M7 : Complément d'analyse et initiation à la topologie

Chapitre 2 :

Espaces compacts, espaces complets

Cours 5-6-7[1/2]

Année 2020 - 2021

Contact : A. Tonnoir

antoine.tonnoir@insa-rouen.fr

Au programme (chapitre 2) :

Objectif :

Introduire les notions de d'espaces compacts et complets et voir les liens avec les notions du chap. 1.

Plan :

I. Les espaces compacts

II. Les espaces complets

Au programme (chapitre 2) :

Objectif :

Introduire les notions de d'espaces compacts et complets et voir les liens avec les notions du chap. 1.

Plan :

I. Les espaces compacts

a) Suites extraites

b) Propriétés d'un compacts

II. Les espaces complets

I. a) Suites extraites

On se placera, comme au chap. 1, dans le cas d'un evn E.

1.1 Définition (suite extraite)

Soit une suite $(u_n)_n$. On appelle suite extraite (ou sous suite) toute suite $(u_{\varphi(n)})_n$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

I. a) Suites extraites

On se placera, comme au chap. 1, dans le cas d'un evn E.

1.1 Définition (suite extraite)

Soit une suite $(u_n)_n$. On appelle suite extraite (ou sous suite) toute suite $(u_{\varphi(n)})_n$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Remarque :

La fonction φ vérifie $\varphi(n) \geq n$ pour tout n. En effet, étant strictement croissante, on a $\varphi(n) \geq \varphi(n-1) + 1$.

I. a) Suites extraites

On se placera, comme au chap. 1, dans le cas d'un evn E.

1.1 Définition (suite extraite)

Soit une suite $(u_n)_n$. On appelle suite extraite (ou sous suite) toute suite $(u_{\varphi(n)})_n$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

1.2 Proposition

Si $(u_n)_n$ a pour limite l, alors toute suite extraite est convergente et a pour limite l.

Preuve : au (vrai) tableau ! $\blacksquare$

Remarque :

La fonction φ vérifie $\varphi(n) \geq n$ pour tout n. En effet, étant strictement croissante, on a $\varphi(n) \geq \varphi(n-1) + 1$.

I. a) Suites extraites

1.3 Définition

Un point $u \in E$ est appelé valeur d'adhérence de la suite ssi il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ ayant pour limite u.

Exemple :

La suite $u_n = (-1)^n$ dans $E = \mathbb{R}$ a pour valeurs d'adhérence 1 et −1.

I. a) Suites extraites

1.3 Définition

Un point $u \in E$ est appelé valeur d'adhérence de la suite ssi il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ ayant pour limite u.

Remarques :

- Si la suite est convergente, alors elle admet une unique valeur d'adhérence (Corollaire direct de la Prop. 1.2).

I. a) Suites extraites

1.3 Définition

Un point $u \in E$ est appelé valeur d'adhérence de la suite ssi il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ ayant pour limite u.

Remarques :

- Si la suite est convergente, alors elle admet une unique valeur d'adhérence (Corollaire direct de la Prop. 1.2).
- Si la suite admet une unique valeur d'adhérence, elle n'est pas nécessairement convergente : $u_n = n((-1)^n + 1)$

I. a) Suites extraites

1.3 Définition

Un point $u \in E$ est appelé valeur d'adhérence de la suite ssi il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ ayant pour limite u.

Remarques :

- Si la suite est convergente, alors elle admet une unique valeur d'adhérence (Corollaire direct de la Prop. 1.2).
- Si la suite admet une unique valeur d'adhérence, elle n'est pas nécessairement convergente : $u_n = n((-1)^n + 1)$
- Si u est une valeur d'adhérence, alors on a la caractérisation suivante :

  $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \ \exists n \geq N$ t.q. $\|u_n - u\| \leq \varepsilon$

  (détails au (vrai) tableau)

I. b) Propriétés des compacts

1.4 Définition (compact)

Un ensemble $A \subset E$ est dit compact ssi $A = \emptyset$ ou si de toute suite de A, on peut extraire une sous suite convergente dans A.

I. b) Propriétés des compacts

1.4 Définition (compact)

Un ensemble $A \subset E$ est dit **compact** ssi $A = \emptyset$ ou si de toute suite de A, on peut extraire une sous suite **convergente dans A**.

1.5 Proposition

Tout compact A est fermé et borné.

<u>Preuve</u> : au (vrai) tableau ! ∎

I. b) Propriétés des compacts

1.4 Définition (compact)

Un ensemble $A \subset E$ est dit compact ssi $A = \emptyset$ ou si de toute suite de A, on peut extraire une sous suite convergente dans A.

I. b) Propriétés des compacts

1.4 Définition (compact)

Un ensemble $A \subset E$ est dit compact ssi $A = \emptyset$ ou si de toute suite de A, on peut extraire une sous suite convergente dans A.

1.5 Proposition

Tout compact A est fermé et borné.

I. b) Propriétés des compacts

1.4 Définition (compact)

Un ensemble $A \subset E$ est dit compact ssi $A = \emptyset$ ou si de toute suite de A, on peut extraire une sous suite convergente dans A.

1.5 Proposition

Tout compact A est fermé et borné.

1.6 Proposition

Si $A \subset B \subset E$ avec B compact, alors A est compact ssi il est fermé (dans E).

Preuve : au (vrai) tableau ! ■

I. b) Propriétés des compacts

1.7 Proposition

Si A et B sont compacts, alors $A \times B$ est aussi compact.

Preuve : au (vrai) tableau ! ■

I. b) Propriétés des compacts

1.7 Proposition

Si A et B sont compacts, alors $A \times B$ est aussi compact.

1.8 Proposition

L'intervalle $[a,b]$ est un compact de $\mathbb{R}$.

<u>Idée de preuve</u> : au (vrai) tableau ! ∎

I. b) Propriétés des compacts

1.7 Proposition

Si A et B sont compacts, alors $A \times B$ est aussi compact.

1.8 Proposition

L'intervalle $[a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}$.

1.9 Corollaire

Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées bornées.

<u>Preuve</u> : au (vrai) tableau ! ∎

I. b) Propriétés des compacts

1.7 Proposition

Si A et B sont compacts, alors AxB est aussi compact.

1.8 Proposition

L'intervalle $[a,b]$ est un compact de $\mathbb{R}$.

1.9 Corollaire

Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées bornées.

Remarque :

En fait, ce résultat se généralise à tous les evn de dimension finie.

I. b) Propriétés des compacts

1.10 Proposition

Soit (u_n) une suite de A compact, alors la suite est convergente ssi elle admet une unique valeur d'adhérence.

<u>Preuve</u> : au (vrai) tableau ! ∎

I. b) Propriétés des compacts

1.10 Proposition

Soit (u_n) une suite de A compact, alors la suite est convergente ssi elle admet une unique valeur d'adhérence.

Remarque :

La suite $u_n = n((-1)^n + 1)$ n'admet qu'une valeur d'adhérence mais n'est pas borné.

Au programme (chapitre 2) :

Objectif :

Introduire les notions de d'espaces compacts et complets et voir les liens avec les notions du chap. 1.

Plan :

I. Les espaces compacts

II. Les espaces de Banach

a) Définition et propriétés

b) Espace de Banach

II. a) Définition et propriétés

2.1 Définition (suite de Cauchy)

Soit une suite $(u_n)_n$. On dit qu'elle est de Cauchy ssi

$$\lim_{(n,m)\to+\infty} \|u_n - u_m\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (n,m) \geq n_0 \ \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon$$

Remarques :

- La définition dépend du choix de la norme.
- L'ordre des quantificateurs est très important !

II. a) Définition et propriétés

2.1 Définition (suite de Cauchy)

Soit une suite $(u_n)_n$. On dit qu'elle est de Cauchy ssi

$$\lim_{(n,m)\to+\infty} \|u_n - u_m\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (n,m) \geq n_0\ \ \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon$$

2.2 Proposition

Toute suite convergente est de Cauchy.

Preuve : au (vrai) tableau ! ■

II. a) Définition et propriétés

2.1 Définition (suite de Cauchy)

Soit une suite $(u_n)_n$. On dit qu'elle est de Cauchy ssi

$$\lim_{(n,m)\to+\infty} \|u_n - u_m\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (n,m) \geq n_0 \ \ \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon$$

2.2 Proposition

Toute suite convergente est de Cauchy.

2.3 Proposition

Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve : au (vrai) tableau ! ∎

II. a) Définition et propriétés

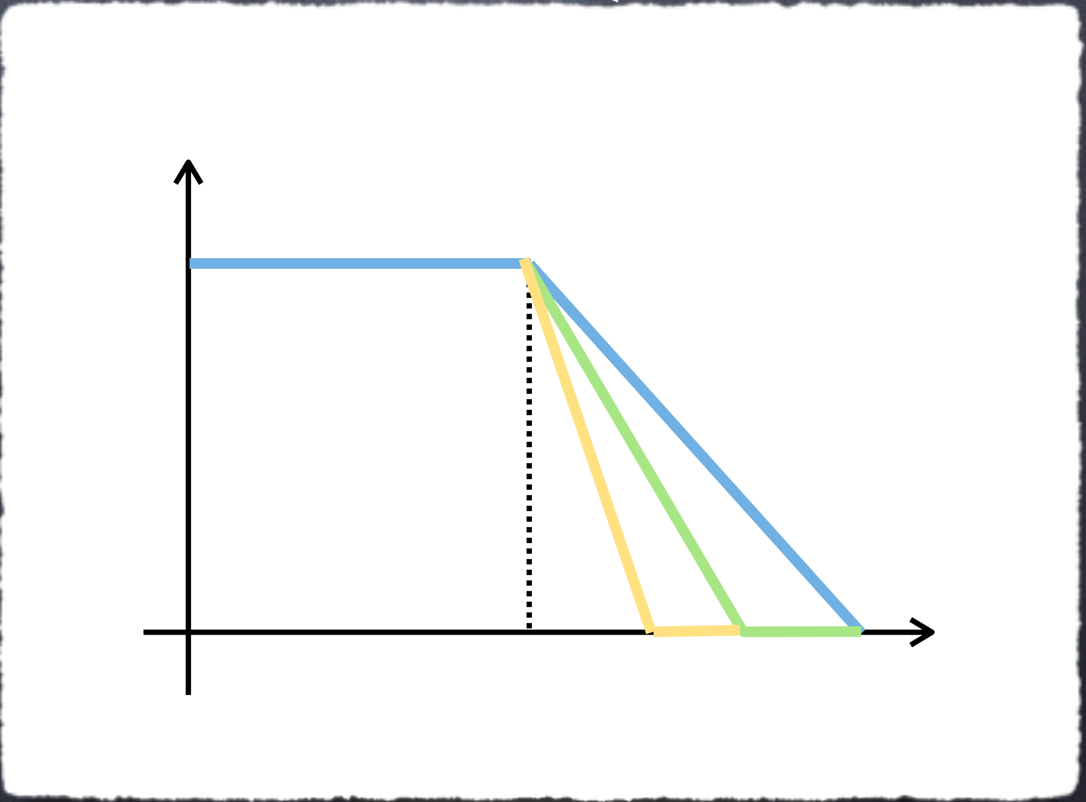
Exemple :

Considérons l'espace : $E = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

Dans cet espace, considérons la suite :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,1/2] \\ -n(x - 1/2) + 1 \text{ si } x \in [1/2, 1/2 + 1/n] \\ 0 \text{ si } x \in [1/2 + 1/n, 1] \end{cases}$$

définie pour $n \geq 2$.



Cette suite est de Cauchy mais ne converge pas dans E !
(détails au (vrai) tableau).

II. a) Définition et propriétés

2.4 Définition (espace de complet)

Un ensemble $A \subset E$ est dit **complet** ssi toute suite de Cauchy de A converge dans A.

Remarque :

L'exemple précédent montre que l'ensemble $E = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue$\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas complet.

II. a) Définition et propriétés

2.4 Définition (espace de complet)

Un ensemble $A \subset E$ est dit complet ssi toute suite de Cauchy de A converge dans A.

2.5 Proposition

Si A est compact, alors il est complet.

Preuve : au (vrai) tableau ! ■

II. a) Définition et propriétés

2.4 Définition (espace de complet)

Un ensemble $A \subset E$ est dit **complet** ssi toute suite de Cauchy de A converge dans A.

2.5 Proposition

Si A est compact, alors il est complet.

2.6 Proposition

Soit $A \subset E$ complet. A est complet ssi A est fermé.

Preuve : au (vrai) tableau ! $\blacksquare$

II. a) Définition et propriétés

Le cas des réels :

2.7 Lemme

L'intervalle $[-1,1]$ est complet.

Preuve : C'est un ensemble compact $\blacksquare$

II. a) Définition et propriétés

Le cas des réels :

2.7 Lemme

L'intervalle $[-1,1]$ est complet.

Preuve : C'est un ensemble compact ■

2.8 Corollaire

L'ensemble $\mathbb{R}$ est complet.

Preuve : au (vrai) tableau ! ■

II. b) Espace de Banach

2.9 Définition (espace de Banach)

Un espace de Banach est un evn $(E, \|\cdot\|)$ complet.

Remarque :

Les espaces de Banach sont particulièrement important car on aura un critère simple pour assurer la convergence d'une suite, le critère de Cauchy.

II. b) Espace de Banach

2.9 Définition (espace de Banach)

Un espace de Banach est un evn $(E, \|\cdot\|)$ complet.

2.10 Théorème

Tout evn de dimension finie est un espace de Banach.

Preuve : au (vrai) tableau ! ■

Remarque :

Pour démontrer ce résultat, on admettra (temporairement) que dans un evn de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.

II. b) Espace de Banach

Un exemple (important) en dimension infinie

II. b) Espace de Banach

Un exemple (important) en dimension infinie

2.11 Théorème

L'espace $E = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue et borné$\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est complet.

Preuve : au (vrai) tableau ! ■

Plan détaillé chapitre 2

I. Les espaces compacts

a) Suites extraites

b) Propriétés d'un compacts

II. Les espaces complets

a) Définition et propriétés

b) Espace de Banach