M7 : Complément d'analyse et initiation à la topologie

Chapitre 1 :

Notions de topologie dans un espace vectoriel normé

Cours 1-2-3-4

Année 2020 - 2021

Contact : A. Tonnoir

antoine.tonnoir@insa-rouen.fr

Introduction

Ce cours est une introduction à la topologie et à l'analyse fonctionnelle. Il s'inscrit dans la continuité des cours de M1, M4, M5 et M6 et est basé sur le cours donné par J.M. Cabanial les années précédentes.

On s'intéressera notamment à :

- Donner des propriétés géométriques des espaces vectoriels normés (evn) et les liens avec la notion de limite.
- Étudier les propriétés de fonctions définies sur des evn.
- Étudier des critères pour montrer l'existence et l'unicité de solution d'équations.

Au programme (chapitre 1) :

Objectif :

Introduire des notions de géométrie dans un evn

Plan :

I. Les espaces vectoriels normés

II. Ouverts, fermés et propriétés topologiques

III. Intérieur, adhérence et frontière

Au programme (chapitre 1) :

Objectif :

Introduire des notions de géométrie dans un evn

Plan :

I. Les espaces vectoriels normés

a) Définition et propriétés

b) Suites dans un evn

II. Ouverts, fermés et propriétés topologiques

III. Intérieur, adhérence et frontière

I. a) Définition et propriétés

1.1 Définition

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est un ensemble vérifiant :

- $\forall (u, v) \in E \times E, \quad u + v \in E$
- $\forall u \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \lambda u \in E$

Remarque :

Dans la définition ci-dessus, on ne rappelle pas les propriétés que vérifient les lois de composition interne « + » et de composition externe « . ».

I. a) Définition et propriétés

1.1 Définition

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est un ensemble vérifiant :

- $\forall (u, v) \in E \times E, \quad u + v \in E$
- $\forall u \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \lambda u \in E$

Exemples :

- L'espace $\mathbb{R}^n$ est un ev.
- L'espace $\mathbb{P}^n$ est un ev. (détails au (vrai) tableau).

Remarque :

Dans la définition ci-dessus, on ne rappelle pas les propriétés que vérifient les lois de composition interne « + » et de composition externe « . ».

I. a) Définition et propriétés

1.1 Définition

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est un ensemble vérifiant :

- $\forall (u, v) \in E \times E, \quad u + v \in E$
- $\forall u \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \lambda u \in E$

1.2 Définition

Une application N, noté également $\| \cdot \|$, de E dans $\mathbb{R}^+$ est une norme ssi :

- elle est définie : $\forall x \in E, \ N(x) = 0 \Leftrightarrow 0 \ (= 0_E)$
- elle est homogène : $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
- elle vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

I. a) Définition et propriétés

1.3 Définition

On appellera **ev normé** (evn) un espace vectoriel E muni d'une norme N.

Remarque :

La notion de norme permet de définir une distance entre deux éléments de E : $d(x, y) = N(x - y)$

Soulignons qu'on peut définir également une notion de distance indépendamment de la notion de norme :

On appelle distance une application $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

I. a) Définition et propriétés

1.3 Définition

On appellera ev normé (evn) un espace vectoriel E muni d'une norme N.

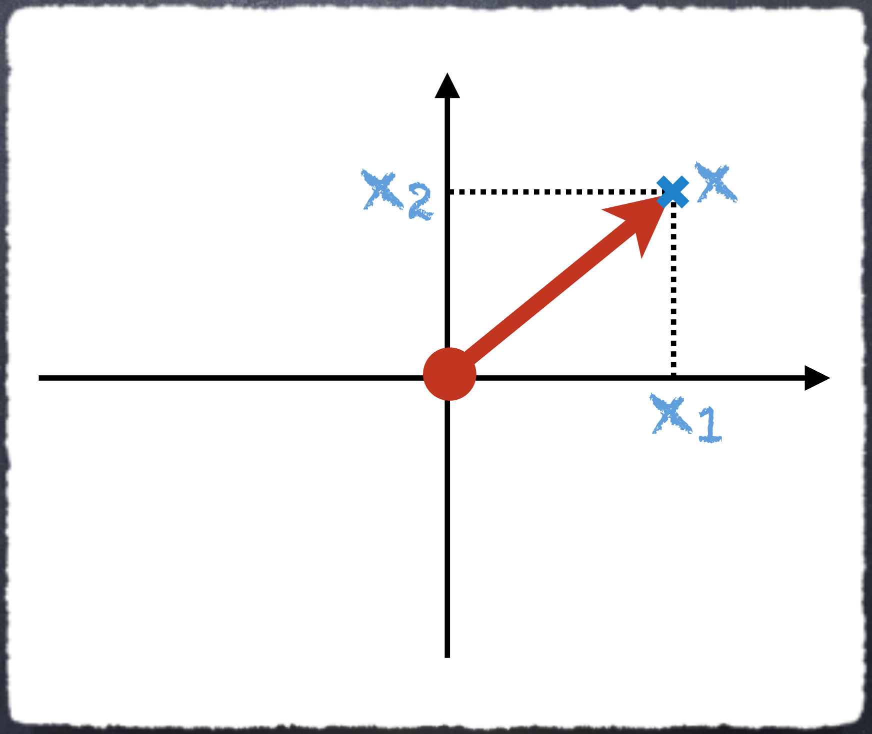
Exemples : Normes de Hölder sur $\mathbb{R}^n$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p} \text{ où } p \geq 1$$

En particulier dans $\mathbb{R}^2$, on a

- $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Distance Euclidienne



I. a) Définition et propriétés

1.3 Définition

On appellera **ev normé** (evn) un espace vectoriel E muni d'une norme N.

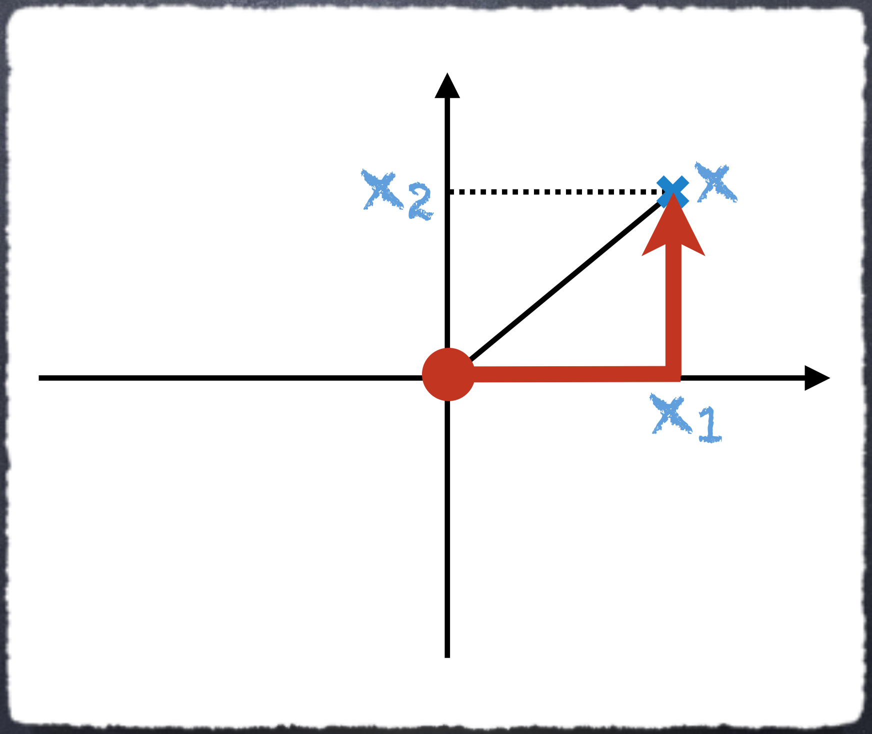
Exemples : Normes de Hölder sur $\mathbb{R}^n$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \text{ où } p \geq 1$$

En particulier dans $\mathbb{R}^2$, on a

- $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
- $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$

Distance Manathan



I. a) Définition et propriétés

1.3 Définition

On appellera **ev normé** (evn) un espace vectoriel E muni d'une norme N.

Exemples : Normes de Hölder sur $\mathbb{R}^n$

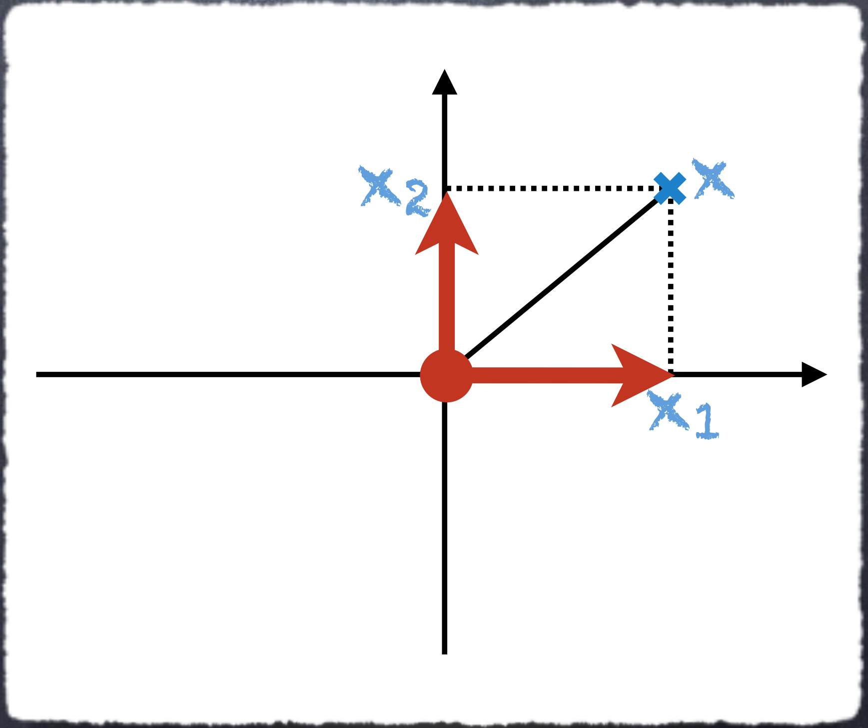
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \text{ où } p \geq 1$$

En particulier dans $\mathbb{R}^2$, on a

- $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
- $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$
- $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$

(normes usuelles)

Distance « infinie »



I. a) Définition et propriétés

1.3 Définition

On appellera **ev normé** (evn) un espace vectoriel E muni d'une norme N.

Exemples : Considérons l'espace des suites

$$E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \left\{ u : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad (n \to u_n) \right\}$$

et l'application : $\|u\|_1 : u \in E \quad \longrightarrow \quad \sum_{n \geq 0} |u_n|$

Cette application est bien définie sur le sous-ev :

$$l_1 = \{ u \in E, \text{ t.q. } \|u\|_1 < +\infty \}$$

et définit une norme (détails en TD).

I. a) Définition et propriétés

1.3 Définition

On appellera **ev normé** (evn) un espace vectoriel E muni d'une norme N.

Exemples : Considérons l'espace des suites

$$E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \left\{u : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad (n \to u_n)\right\}$$

De même, on peut définir les normes :

- $\|u\|_2 : u \in E \longrightarrow (\sum_{n \geq 0} u_n^2)^{1/2}$

sur l'espace $l_2 = \{u \in E, \text{ t.q. } \|u\|_2 < +\infty\}$

- $\|u\|_\infty : u \in E \longrightarrow \sup_{n \geq 0} |u_n|$

sur l'espace $l_\infty = \{u \in E, \text{ t.q. } \|u\|_\infty < +\infty\}$

I. a) Définition et propriétés

1.4 Définition

On dit que 2 normes N_1 et N_2 sont équivalentes sur E ssi

$$\exists (m, M) > 0 \text{ t.q. } \forall u \in E, \quad m N_1(u) \leq N_2(u) \leq M N_1(u)$$

Remarque :

Intuitivement, deux normes équivalentes indiquent que si une distance est petite pour une norme, elle l'est pour l'autre.

I. a) Définition et propriétés

1.4 Définition

On dit que 2 normes N_1 et N_2 sont équivalentes sur E ssi

$$\exists (m, M) > 0 \text{ t.q. } \forall u \in E, \ \ m\,N_1(u) \ \leq \ N_2(u) \ \leq \ M\,N_1(u)$$

1.5 Proposition

Les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Preuve : au (vrai) tableau ! ■

Remarque :

Intuitivement, deux normes équivalentes indiquent que si une distance est petite pour une norme, elle l'est pour l'autre.

I. a) Définition et propriétés

1.4 Définition

On dit que 2 normes N_1 et N_2 sont équivalentes sur E ssi

$\exists (m, M) > 0$ t.q. $\forall u \in E, \;\; m\, N_1(u) \;\leq\; N_2(u) \;\leq\; M\, N_1(u)$

Remarque 2 :

Comme on le verra plus tard, dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. En dimension infinie, ce résultat n'est plus vrai !

I. a) Définition et propriétés

1.4 Définition

On dit que 2 normes N_1 et N_2 sont **équivalentes** sur E ssi

$$\exists (m, M) > 0 \text{ t.q. } \forall u \in E, \quad m\, N_1(u) \ \leq \ N_2(u) \ \leq \ M\, N_1(u)$$

1.5 Proposition

Les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Preuve : au (vrai) tableau ! ∎

Remarque 2 :

Comme on le verra plus tard, dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. En dimension infinie, ce résultat n'est plus vrai !

I. a) Définition et propriétés

1.4 Définition

On dit que 2 normes N_1 et N_2 sont **équivalentes** sur E ssi

$$\exists (m, M) > 0 \text{ t.q. } \forall u \in E, \quad m\, N_1(u) \leq N_2(u) \leq M\, N_1(u)$$

Exemple : Considérons l'ev

$$E = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$$

et les normes :

- $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(s)|\, ds$
- $\|f\|_\infty = \displaystyle\sup_{s \in [0,1]} |f(s)|$

Les deux normes ne sont pas équivalentes.
(détails au (vrai) tableau)

I. b) Suites dans un evn

Dans la suite, on considérera $(E, \|\cdot\|)$ un evn.

1.6 Définition (limite)

On dit qu'une suite $(u_n)_n$ tend vers $l \in E$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0, \text{ t.q. } \forall n \geq n_0, \quad \|u_n - l\| \leq \varepsilon$$

I. b) Suites dans un evn

Dans la suite, on considérera $(E, \|\cdot\|)$ un evn.

1.6 Définition (limite)

On dit qu'une suite $(u_n)_n$ tend vers $l \in E$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0, \text{ t.q. } \forall n \geq n_0, \quad \|u_n - l\| \leq \varepsilon$$

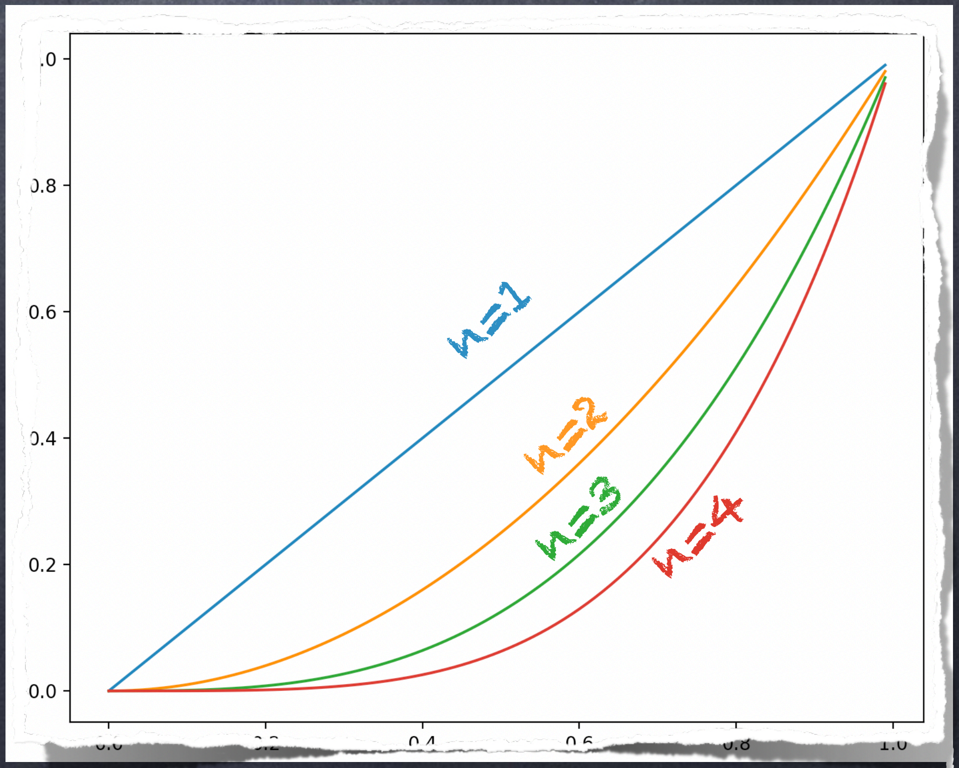
Exemple : Considérons l'ev

$$E = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$$

et la norme $\|\cdot\|_1$.

Montrons que la suite $f_n(x) = x^n$ converge vers f=0. Que se passe t'il si on considère la norme $\|\cdot\|_\infty$?

(détails au (vrai) tableau)



I. b) Suites dans un evn

Dans la suite, on considérera $(E, \|\cdot\|)$ un evn.

1.6 Définition (limite)

On dit qu'une suite $(u_n)_n$ tend vers $l \in E$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0, \text{ t.q. } \forall n \geq n_0, \quad \|u_n - l\| \leq \varepsilon$$

1.7 Proposition

Si la suite admet une limite, alors elle est unique.

<u>Preuve :</u> au (vrai) tableau ! ∎

I. b) Suites dans un evn

Dans la suite, on considérera $(E, \|\cdot\|)$ un evn.

1.6 Définition (limite)

On dit qu'une suite $(u_n)_n$ tend vers $l \in E$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0, \text{ t.q. } \forall n \geq n_0, \quad \|u_n - l\| \leq \varepsilon$$

1.7 Proposition

Si la suite admet une limite, alors elle est unique.

1.8 Proposition

Si une suite admet l comme limite, alors pour toute norme équivalente la limite existe et est l.

Preuve : au (vrai) tableau !

Au programme (chapitre 1) :

Objectif :

Introduire des notions de géométrie dans un evn

Plan :

I. Les espaces vectoriels normés

II. Ouverts, fermés et propriétés topologiques

a) Ouverts et fermés

b) Propriétés

III. Intérieur, adhérence et frontière

II. a) Ouverts et fermés

2.1 Définition (Boules)

On appelle :

- Boule ouverte de centre $0 \in E$ et de rayon r l'ensemble :

$$B_o(0, r) = \{x \in E, \ \text{t.q.} \ \|x\| < r\}$$

- Boule fermée de centre $0 \in E$ et de rayon r l'ensemble :

$$B_f(0, r) = \{x \in E, \ \text{t.q.} \ \|x\| \leq r\}$$

II. a) Ouverts et fermés

2.1 Définition (Boules)

On appelle :

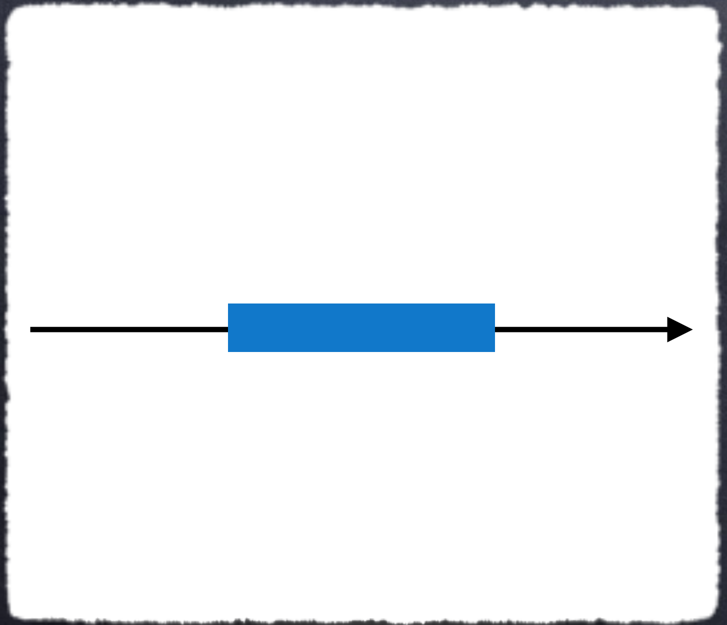
- **Boule ouverte** de centre $0 \in E$ et de rayon r l'ensemble :

$$B_o(0, r) = \{x \in E,\ \text{t.q. } \|x\| < r\}$$

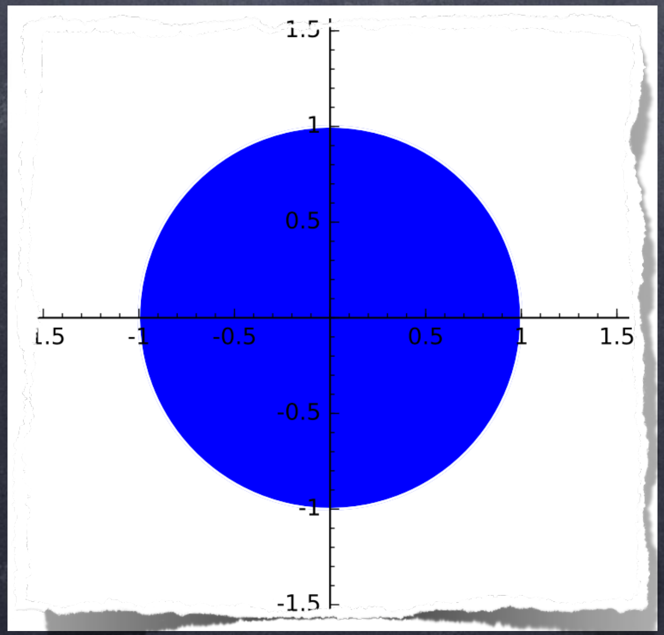
- **Boule fermée** de centre $0 \in E$ et de rayon r l'ensemble :

$$B_f(0, r) = \{x \in E,\ \text{t.q. } \|x\| \leq r\}$$

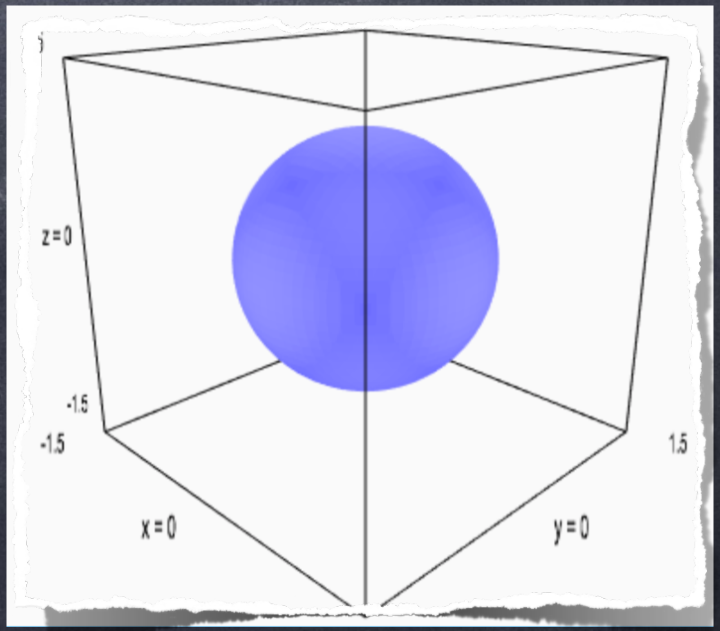
Exemples (norme 2) dans $\mathbb{R}^n$



$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$

II. a) Ouverts et fermés

2.1 Définition (Boules)

On appelle :

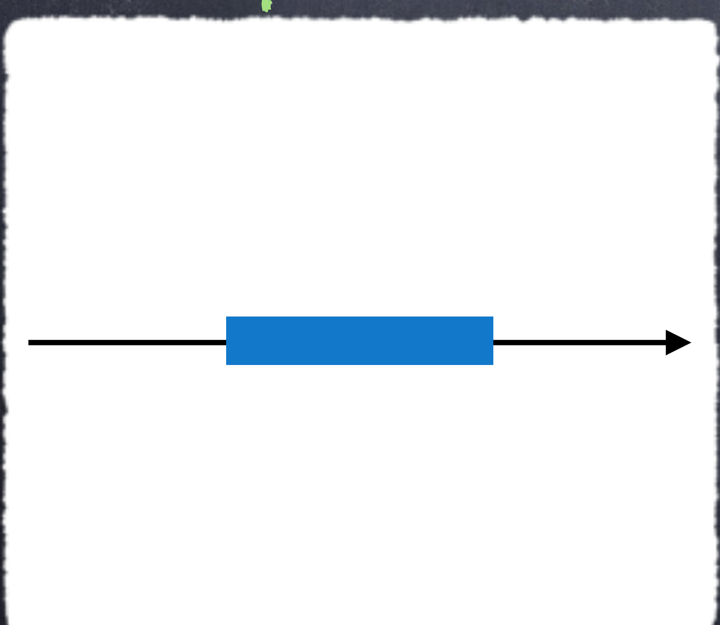
- **Boule ouverte** de centre $0 \in E$ et de rayon r l'ensemble :

$$B_o(0, r) = \{x \in E, \ \text{t.q.} \ \|x\| < r\}$$

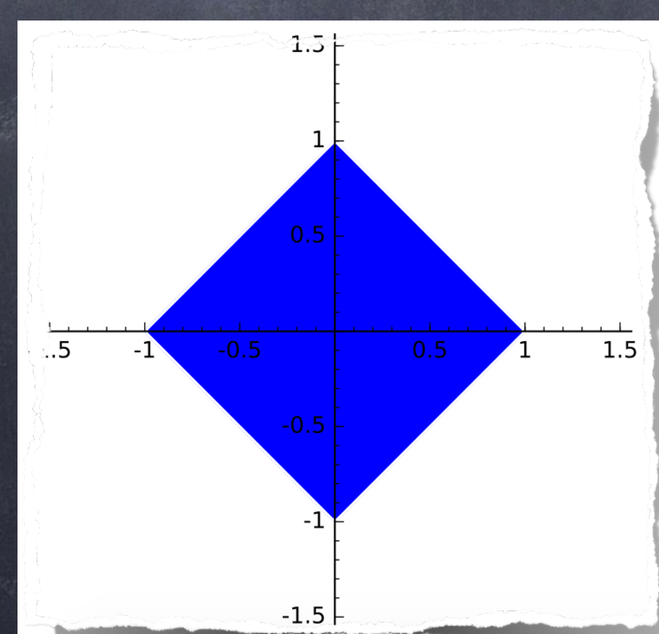
- **Boule fermée** de centre $0 \in E$ et de rayon r l'ensemble :

$$B_f(0, r) = \{x \in E, \ \text{t.q.} \ \|x\| \leq r\}$$

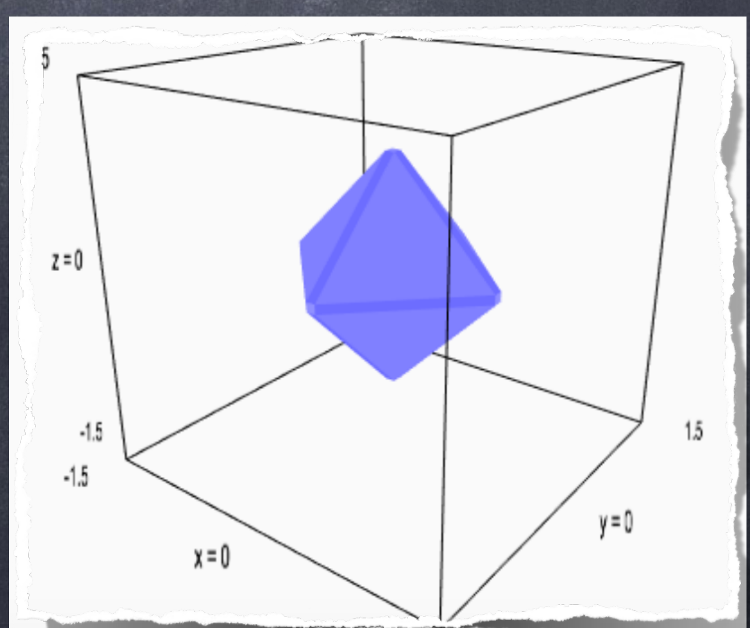
Exemples (norme 1) dans $\mathbb{R}^n$



$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$

II. a) Ouverts et fermés

2.1 Définition (Boules)

On appelle :

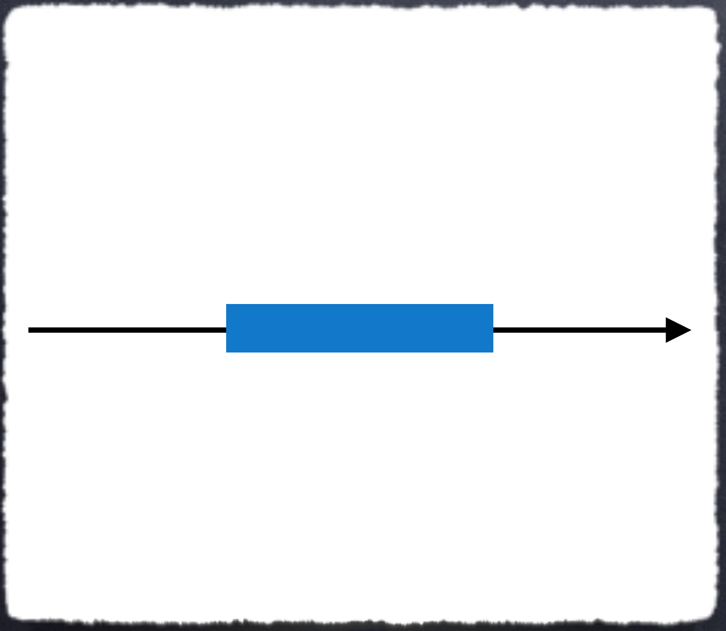
- **Boule ouverte** de centre $0 \in E$ et de rayon r l'ensemble :

$$B_o(0, r) = \{x \in E, \ \text{t.q.} \ \|x\| < r\}$$

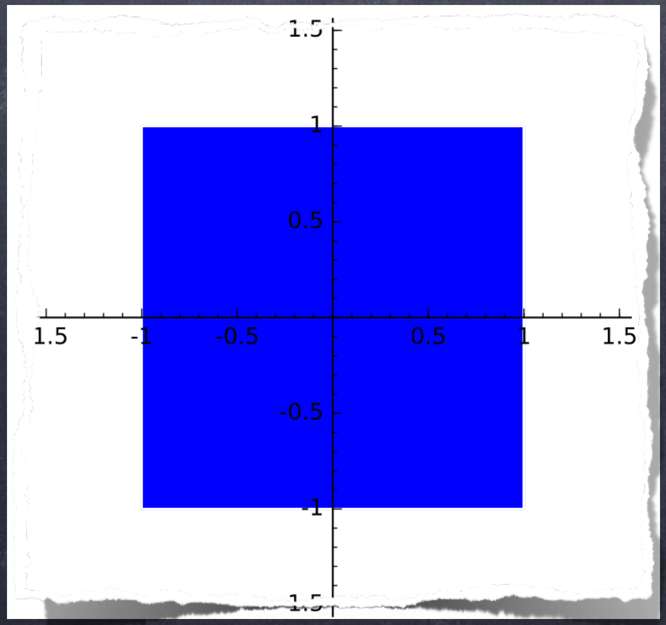
- **Boule fermée** de centre $0 \in E$ et de rayon r l'ensemble :

$$B_f(0, r) = \{x \in E, \ \text{t.q.} \ \|x\| \leq r\}$$

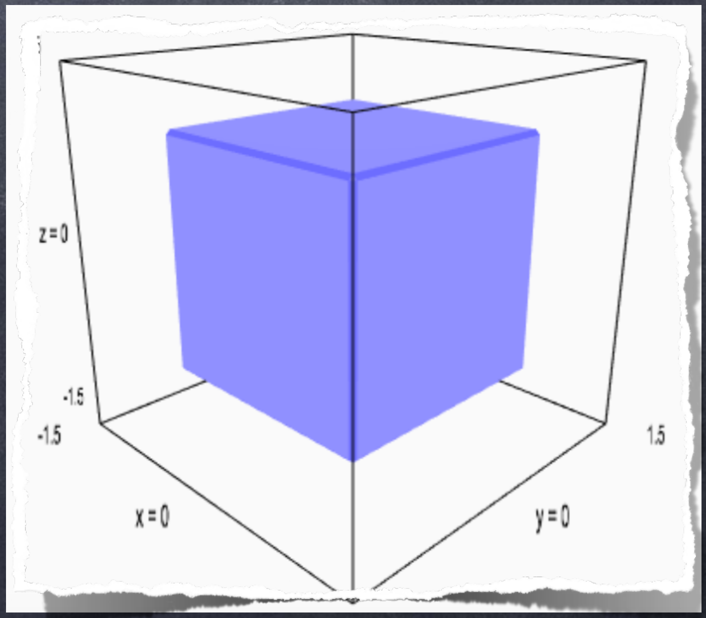
Exemples (norme ∞) dans $\mathbb{R}^n$



$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$

II. a) Ouverts et fermés

2.1 Définition (Boules)

On appelle :

- Boule ouverte de centre $0 \in E$ et de rayon r l'ensemble :

$$B_o(0, r) = \{x \in E, \ \text{t.q.} \ \|x\| < r\}$$

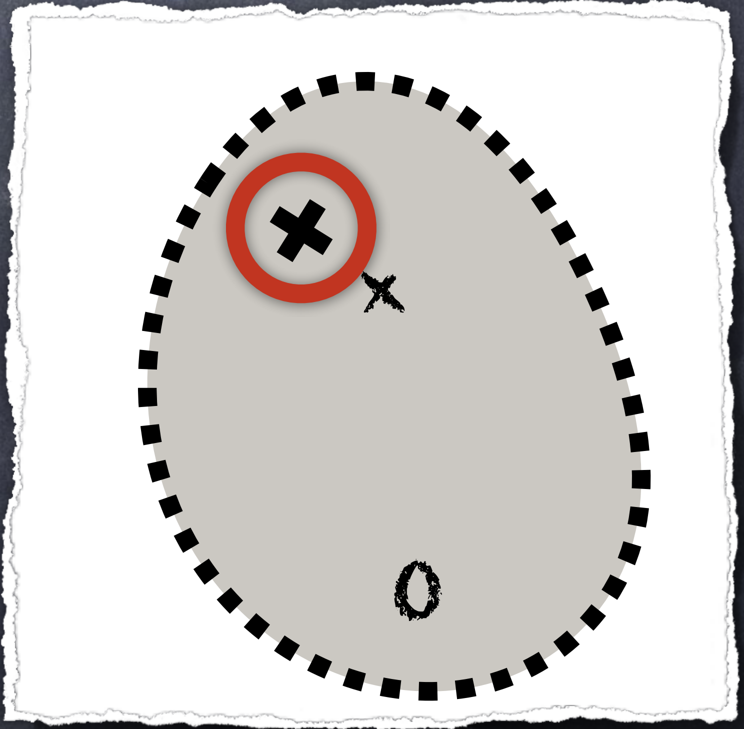
- Boule fermée de centre $0 \in E$ et de rayon r l'ensemble :

$$B_f(0, r) = \{x \in E, \ \text{t.q.} \ \|x\| \leq r\}$$

2.2 Définition

Un domaine O est un ouvert de E ssi en tout point $x \in O$, il existe $r>0$ t.q. $B(x, r) \subset O$.

Ouvert de $\mathbb{R}^2$



II. a) Ouverts et fermés

2.1 Définition (Boules)

On appelle :

- Boule ouverte de centre $0 \in E$ et de rayon r l'ensemble :

$$B_o(0, r) = \{x \in E, \ \text{t.q.} \ \|x\| < r\}$$

- Boule fermée de centre $0 \in E$ et de rayon r l'ensemble :

$$B_f(0, r) = \{x \in E, \ \text{t.q.} \ \|x\| \leq r\}$$

2.2 Définition

Un domaine 0 est un ouvert de E ssi en tout point $x \in 0$, il existe r>0 t.q. $B(x, r) \subset 0$.

Remarque :

Ici, le choix de la boule (ouverte ou fermée) n'a pas d'importance. Par contre, le choix de la norme oui !

II. a) Ouverts et fermés

2.1 Définition (Boules)

On appelle :

- **Boule ouverte** de centre $0 \in E$ et de rayon r l'ensemble :

$$B_o(0, r) = \{x \in E, \text{ t.q. } \|x\| < r\}$$

- **Boule fermée** de centre $0 \in E$ et de rayon r l'ensemble :

$$B_f(0, r) = \{x \in E, \text{ t.q. } \|x\| \leq r\}$$

2.2 Définition

Un domaine O est un ouvert de E ssi en tout point $x \in O$, il existe r>0 t.q. $B(x, r) \subset O$.

Remarque 2 :

Dans $\mathbb{R}^n$, les trois normes usuelles définissent les mêmes ouverts (détails au (vrai) tableau).

II. a) Ouverts et fermés

2.1 Définition (Boules)

On appelle :

- **Boule ouverte** de centre $0 \in E$ et de rayon r l'ensemble :

$$B_o(0, r) = \{x \in E,\ \text{t.q. } \|x\| < r\}$$

- **Boule fermée** de centre $0 \in E$ et de rayon r l'ensemble :

$$B_f(0, r) = \{x \in E,\ \text{t.q. } \|x\| \leq r\}$$

2.2 Définition

Un domaine O est un ouvert de E ssi en tout point $x \in O$, il existe $r>0$ t.q. $B(x, r) \subset O$.

Un domaine F est un fermé de E ssi son complémentaire dans E, noté F^c est un ouvert.

II. b) Propriétés

2.3 Proposition

Une boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée est un fermé.

Preuve : au (vrai) tableau ! ■

Remarque : Dans de nombreux cas, on ne précisera pas explicitement dans quel ensemble E le domaine est un ouvert ou un fermé.

II. b) Propriétés

2.3 Proposition

Une boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée est un fermé.

2.4 Proposition

- $\emptyset$ et E sont à la fois ouverts et fermés.
- Toute réunion d'ouvert est un ouvert.
- Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

<u>Preuve</u> : au (vrai) tableau ! ∎

II. b) Propriétés

2.3 Proposition

Une boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée est un fermé.

2.4 Proposition

- $\emptyset$ et E sont à la fois ouverts et fermés.
- Toute réunion d'ouvert est un ouvert.
- Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Remarque : L'aspect « finie » est essentiel. En effet, sinon le résultat n'est plus vrai :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\} \quad \text{fermé.}$$

II. b) Propriétés

2.3 Proposition

Une boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée est un fermé.

2.4 Proposition

- $\emptyset$ et E sont à la fois ouverts et fermés.
- Toute réunion d'ouvert est un ouvert.
- Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

2.5 Corollaire

- Toute intersection de fermés est un fermé.
- Toute réunion finie de fermé est un fermé.

II. b) Propriétés

2.6 Théorème

Un ensemble $F \subset E$ est fermé ssi toute suite convergente d'éléments de F converge dans F.

Preuve : au (vrai) tableau ! ∎

Remarque :

Ce résultat est important car il fait le lien entre la définition topologique et les suites dans un evn.

Au programme (chapitre 1) :

Objectif :

Introduire des notions de géométrie dans un evn

Plan :

I. Les espaces vectoriels normés

II. Ouverts, fermés et propriétés topologiques

III. Intérieur, adhérence et frontière

III. Intérieur, adhérence et frontière

3.1 Définition

Soit $A \subset E$. On appelle **intérieur** de A, et on note $\mathring{A}$, l'ensemble des points x t.q. il existe r>0 t.q. $B(x, r) \subset A$.

Exemples :

- $A = [0,1[$ a pour intérieur $\mathring{A} =]0,1[$
- $A = \{1\}$ a pour intérieur $\mathring{A} = \varnothing$

III. Intérieur, adhérence et frontière

3.1 Définition

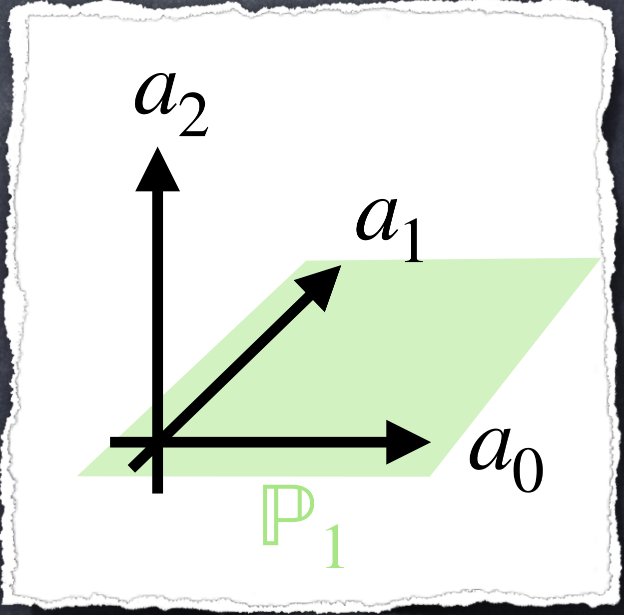
Soit $A \subset E$. On appelle intérieur de A, et on note $\mathring{A}$, l'ensemble des points x t.q. il existe r>0 t.q. $B(x, r) \subset A$.

Exemples :

- $A = [0,1[$ a pour intérieur $\mathring{A} =]0,1[$
- $A = \{1\}$ a pour intérieur $\mathring{A} = \varnothing$
- $A = \{f \in \mathbb{P}_1\} \subset E = \mathbb{P}_n$ muni de la norme :

$$\|f\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |a_i|, \quad \text{où} \quad f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

a pour intérieur $\varnothing$.



(détails au (vrai) tableau)

III. Intérieur, adhérence et frontière

3.1 Définition

Soit $A \subset E$. On appelle **intérieur** de A, et on note $\mathring{A}$, l'ensemble des points x t.q. il existe r>0 t.q. $B(x, r) \subset A$.

3.2 Proposition

L'ensemble $\mathring{A}$ est un ouvert et c'est le plus grand ouvert inclus dans A.

Preuve : au (vrai) tableau ! ∎

Remarque :

On en déduit l'inclusion $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overline{\mathring{A} \cup B}$.

(détails au (vrai) tableau)

III. Intérieur, adhérence et frontière

3.3 Définition

Soit $A \subset E$. On appelle adhérence de A, et on note $\bar{A}$, l'ensemble des points x t.q. pour tout r>0, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

3.4 Proposition

L'ensemble $\bar{A}$ est un fermé et c'est le plus petit fermé qui inclus A.

Preuve : au (vrai) tableau ! ■

Remarque :

Bien évidemment, on a $A \subset \bar{A}$.

III. Intérieur, adhérence et frontière

3.3 Définition

Soit $A \subset E$. On appelle adhérence de A, et on note $\overline{A}$, l'ensemble des points x t.q. pour tout r>0, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

3.4 Proposition

L'ensemble $\overline{A}$ est un fermé et c'est le plus petit fermé qui inclus A.

3.5 Corollaire

Un ensemble A est fermé ssi $A = \overline{A}$.

Preuve : au (vrai) tableau ! ■

III. Intérieur, adhérence et frontière

3.6 Définition

Soit $A \subset E$ et x un point de E. La distance de x à A est donnée par $d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$

Remarque :

$d(a, A) = 0$ n'implique pas que $a \in A$. En effet, on a par exemple $d(0,]0,1]) = 0$, mais pourtour $0 \notin]0,1]$.

III. Intérieur, adhérence et frontière

3.6 Définition

Soit $A \subset E$ et x un point de E. La distance de x à A est donnée par $d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$

3.7 Proposition

Un point $a \in \bar{A}$ ssi $d(a, A) = 0$.

Preuve : au (vrai) tableau ! ■

Remarque :

$d(a, A) = 0$ n'implique pas que $a \in A$. En effet, on a par exemple $d(0,]0,1]) = 0$, mais pourtour $0 \notin]0,1]$.

III. Intérieur, adhérence et frontière

3.8 Théorème

Un point $x \in \overline{A}$ ssi il existe une suite d'élément de A qui converge vers x.

Preuve : au (vrai) tableau ! ■

Remarque :

Ici également, on fait le lien entre des propriétés de topologie et les suites.

3.9 Définition

Un ensemble $A \subset E$ est dense dans E ssi $\overline{A} = E$.

Remarque :

Cette définition est équivalente à dire que :

- Pour tout $x \in E$, et pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$
- Pour tout $x \in E$, et il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A t.q. :

$$\lim_{n \to +\infty} \|a_n - x\| = 0$$

III. Intérieur, adhérence et frontière

3.9 Définition

Un ensemble $A \subset E$ est **dense** dans E ssi $\overline{A} = E$.

Exemples :

- L'ensemble $A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(détails au (vrai) tableau).

III. Intérieur, adhérence et frontière

3.9 Définition

Un ensemble $A \subset E$ est **dense** dans E ssi $\overline{A} = E$.

Exemples :

- L'ensemble $A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(détails au (vrai) tableau).

- L'ensemble $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(autrement dit, on peut approcher chaque réel par une suite de nombres rationnels).

III. Intérieur, adhérence et frontière

3.9 Définition

Un ensemble $A \subset E$ est **dense** dans E ssi $\bar{A} = E$.

Exemples :

- L'ensemble $A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(détails au (vrai) tableau).

- L'ensemble $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(autrement dit, on peut approcher chaque réel par une suite de nombres rationnels).

- L'ensemble $\mathbb{I} \,(= \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(on peut donc approcher chaque rationnel par une suite de nombre irrationnel).

III. Intérieur, adhérence et frontière

3.10 Définition

On appelle frontière de A et on note Fr(A) l'ensemble définie par $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} - \mathring{A}$.

Exemples : ($E = \mathbb{R}$)

- La frontière de l'ensemble $A = [0,1[$ est $\mathrm{Fr}(A) = \{0,1\}$

(détails au (vrai) tableau)

III. Intérieur, adhérence et frontière

3.10 Définition

On appelle frontière de A et on note Fr(A) l'ensemble définie par $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} - \mathring{A}$.

Exemples : ($E = \mathbb{R}$)

- La frontière de l'ensemble $A = [0,1[$ est $\mathrm{Fr}(A) = \{0,1\}$

(détails au (vrai) tableau)

- La frontière de l'ensemble $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$

(détails au (vrai) tableau)

Remarque :

On notera avec ce dernier exemple que la frontière d'un ensemble peut être plus « grande » que l'ensemble !

Plan détaillé chapitre 1

I. Les espaces vectoriels normés

a) Définition et propriétés

b) Suites dans un evn

II. Ouverts, fermés et propriétés topologiques

a) Ouverts et fermés

b) Propriétés

III. Intérieur, adhérence et frontière