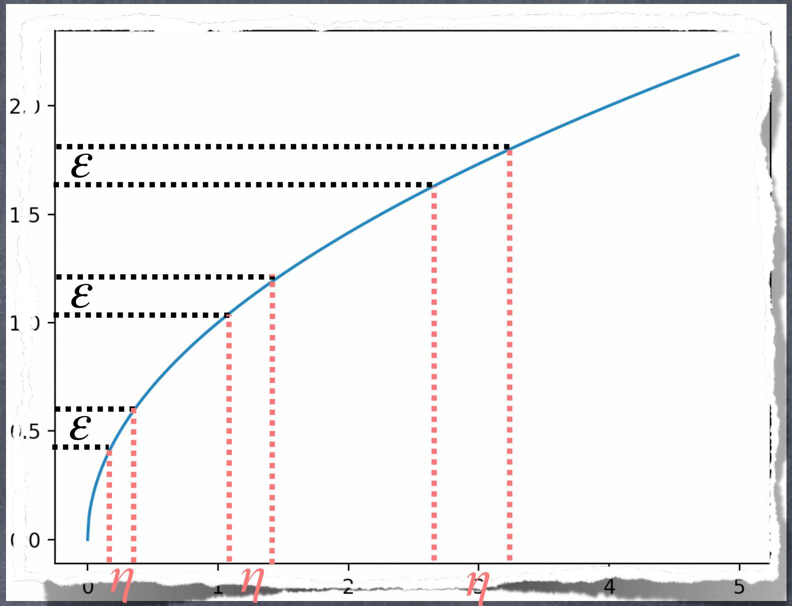


I. c) Continuité uniforme

Autre exemples :

- Montrons que la fonction $f : x \in \mathbb{R}^{+} \to \sqrt{x}$ est uniformément continue.

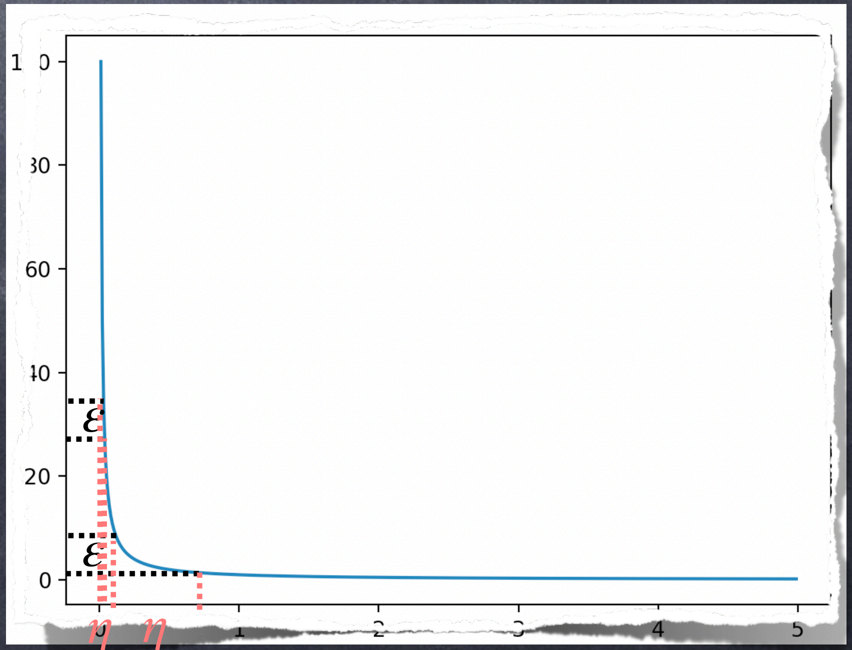
  (détails au (vrai) tableau)



$\eta > 0$

- Que peut-on dire pour la fonction $f : x \in \mathbb{R}^{*+} \to \dfrac{1}{x}$?

  (détails au (vrai) tableau)



$\eta \to 0$

I. c) Continuité uniforme

1.13 Théorème

Soit $f : A \subset E \to F$ uniformément continue avec F complet. Alors on peut prolonger de manière unique la fonction sur $\overline{A}$ et le prolongement est aussi u.c.

Idée Preuve : au (vrai) tableau.

$\blacksquare$

Remarque

L'application $f : x \in \mathbb{R}^{*+} \to \dfrac{1}{x}$ est continue mais non absolument continue. On ne peut pas la prolonger en 0.

Au programme (chapitre 3) :

Objectif :

Étudier les propriétés de fonctions continues d'un evn dans un autre.

Plan :

I. Limite et continuité

II. Les applications linéaires

a) Caractérisation continuité

b) Norme d'une application linéaire

III. L'intégrale de Riemann

II. a) Caractérisation de la continuité

2.1 Définition

Soit $L : E \to F$. On dira que l'application est linéaire ssi :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu),\quad L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y)$$

II. a) Caractérisation de la continuité

2.1 Définition

Soit $L : E \to F$. On dira que l'application est linéaire ssi :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu),\quad L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y)$$

2.2 Proposition

Soit L une application linéaire. On a alors l'équivalence des propositions suivantes :

1. L est continue
2. L est continue en o
3. L est borné sur la boule unité
4. $\exists M \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in E,\quad \|L(x)\|_F \leq M\|x\|_E$
5. L est Lip. (donc uniformément continue)

Preuve : au (vrai) tableau.

II. a) Caractérisation de la continuité

Exemples :

- L'application

$$I : f \in \left(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right) \to \int_0^1 f(x)\,dx \in \left(\mathbb{R}, |\cdot|\right)$$

est linéaire et continue.

(détails au (vrai) tableau)

II. a) Caractérisation de la continuité

Exemples :

- L'application

$$I : f \in \left(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right) \to \int_0^1 f(x)\,dx \in \left(\mathbb{R}, |\cdot|\right)$$

est linéaire et continue.

(détails au (vrai) tableau)

- L'application

$$D : f \in \left(C^1([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right) \to f' \in \left(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$$

est linéaire mais pas continue !

(détails au (vrai) tableau)

II. a) Caractérisation de la continuité

2.3 Proposition

Soit L une application linéaire de E dans F avec E un evn de dimension finie. Alors L est continue.

Preuve : au (vrai) tableau.

∎

II. b) Norme d'une application linéaire

2.4 Définition (norme subordonnée)

Soit $L : E \to F$ une application linéaire continue. On pose :

$$\|L\| = \sup_{x \in E \setminus 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

2.5 Proposition (admis)

L'application $\|\cdot\|$ définie ci-dessus est une norme sur l'espace $\mathscr{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F.

Remarque

Dans le cas où E est de dimension finie, le sup est atteint et on peut parler de max.

II. b) Norme d'une application linéaire

2.4 Définition (norme subordonnée)

Soit $L : E \to F$ une application linéaire continue. On pose :

$$\|L\| = \sup_{x \in E \setminus 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

2.5 Proposition (admis)

L'application $\|\cdot\|$ définie ci-dessus est une norme sur l'espace $\mathscr{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F.

Remarque 2

Cette norme est souvent appelée dans la littérature comme norme « triple ».

II. b) Norme d'une application linéaire

2.4 Définition (norme subordonnée)

Soit $L : E \to F$ une application linéaire continue. On pose :

$$\|L\| = \sup_{x \in E \backslash 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

2.5 Proposition (admis)

L'application $\|\cdot\|$ définie ci-dessus est une norme sur l'espace $\mathscr{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F.

2.6 Proposition

La norme vérifie : $\|L^k\| \leq \|L\|^k$

Preuve : au (vrai) tableau.

II. b) Norme d'une application linéaire

Cas d'un evn de dimension finie :

Rappelons que dans un evn de dimension finie, l'application linéaire L peut être représenté par sa matrice :

$$\forall x \in E, \quad L(x) = \sum_{i=1}^{n} L(e_i)x_i \qquad \text{où} \qquad x = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} L_{ij} e_j x_i$$

et où les $(e_i)_{i=1,\cdots,n}$ est une base de E.

On définit alors la matrice de coefficients L_{ij}.

II. b) Norme d'une application linéaire

Cas d'un evn de dimension finie :

2.7 Proposition

On a :

$$\|L\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |L_{ij}| \quad \text{et} \quad \|L\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |L_{ij}|.$$

Preuve : au (vrai) tableau.

∎

II. b) Norme d'une application linéaire

Exemple en dimension infinie

Considérons l'application

$$I : f \in \left(C^0([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty \right) \to \int_a^b f(x)\,dx \in \left(\mathbb{R}, |\cdot|\right)$$

Calculons sa norme.

(détails au (vrai) tableau)

II. b) Norme d'une application linéaire

Exemple en dimension infinie

Considérons l'application

$$I : f \in \left(C^0([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right) \to \int_a^b f(x)\,dx \in \left(\mathbb{R}, |\cdot|\right)$$

Calculons sa norme.

(détails au (vrai) tableau)

Qu'obtient-on en remplaçant la norme infinie par la norme 2 ?

(détails au (vrai) tableau)

Au programme (chapitre 3) :

Objectif :

Étudier les propriétés de fonctions continues d'un evn dans un autre.

Plan :

I. Limite et continuité

II. Les applications linéaires

III. L'intégrale de Riemann

a) Construction de l'intégrale

b) Quelques propriétés

III. a) Construction de l'intégrale

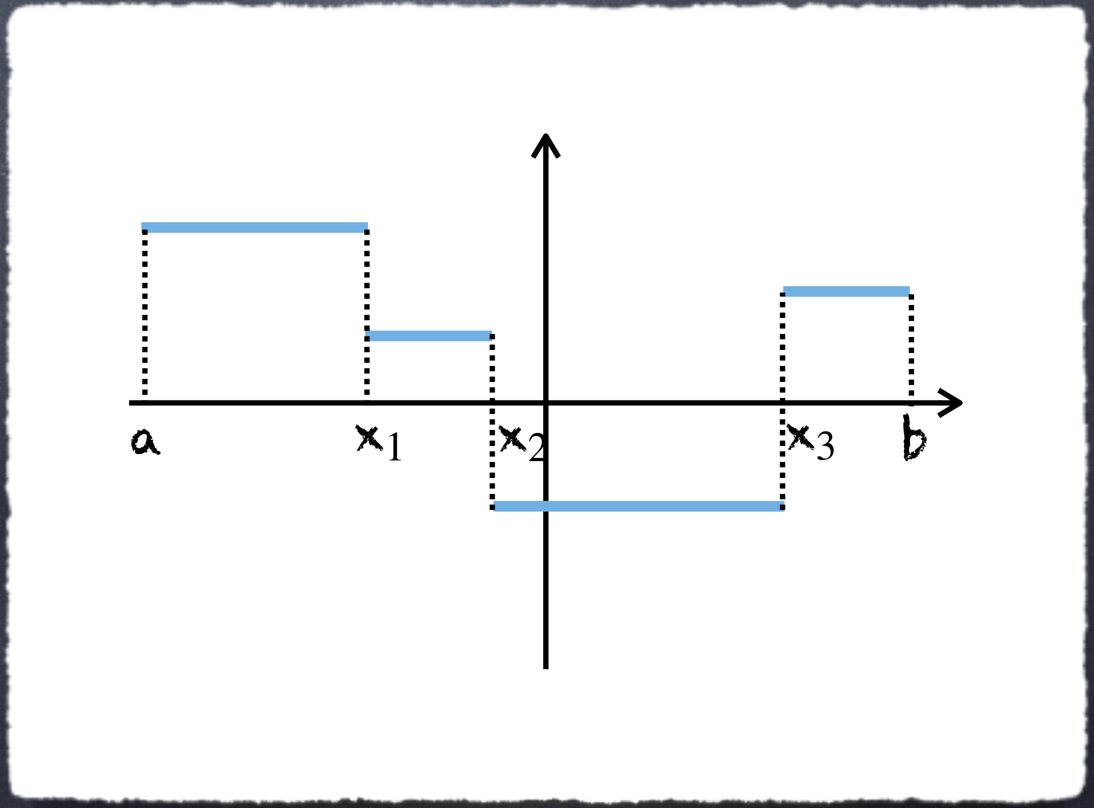
Considérons un intervalle $[a, b]$.

3.1 Définition

f est une fonction escalier s'il existe une subdivision :

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

telle que $f(x) = a_i$ constant sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.



Exemple de fct escalier

III. a) Construction de l'intégrale

Considérons un intervalle $[a, b]$.

3.1 Définition

f est une fonction escalier s'il existe une subdivision :

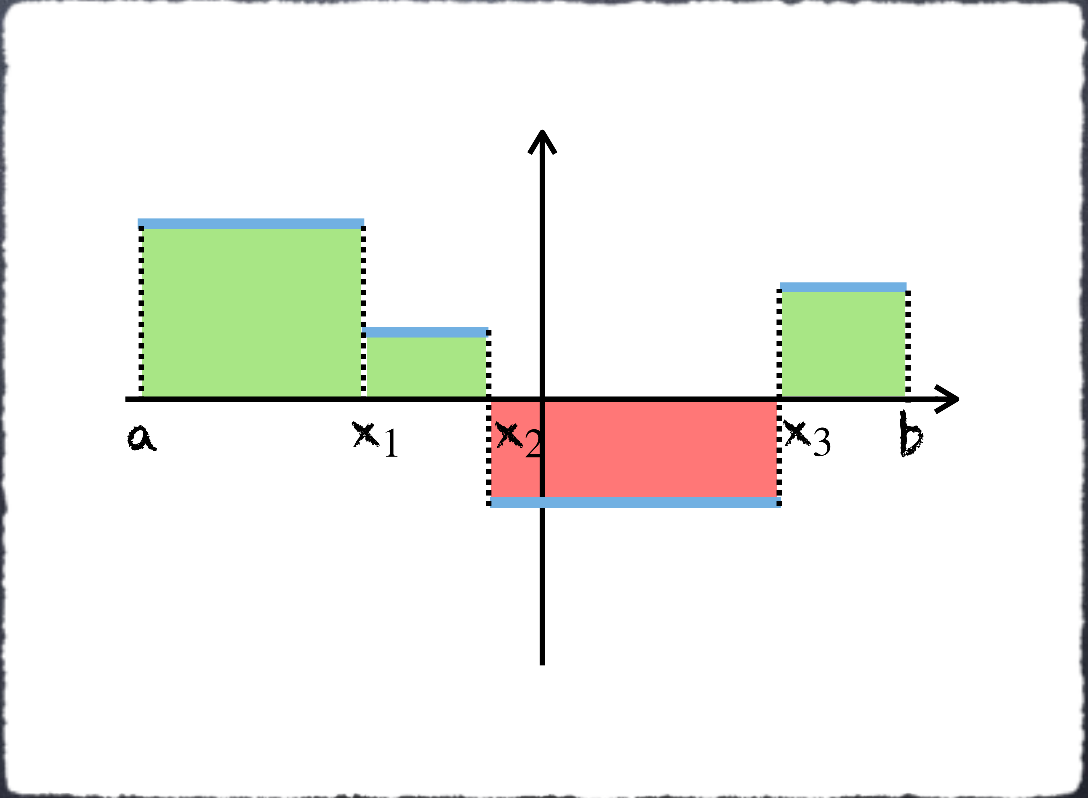
$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

telle que $f(x) = a_i$ constant sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.

3.2 Définition (intégrale)

L'intégrale d'une fct. escalier est définie par :

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) a_i$$



Exemple de fct escalier

III. a) Construction de l'intégrale

3.3 Proposition

Soit f et g deux fonctions escaliers. Alors :

- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$
- $f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad I(f) \geq 0$

Preuve : au (vrai) tableau.

■

III. a) Construction de l'intégrale

3.3 Proposition

Soit f et g deux fonctions escaliers. Alors :

- $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\quad I(\alpha f+\beta g)=\alpha I(f)+\beta I(g)$
- $f\geq 0 \quad\Rightarrow\quad I(f)\geq 0$

3.4 Proposition

L'application I est uniformément continue.

Preuve : au (vrai) tableau.

∎

III. a) Construction de l'intégrale

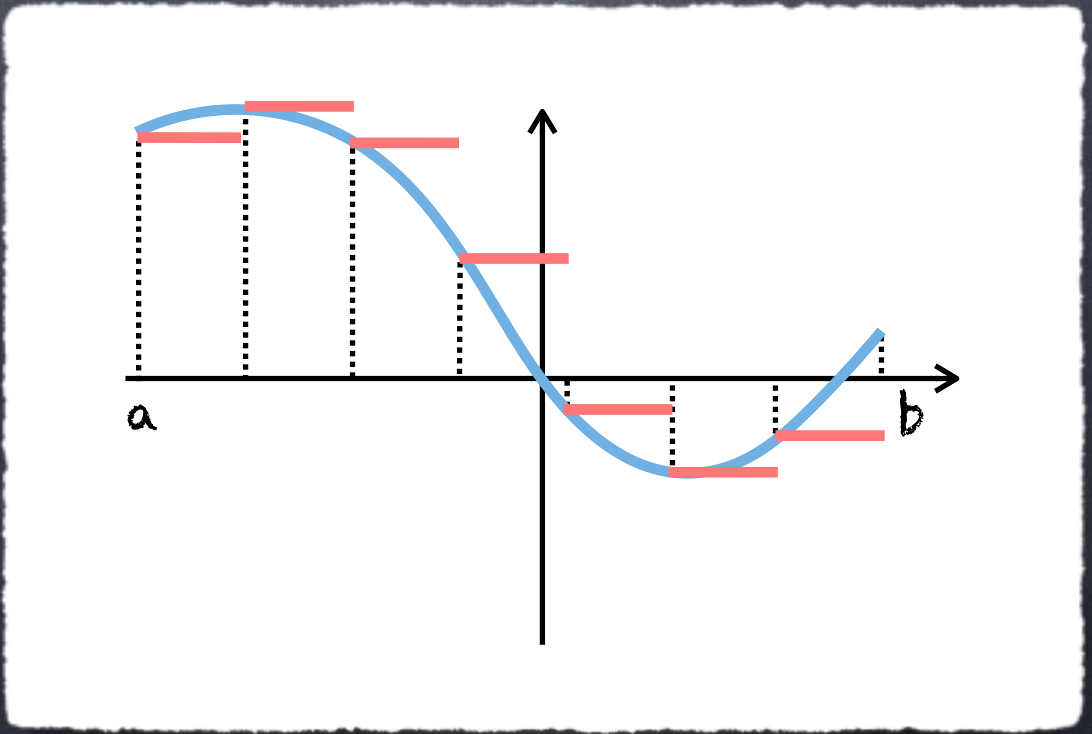
Intégrale d'une fonction continue par morceaux :

L'idée est d'approcher une fonction continue par une suite de fonctions escalier.

Soit f une fonction continue. Posons :

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ 1_{[x_i, x_{i+1}[}(x) \quad \text{où } 1_{[x_i, x_{i+1}[} = \begin{vmatrix} 1 & \text{si} & x \in [x_i, x_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon} & \end{vmatrix}$$

et $x_i = a + i\dfrac{b-a}{(n+1)}$.



III. a) Construction de l'intégrale

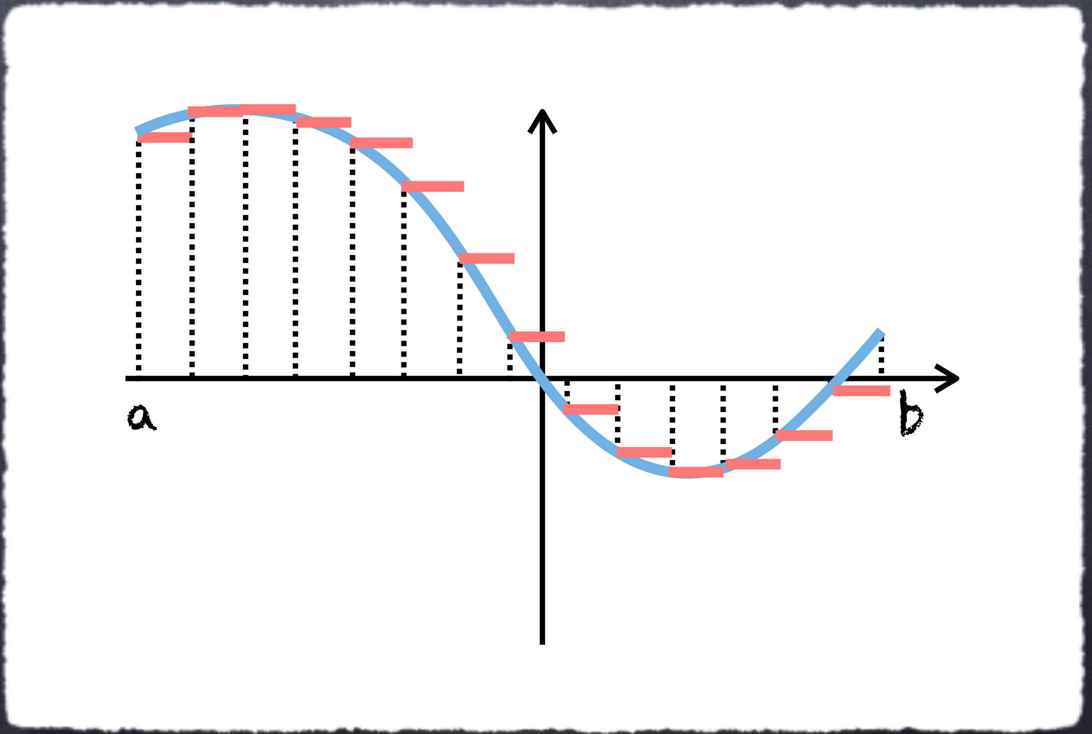
Intégrale d'une fonction continue par morceaux :

L'idée est d'approcher une fonction continue par une suite de fonctions escalier.

Soit f une fonction continue. Posons :

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ 1_{[x_i, x_{i+1}[}(x) \quad \text{où } 1_{[x_i,x_{i+1}[} = \left| \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x \in [x_i, x_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon} & \end{array} \right.$$

et $x_i = a + i\dfrac{b-a}{(n+1)}$.



III. a) Construction de l'intégrale

Intégrale d'une fonction continue par morceaux :

L'idée est d'approcher une fonction continue par une suite de fonctions escalier.

Soit f une fonction continue. Posons :

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ 1_{[x_i, x_{i+1}[}(x) \quad \text{où } 1_{[x_i, x_{i+1}[} = \begin{vmatrix} 1 & \text{si} & x \in [x_i, x_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon} & \end{vmatrix}$$

3.5 Proposition

La suite f_n converge en norme infinie vers f.

Idée de la preuve : au (vrai) tableau.

∎

III. a) Construction de l'intégrale

Intégrale d'une fonction continue par morceaux :

L'idée est d'approcher une fonction continue par une suite de fonctions escalier.

Soit f une fonction continue. Posons :

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ 1_{[x_i, x_{i+1}[}(x) \quad \text{où } 1_{[x_i, x_{i+1}[} = \begin{vmatrix} 1 & \text{si} & x \in [x_i, x_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon} & \end{vmatrix}$$

Remarque :

On montre avec cette proposition que f appartient à l'adhérence de E : espace des fonctions escalier. L'adhérence de E est l'ensemble des <u>fonctions réglées</u>.

III. a) Construction de l'intégrale

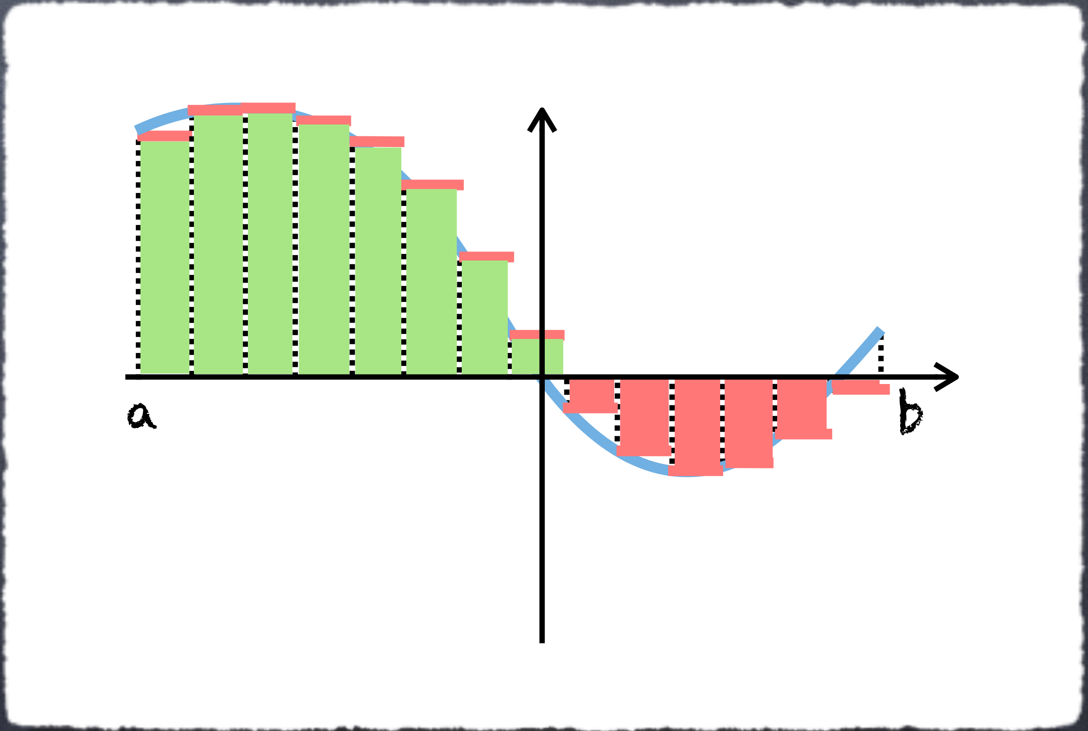
Intégrale d'une fonction continue par morceaux :

L'application I étant u.c., on a vu qu'on peut l'étendre à l'adhérence de son domaine de définition.

Pour une fonction continue, on aura alors :

$$\mathrm{I}(f) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}(f_n)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,h$$



Remarque :

On sait que l'intégrale converge, mais a priori on n'a aucune information sur la vitesse de convergence.

III. a) Construction de l'intégrale

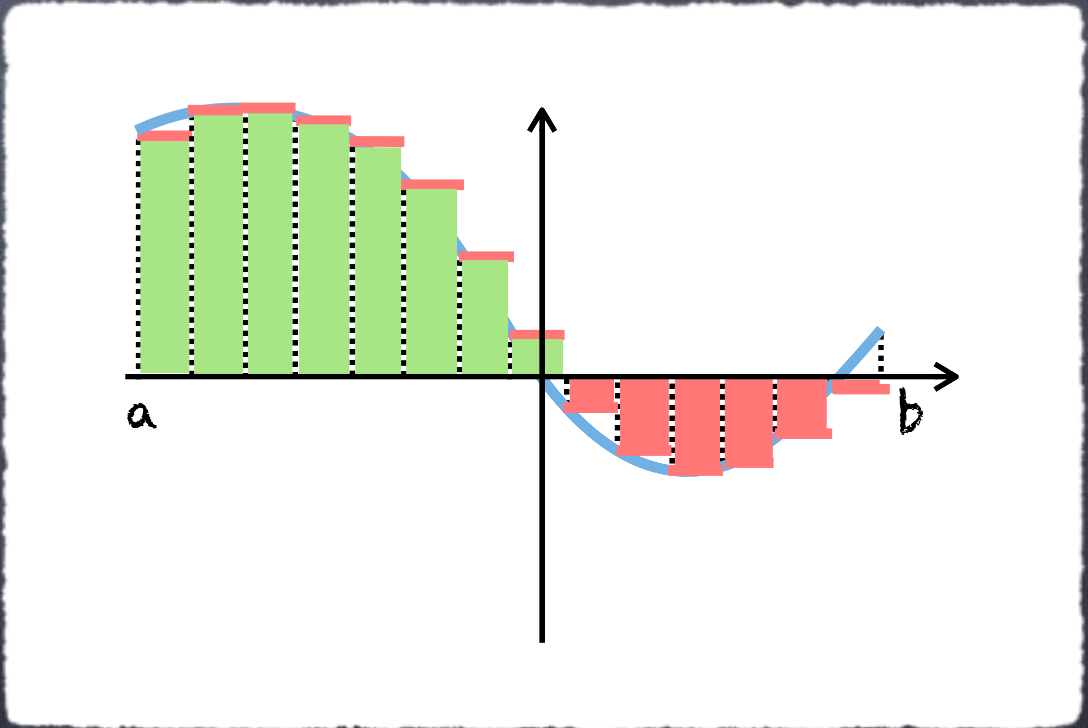
Intégrale d'une fonction continue par morceaux :

L'application I étant u.c., on a vu qu'on peut l'étendre à l'adhérence de son domaine de définition.

Pour une fonction continue, on aura alors :

$$\mathrm{I}(f) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}(f_n)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,h$$



Remarque 2 :

La proposition 3.3 s'étend aux fonctions continues par morceaux.

III. b) Quelques propriétés

3.6 Proposition (Formule Taylor reste intégrale)

Si f est une fonction $C^{n+1}([a,b])$, alors on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Preuve : au (vrai) tableau.

$\blacksquare$

III. b) Quelques propriétés

3.6 Proposition (Formule Taylor reste intégrale)

Si f est une fonction $C^{n+1}([a,b])$, alors on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

3.7 Corollaire (Inégalité Taylor - Lagrange)

Si f est une fonction $C^{n+1}([a,b])$, alors on a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Preuve : au (vrai) tableau.

III. b) Quelques propriétés

Une définition de l'exponentielle :

Une façon de définir la fonction exponentielle est de passer par la série :

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \longrightarrow e^x = \sum_{j\geq 0} \frac{x^j}{j!}$$

(détails au (vrai) tableau)

Plan détaillé chapitre 3

I. Limite et continuité

a) Caractérisation topologique

b) Continuité uniforme

II. Les applications linéaires

a) Caractérisation continuité

b) Norme d'une application linéaire

III. L'intégrale de Riemann

a) Construction de l'intégrale

b) Quelques propriétés