M5 : Introduction aux équations différentielles et aux fonctions de plusieurs variables réelles

Chapitre 5 :

Intégrales multiples et intégrales curvilignes

Cours 11-12-13

Année 2018 - 2019

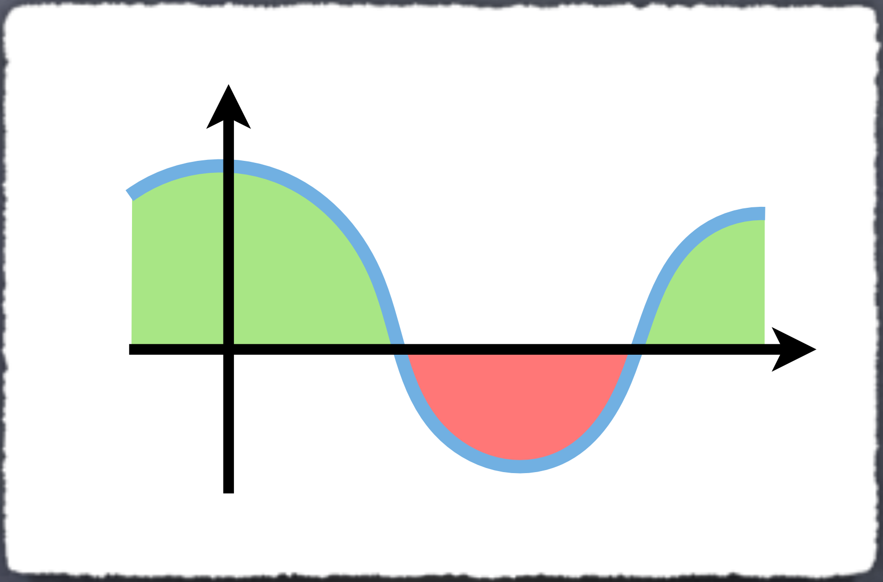
Contact : A. Tonnoir

antoine.tonnoir@insa-rouen.fr

Introduction

Pour les fonctions d'une variable, on rappelle que la notion d'intégrale

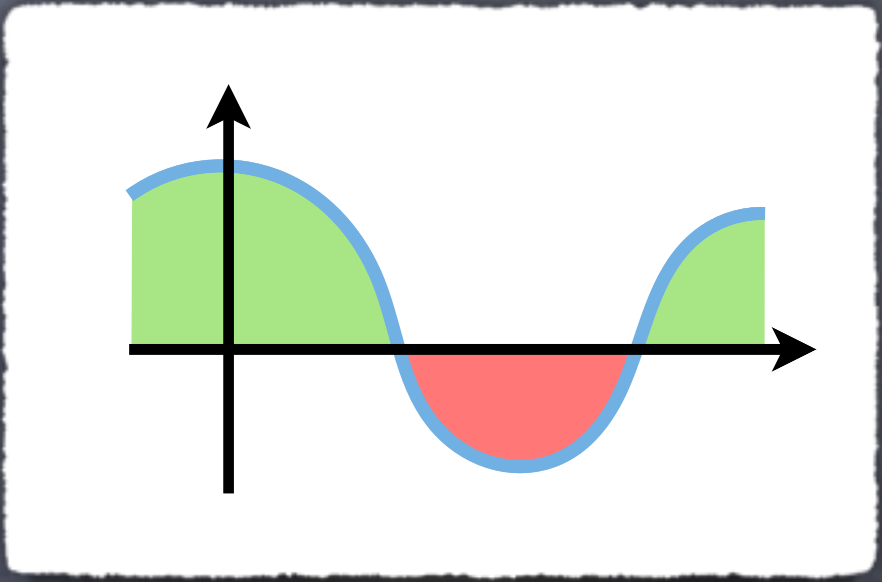
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+ dx - \int_a^b f^- dx$$



correspond à l'aire sous la courbe f

Introduction

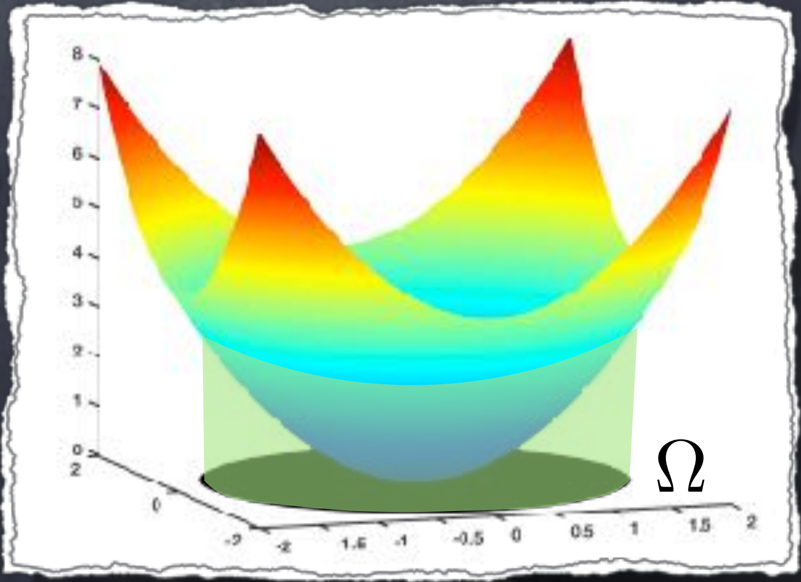
Pour les fonctions d'une variable, on rappelle que la notion d'intégrale



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+ dx - \int_a^b f^- dx$$

correspond à l'aire sous la courbe f

Objectif 1 : Généraliser cette notion aux fonctions scalaires de plusieurs variables



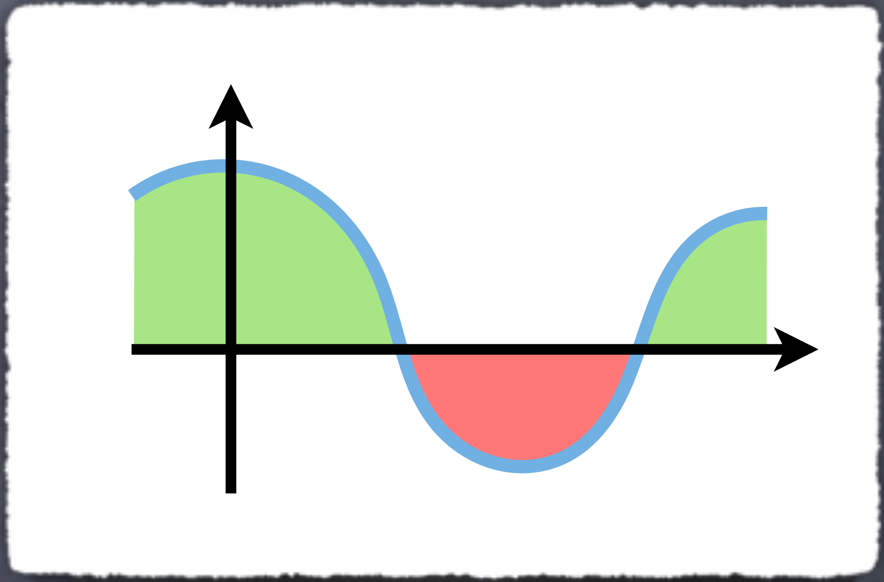
$f : (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

(Volume sous la courbe)

Introduction

Pour les fonctions d'une variable, on rappelle que la notion d'intégrale

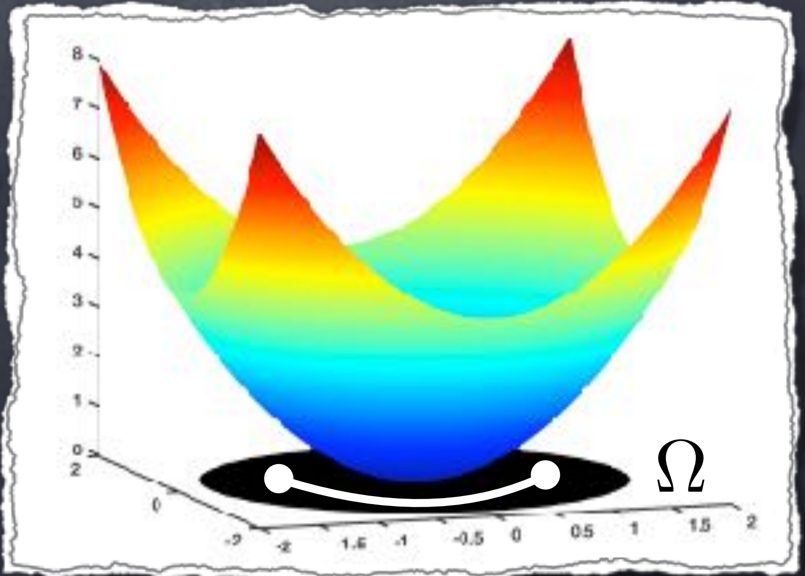
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+ dx - \int_a^b f^- dx$$



correspond à l'aire sous la courbe f

Objectif 2 : Définir l'intégrale curviligne (intégrale le long d'une courbe / trajet)

$$f : (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

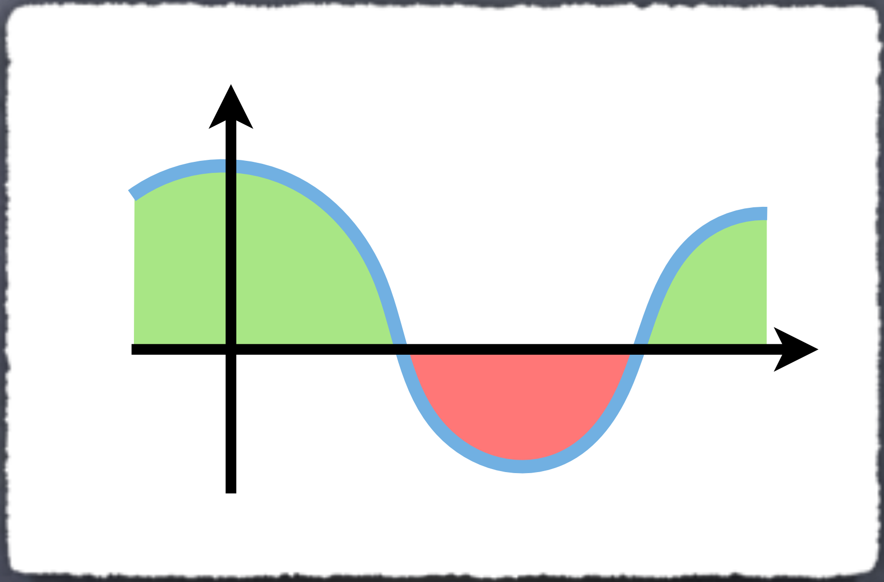


(Valeur moyenne le long du trajet)

Introduction

Pour les fonctions d'une variable, on rappelle que la notion d'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+ dx - \int_a^b f^- dx$$

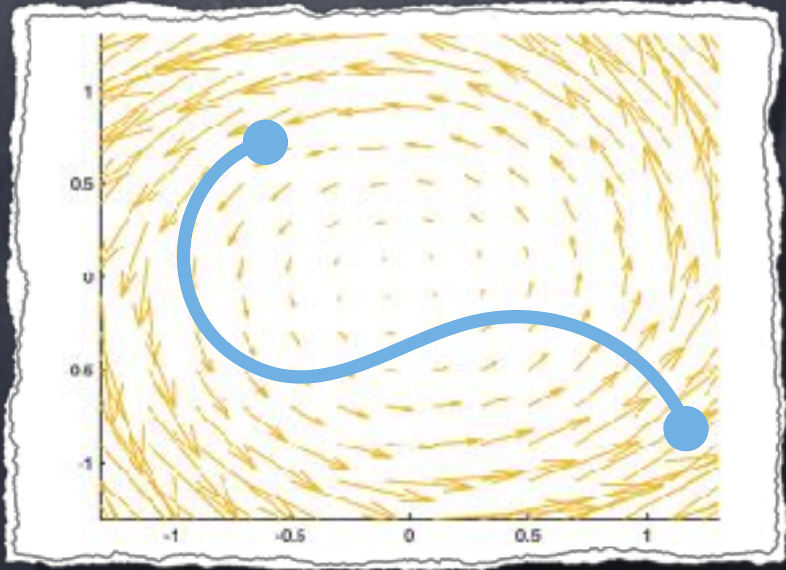


correspond à l'aire sous la courbe f

Objectif 3 : Définir la notion d'intégrale curviligne dans un champ de vecteur (circulation)

$\underline{f} : (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

(Travail nécessaire pour aller d'un point à un autre)



Au programme (chapitre 5) :

Objectif :

Étudier la notion d'intégrale pour les fonctions

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Plan :

I. Intégrale d'une fonction scalaire

II. Formes différentielles

Au programme (chapitre 5) :

Objectif :

Étudier la notion d'intégrale pour les fonctions

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Plan :

I. Intégrale d'une fonction scalaire

1) Définition et propriétés
2) Calcul explicite sur les domaines réguliers
3) Changement de coordonnées
4) Intégrale curviligne

II. Forme différentielle

I. 1) Définition et propriétés

1.1.1 Définition

Soit f une fonction continue sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

On définit l'intégrale double de f sur Ω

$$V_\Omega(f) = \iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$$

comme le volume (calculé algébriquement) sous le graphe de f.

I. 1) Définition et propriétés

1.1.1 Définition

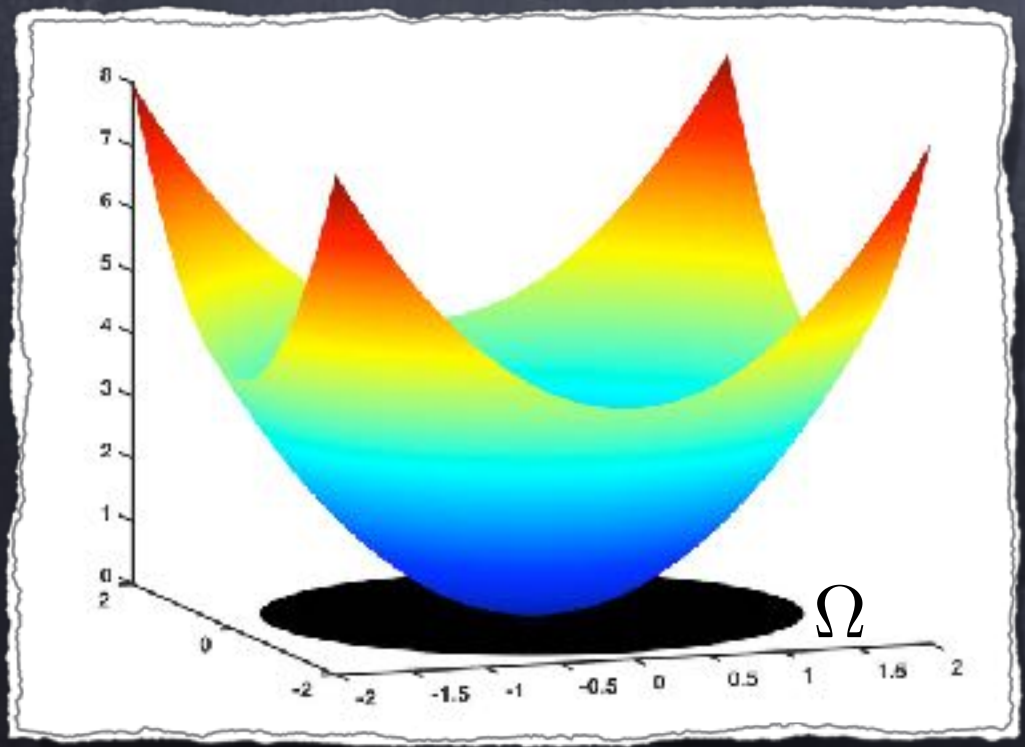
Soit f une fonction continue sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

On définit l'intégrale double de f sur Ω

$$V_\Omega(f) = \iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$$

comme le volume (calculé algébriquement) sous le graphe de f.

Exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2$



$$\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 2\}$$

I. 1) Définition et propriétés

1.1.1 Définition

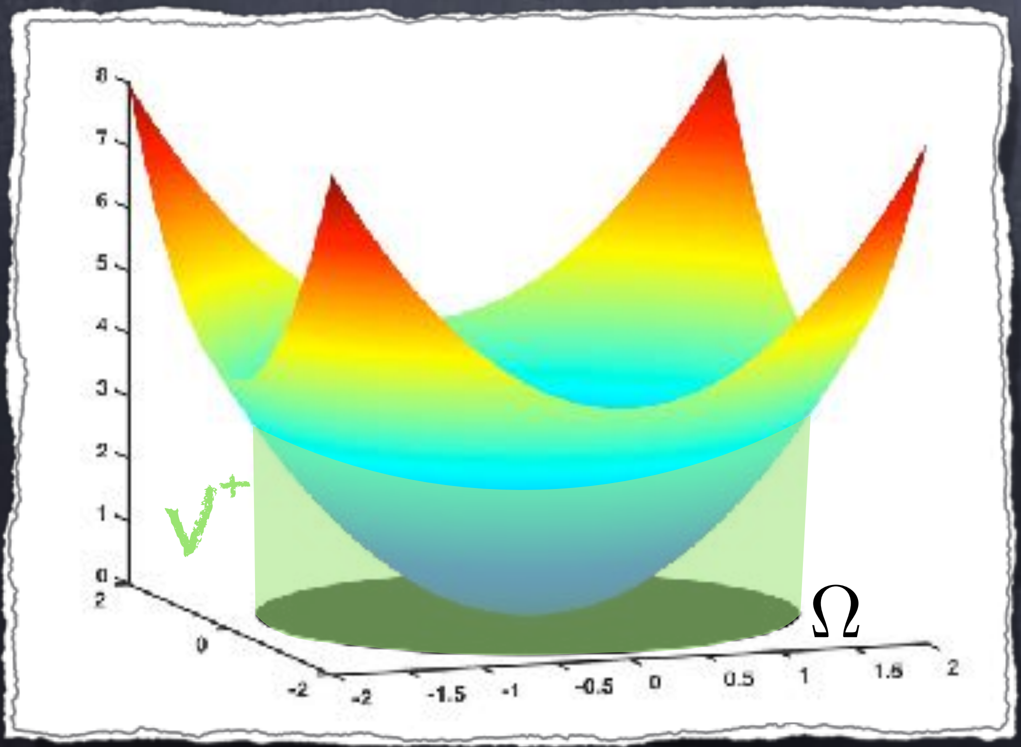
Soit f une fonction continue sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

On définit l'intégrale double de f sur Ω

$$V_\Omega(f) = \iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$$

comme le volume (calculé algébriquement) sous le graphe de f.

Exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2$



$$\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 2\}$$

$$V^{\pm} = \{(x,y,z) \text{ t.q. } (x,y) \in \Omega \text{ et } 0 \leq \pm z \leq \pm(x^2+y^2)\}$$

$$V_\Omega(f) = \mathrm{Vol}(V^+) - \mathrm{Vol}(V^-)$$
$$= \mathrm{Vol}(V+) \quad \text{car } V^- = \emptyset$$

I. 1) Définition et propriétés

1.1.1 Définition

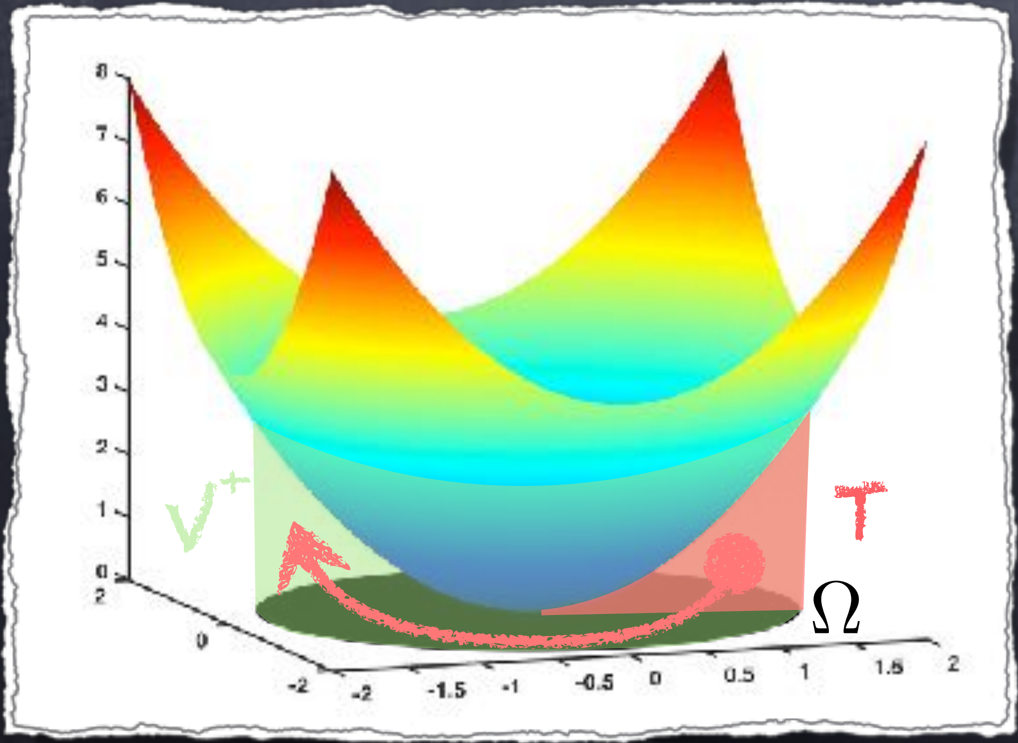
Soit f une fonction continue sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

On définit l'intégrale double de f sur Ω

$$V_\Omega(f) = \iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$$

comme le volume (calculé algébriquement) sous le graphe de f.

Exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2$



$$\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 2\}$$

Or $\mathrm{Vol}(V^+) = 2\pi \mathrm{Aire}(T)$ où

$$\mathrm{Aire}(T) = \int_0^2 x^2 dx = \frac{16}{3}$$

I. 1) Définition et propriétés

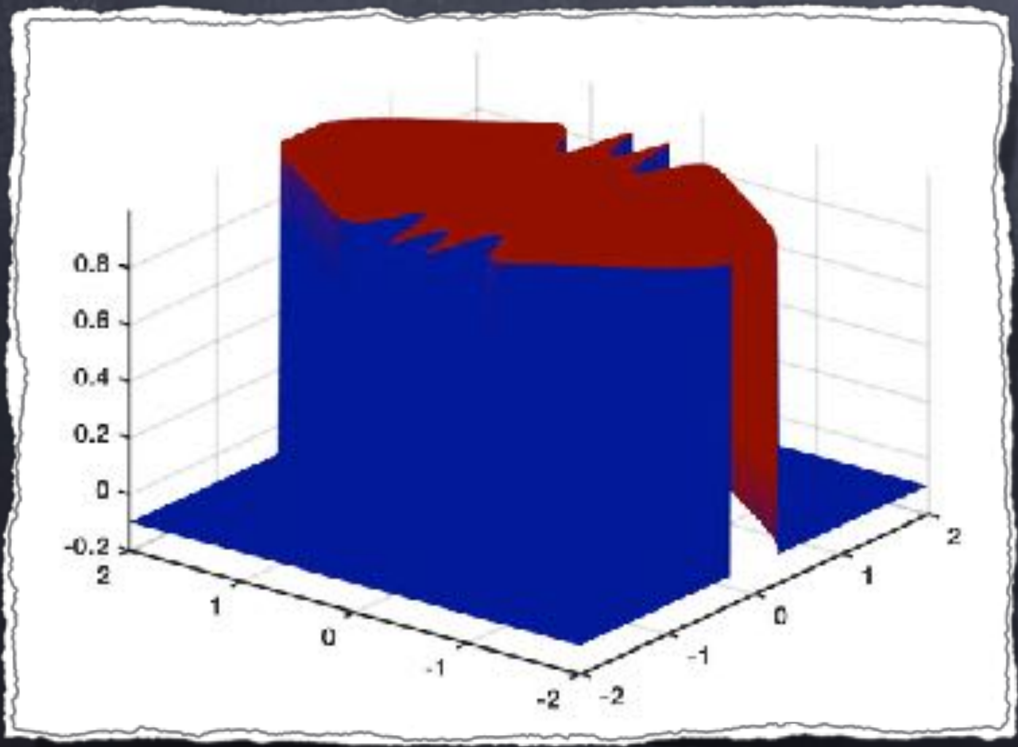
1.1.1 Définition

Soit f une fonction continue sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

On définit l'intégrale double de f sur Ω

$$V_\Omega(f) = \iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$$

comme le volume (calculé algébriquement) sous le graphe de f.



Remarque :

Si f(x,y) = 1, alors l'intégrale double correspond au volume du cylindre de hauteur 1 et de base Ω, i.e l'aire du domaine Ω

$$V_\Omega(f) = \mathrm{Aire}(\Omega) \times 1$$

I. 1) Définition et propriétés

1.1.2 Proposition (admis)

Soient f et g deux fonctions continues sur Ω

- **Linéarité** (λ et μ deux réels)

$$\iint_\Omega \lambda f + \mu g \, dxdy = \lambda \iint_\Omega f \, dxdy + \mu \iint_\Omega g \, dxdy$$

- **Positivité**

Si $f(x,y) \geq 0$ alors $\iint_\Omega f(x,y) \, dxdy \geq 0$

- **Additivité** ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec $\text{Aire}(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 0$)

$$\iint_\Omega f(x,y) \, dxdy = \iint_{\Omega_1} f(x,y) \, dxdy + \iint_{\Omega_2} f(x,y) \, dxdy$$

I. 1) Définition et propriétés

1.1.3 Corollaire

Soient f et g deux fonctions continues sur Ω

- **Comparaison**

Si $f(x,y) \geq g(x,y)$ alors $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy \geq \iint_\Omega g(x,y)\,dxdy$

- **Valeur absolue**

$$\left| \iint_\Omega f(x,y)\,dxdy \right| \leq \iint_\Omega |f(x,y)|\,dxdy$$

Preuve : au (vrai) tableau ! $\blacksquare$

I. 2) Domaines réguliers

1.2.1 Définition

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine fermé et borné.

On dit que ce domaine est régulier si soit

- Il existe x_0 et x_1 avec $x_0 < x_1$ et deux fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ continues sur $[x_0, x_1]$ vérifiant $\alpha(x) \leq \beta(x)$

  t.q. : $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ où $x \in [x_0, x_1]$ et $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$

- Il existe y_0 et y_1 avec $y_0 < y_1$ et deux fonctions $\mu(y)$ et $\epsilon(y)$ continues sur $[y_0, y_1]$ vérifiant $\mu(y) \leq \epsilon(y)$

  t.q. : $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ où $y \in [y_0, y_1]$ et $\mu(y) \leq x \leq \epsilon(y)\}$

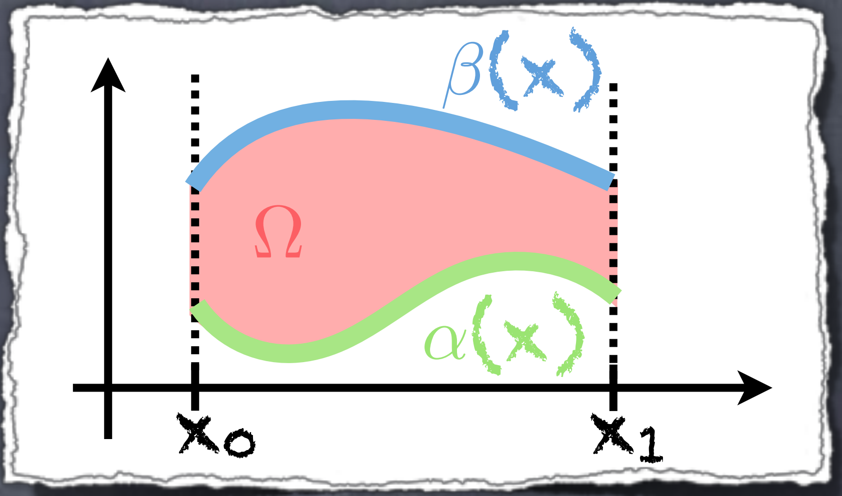
I. 2) Domaines réguliers

1.2.1 Définition

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine fermé et borné.

On dit que ce domaine est régulier si soit

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ où $x \in [x_0, x_1]$
  et $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$



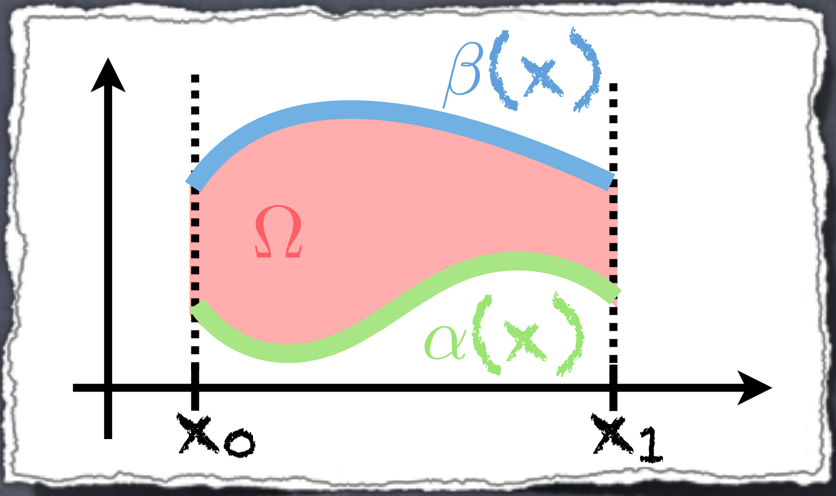
I. 2) Domaines réguliers

1.2.1 Définition

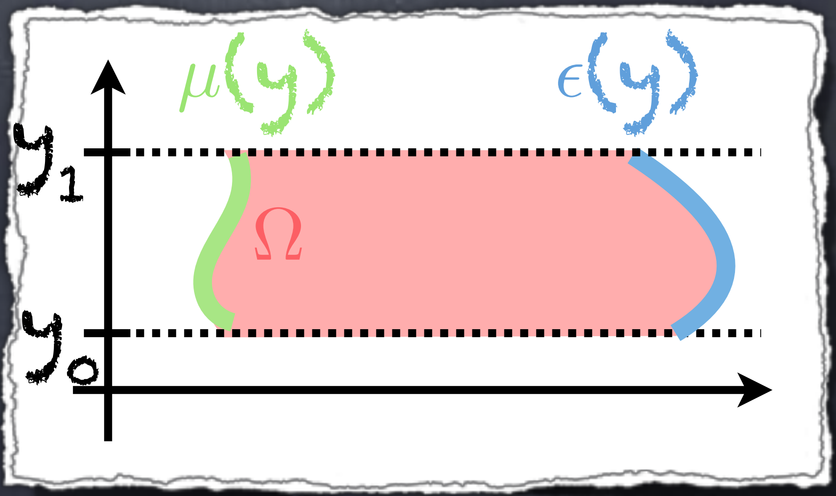
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine fermé et borné.

On dit que ce domaine est régulier si soit

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ où $x \in [x_0, x_1]$ et $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$



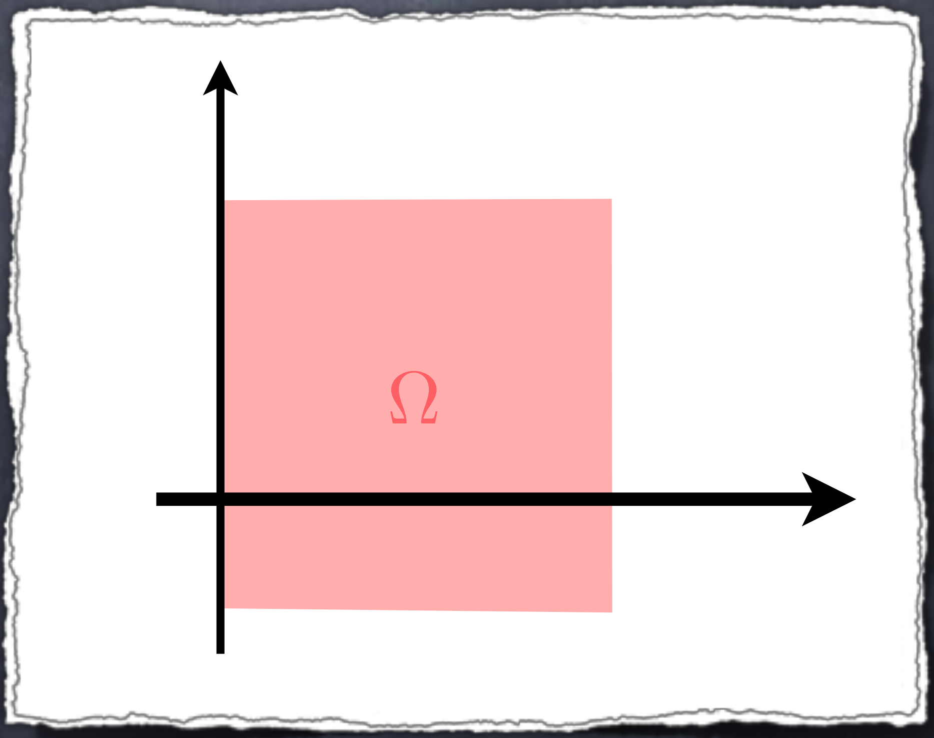
- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ où $y \in [y_0, y_1]$ et $\mu(y) \leq x \leq \epsilon(y)\}$



I. 2) Domaines réguliers

Exemples

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ t.q. } |x-2| \leq 2 \text{ et } |y-2| \leq 3\}$

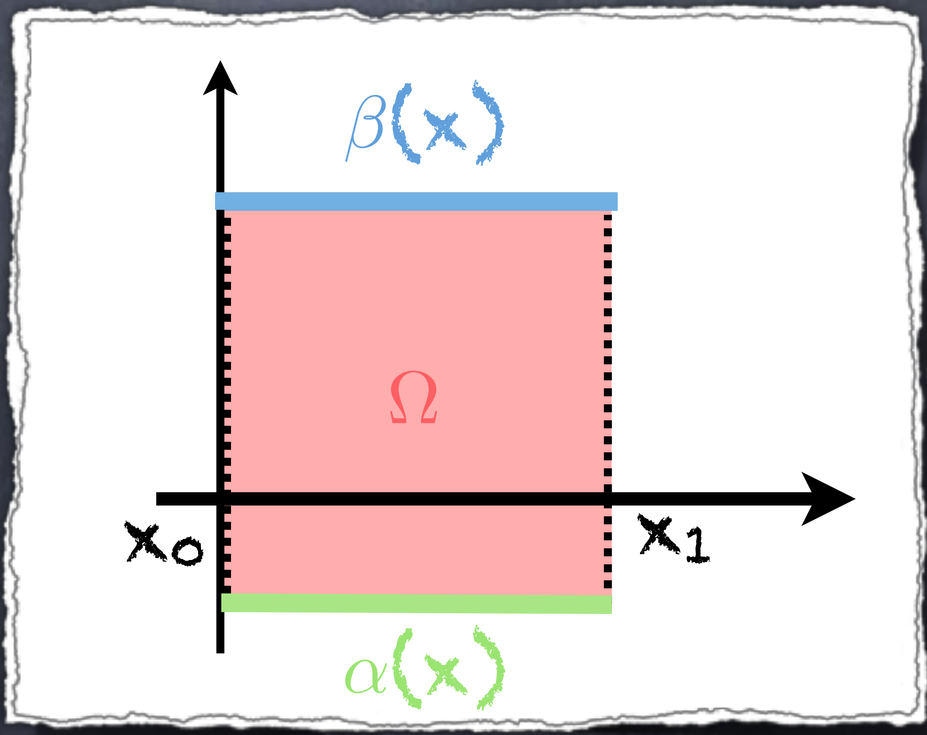


I. 2) Domaines réguliers

Exemples

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } |x-2| \leq 2 \text{ et } |y-2| \leq 3\}$

  $= \{x \in [0,4],\ \text{et } -1 = \alpha(x) \leq y \leq 5 = \beta(x)\}$



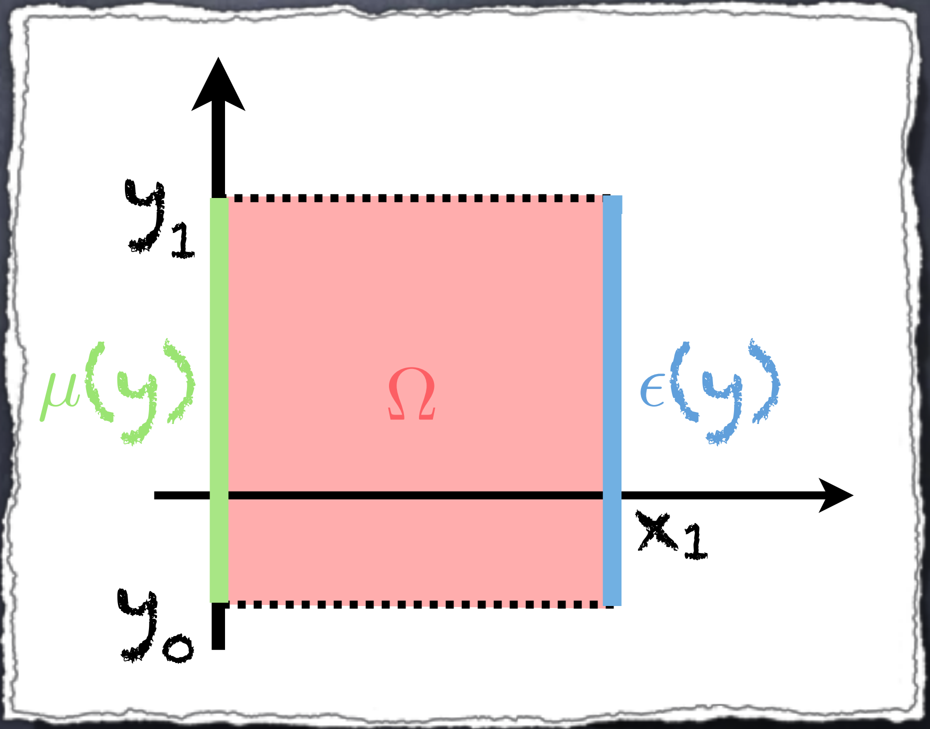
I. 2) Domaines réguliers

Exemples

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } |x-2| \leq 2 \text{ et } |y-2| \leq 3\}$

  $= \{x \in [0,4],\ \text{et } -1 = \alpha(x) \leq y \leq 5 = \beta(x)\}$

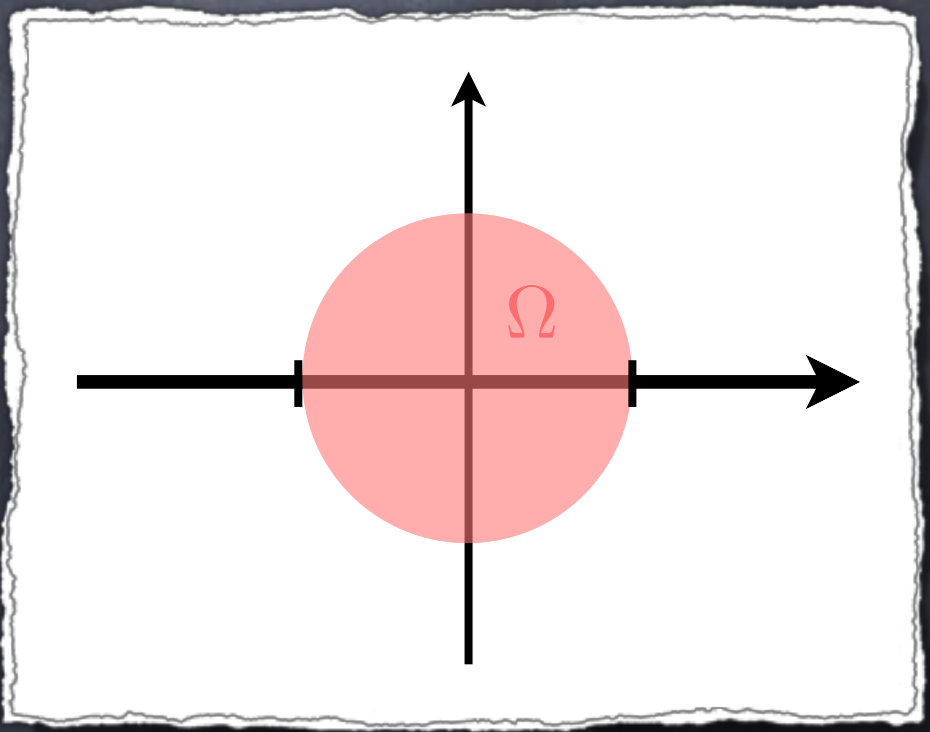
  $= \{y \in [-1,5],\ \text{et } 0 = \mu(y) \leq x \leq 4 = \epsilon(y)\}$



I. 2) Domaines réguliers

Exemples

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ t.q. } |x-2| \leq 2 \text{ et } |y-2| \leq 3\}$
- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ t.q. } x^2 + y^2 \leq 1\}$



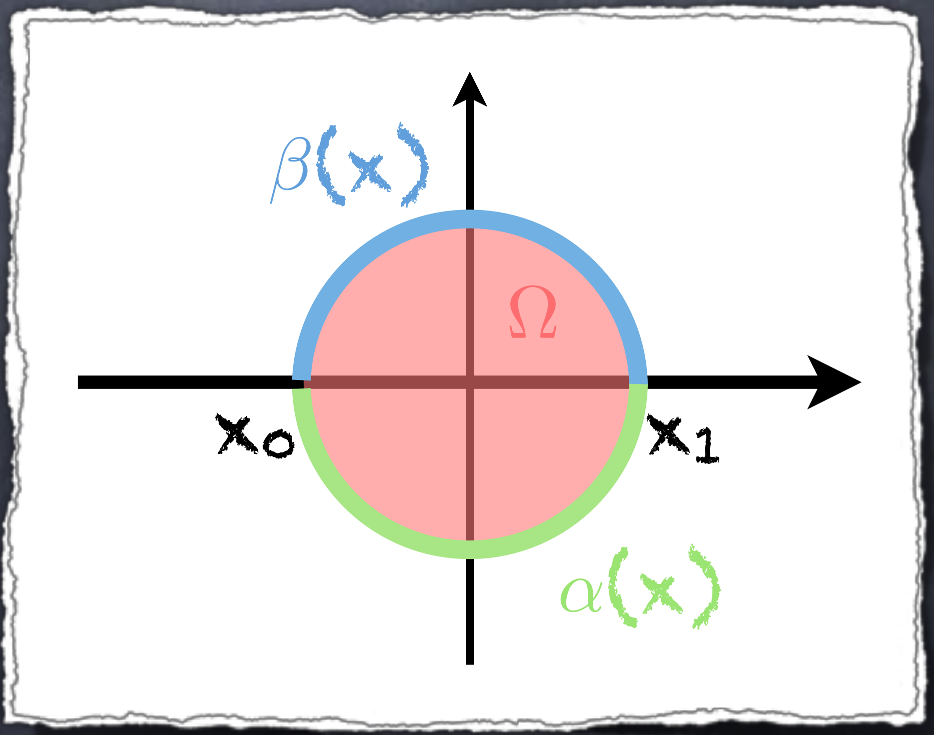
I. 2) Domaines réguliers

Exemples

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } |x-2| \leq 2 \text{ et } |y-2| \leq 3\}$

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } x^2 + y^2 \leq 1\}$

  $= \{x \in [-1,1] - \sqrt{1-x^2} = \alpha(x) \leq y \leq \sqrt{1-x^2} = \beta(x)\}$



I. 2) Domaines réguliers

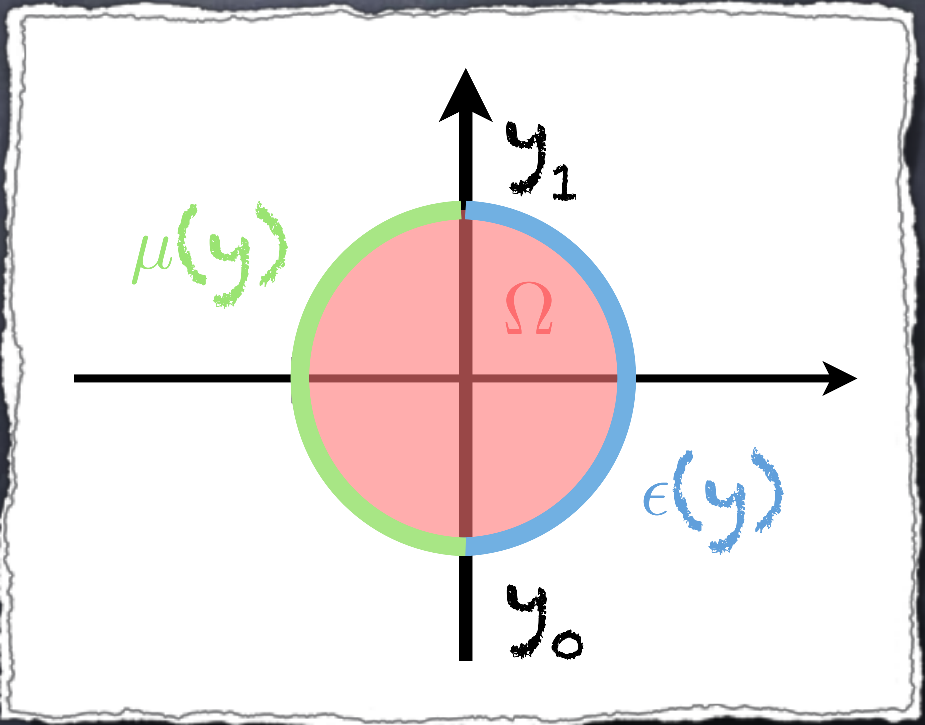
Exemples

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } |x-2| \leq 2 \text{ et } |y-2| \leq 3\}$

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$= \{x \in [-1,1] - \sqrt{1-x^2} = \alpha(x) \leq y \leq \sqrt{1-x^2} = \beta(x)\}$$

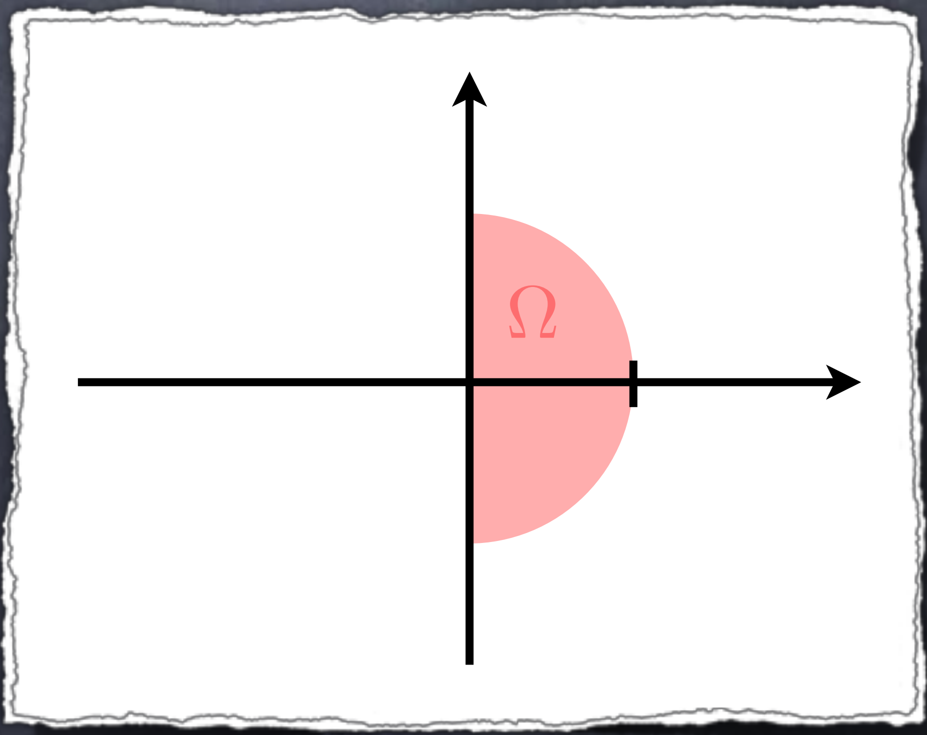
$$= \{y \in [-1,1] - \sqrt{1-y^2} = \mu(y) \leq x \leq \sqrt{1-y^2} = \epsilon(y)\}$$



I. 2) Domaines réguliers

Exemples

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } |x-2| \leq 2 \text{ et } |y-2| \leq 3\}$
- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } x^2 + y^2 \leq 1\}$
- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$



I. 2) Domaines réguliers

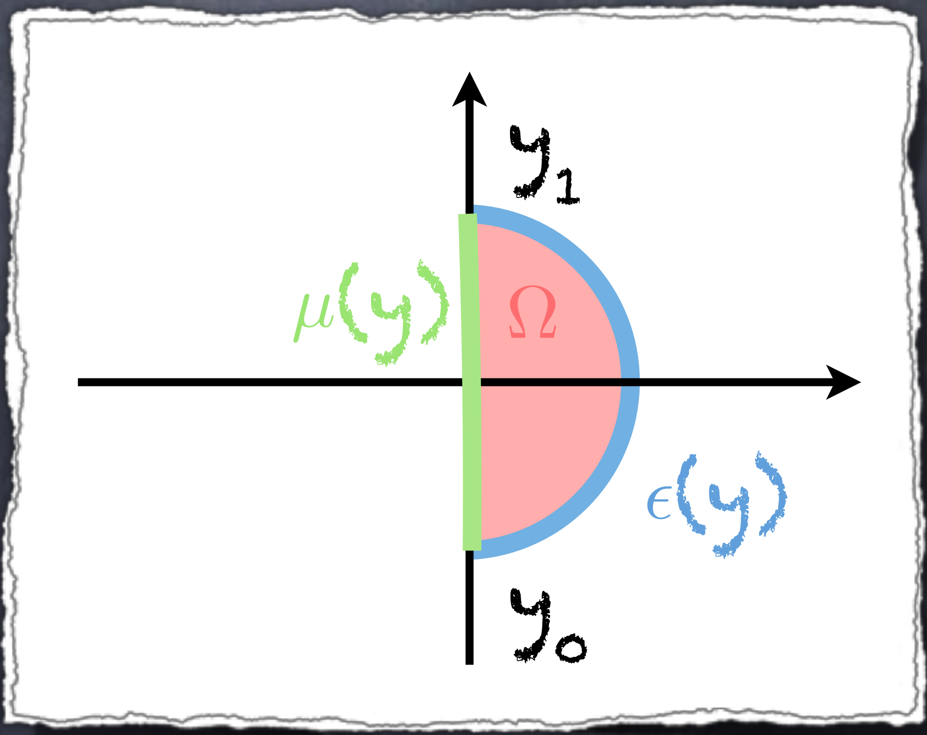
Exemples

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } |x-2| \leq 2 \text{ et } |y-2| \leq 3\}$

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } x^2+y^2 \leq 1\}$

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } x^2+y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$

$$= \{y \in [-1,1],\ \text{et } 0 = \mu(y) \leq x \leq \sqrt{1-y^2} = \epsilon(y)\}$$

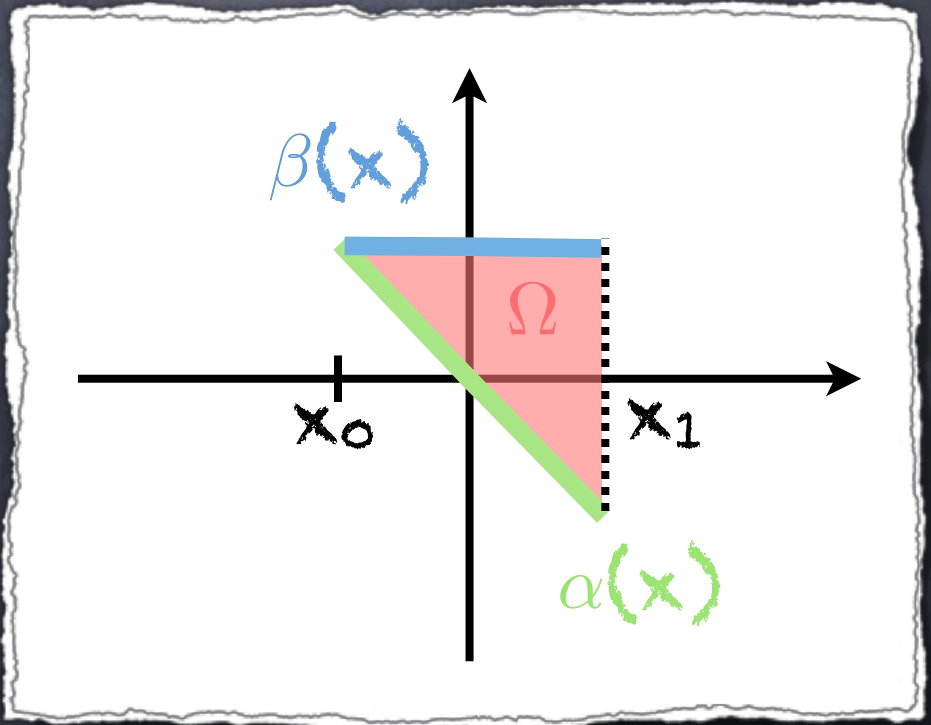


I. 2) Domaines réguliers

Exemples

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } |x-2| \leq 2 \text{ et } |y-2| \leq 3\}$
- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } x^2+y^2 \leq 1\}$
- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } x^2+y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$
- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } \max(|x|,|y|) \leq 1 \text{ et } x+y \geq 0\}$

$$= \{x \in [-1,1],\ \text{et}$$
$$-x = \alpha(x) \leq y \leq 1 = \beta(x)\}$$



I. 2) Domaines réguliers

Exemples

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ t.q. } |x-2| \leq 2 \text{ et } |y-2| \leq 3\}$

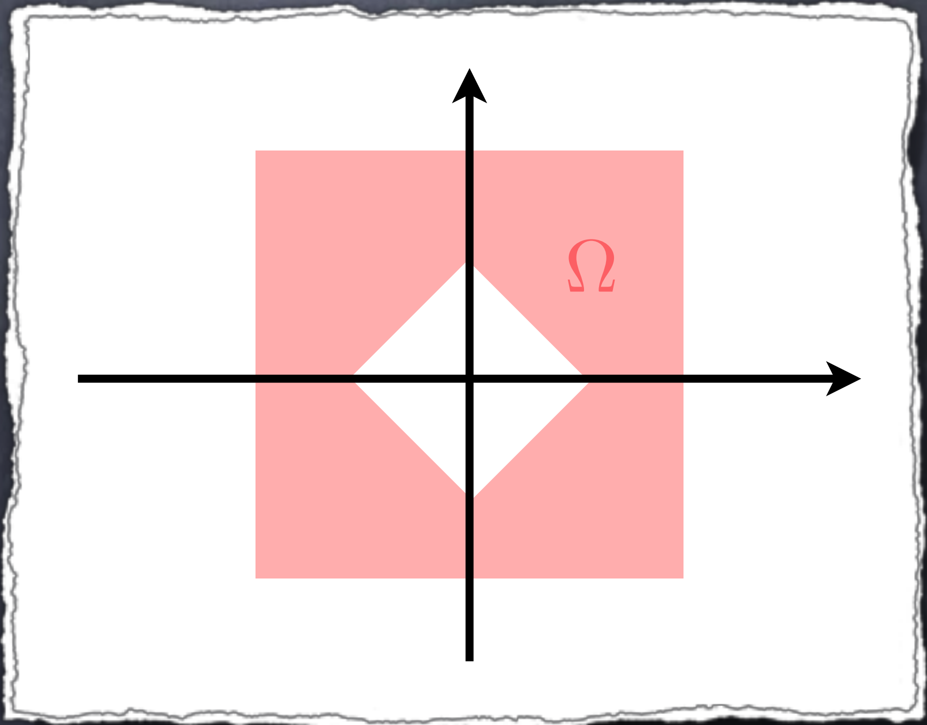
- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ t.q. } x^2+y^2 \leq 1\}$

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ t.q. } x^2+y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ t.q. } \max(|x|,|y|) \leq 1 \text{ et } x+y \geq 0\}$

- Un exemple de domaine non régulier :

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ t.q. } |x|+|y| \geq 1 \text{ et } \max(|x|,|y|) \leq 2\}$$



I. 2) Domaines réguliers

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier. On a :

- Si $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ où $x \in [x_0, x_1]$ et $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy}_{\text{Fonction de } x}\,dx$$

- Si $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ où $y \in [y_0, y_1]$ et $\mu(y) \leq x \leq \epsilon(y)\}$

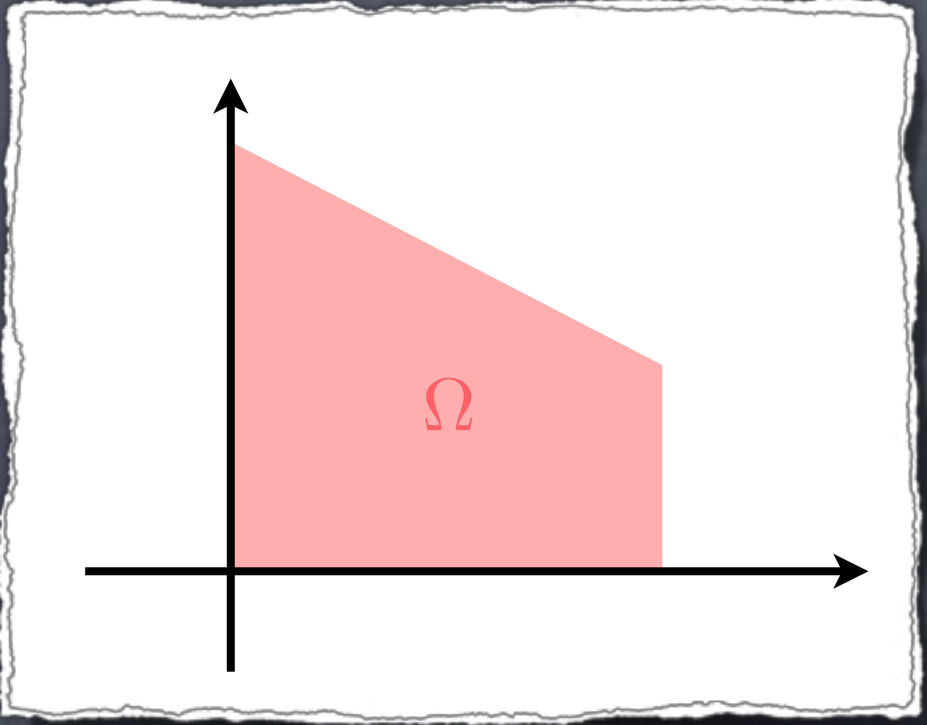
$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_{y_0}^{y_1} \underbrace{\int_{\mu(y)}^{\epsilon(y)} f(x,y)\,dx}_{\text{Fonction de } y}\,dy$$

I. 2) Domaines réguliers

Exemple

Soit $\Omega = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ \text{t.q. } x+y \leq 2 \text{ et } x \leq 1\}$

Calculer l'aire de Ω de 2 façons



(détails au (vrai) tableau)

I. 2) Domaines réguliers

1.2.2 Théorème (Fubini, admis)

Soit f une fonction continue sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier tel que

- $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ où } x \in [x_0, x_1] \text{ et } \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$
- ET $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ où } y \in [y_0, y_1] \text{ et } \mu(y) \leq x \leq \epsilon(y)\}$

alors l'ordre d'intégration n'a aucune importance :

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_{x_0}^{x_1} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y_0}^{y_1} \int_{\mu(y)}^{\epsilon(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

I. 2) Domaines réguliers

1.2.2 Théorème (Fubini, admis)

Soit f une fonction continue sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier tel que

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ où $x \in [x_0, x_1]$ et $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$
- ET $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ où $y \in [y_0, y_1]$ et $\mu(y) \leq x \leq \epsilon(y)\}$

alors l'ordre d'intégration n'a aucune importance :

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_{x_0}^{x_1} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y_0}^{y_1} \int_{\mu(y)}^{\epsilon(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Remarque :

Si f n'est pas continue, alors le résultat peut ne plus être vrai !

I. 3) Changement de coordonnées

1.2.2 Théorème (admis)

Soit f une fonction continue sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $\underline{\varphi}(\tilde{x},\tilde{y})$ une fonction C^1 bijective de $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \to \Omega$

On a : $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \iint_{\tilde{\Omega}} f(\varphi(\tilde{x},\tilde{y}))\,|\underline{\underline{J}}_{(\tilde{x},\tilde{y})}\underline{\varphi}|\,d\tilde{x}d\tilde{y}$

où $|\underline{\underline{J}}_{(\tilde{x},\tilde{y})}\underline{\varphi}| = \det\begin{bmatrix} \partial_{\tilde{x}}\varphi_1 & \partial_{\tilde{y}}\varphi_1 \\ \partial_{\tilde{x}}\varphi_2 & \partial_{\tilde{y}}\varphi_2 \end{bmatrix}$

Exemple

À l'aide de ce théorème, retrouver la formule de calcul de l'aire d'un disque de rayon R.

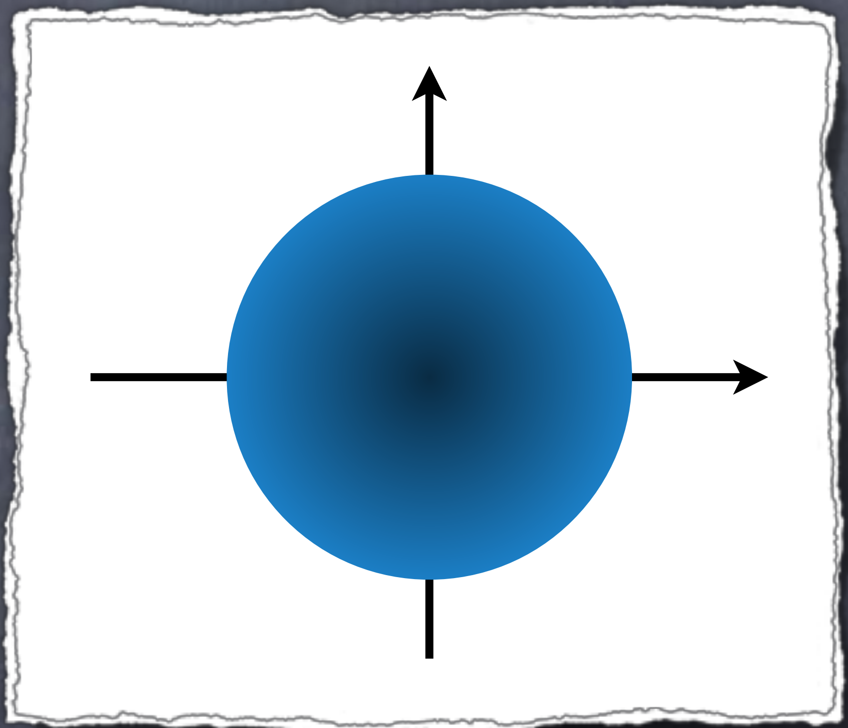
(détails au (vrai) tableau)

I. 3) Changement de coordonnées

Exemple :

Considérons une plaque circulaire de rayon 2 et d'épaisseur négligeable.

On suppose que sa densité est donnée par la fonction $\rho(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$



Calculer la masse de la plaque :

$$M = \iint_\Omega \rho(x,y)\,dxdy$$

et déterminer les coordonnées du centre de gravité de la plaque donnée par

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_\Omega x\,\rho(x,y)\,dxdy \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{M}\iint_\Omega y\,\rho(x,y)\,dxdy$$

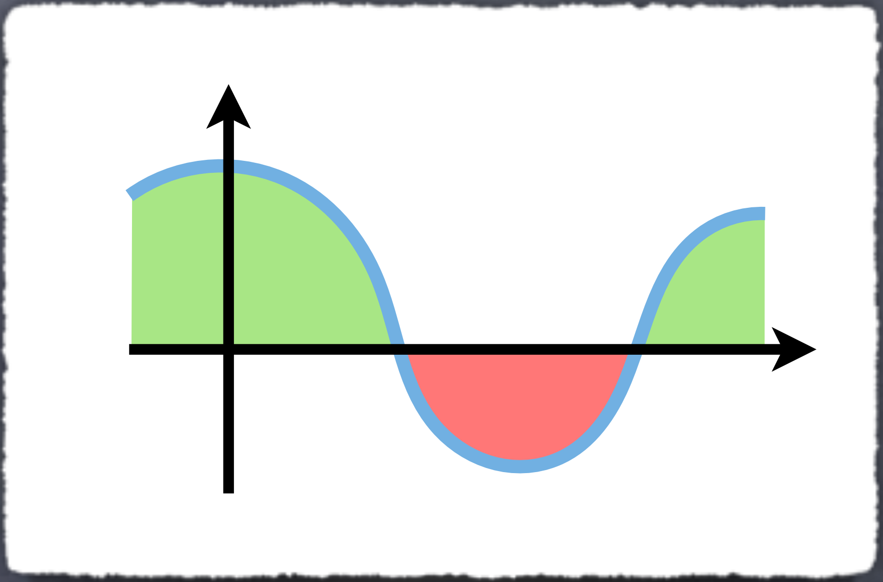
(détails au (vrai) tableau)

I. 4) Intégrale curviligne

Rappel :

Pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+ dx - \int_a^b f^- dx$$

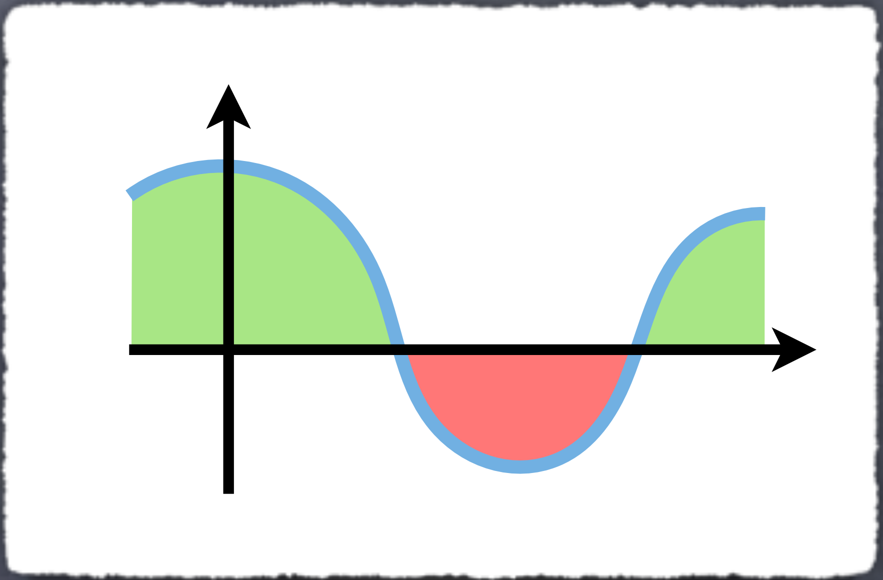


I. 4) Intégrale curviligne

Rappel :

Pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

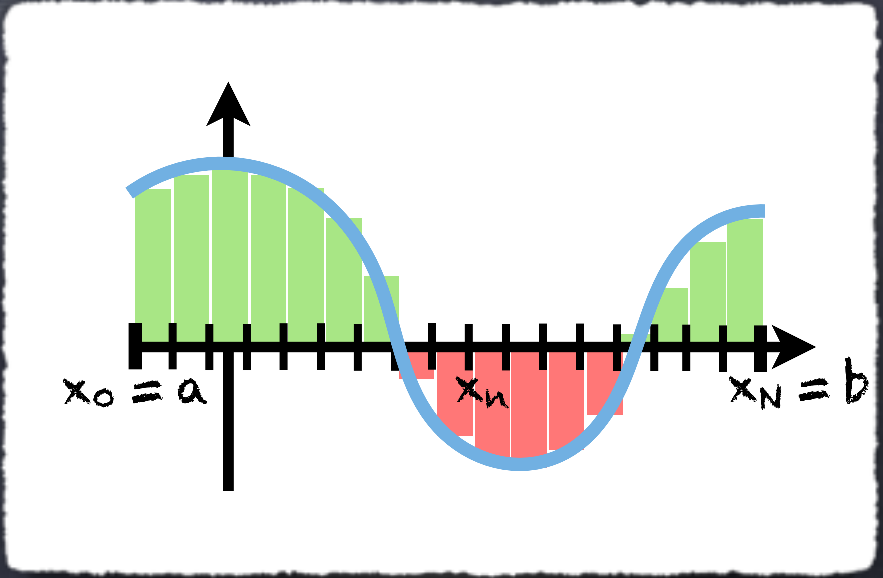
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+ dx - \int_a^b f^- dx$$



Construction de l'intégrale :
(Intégrale de Riemann, cf M6)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} f(x_n) \frac{b-a}{N}$$

$$\int_a^b \leftrightarrow \sum_{n=0}^{N} \text{ et } dx \leftrightarrow \frac{b-a}{N}$$



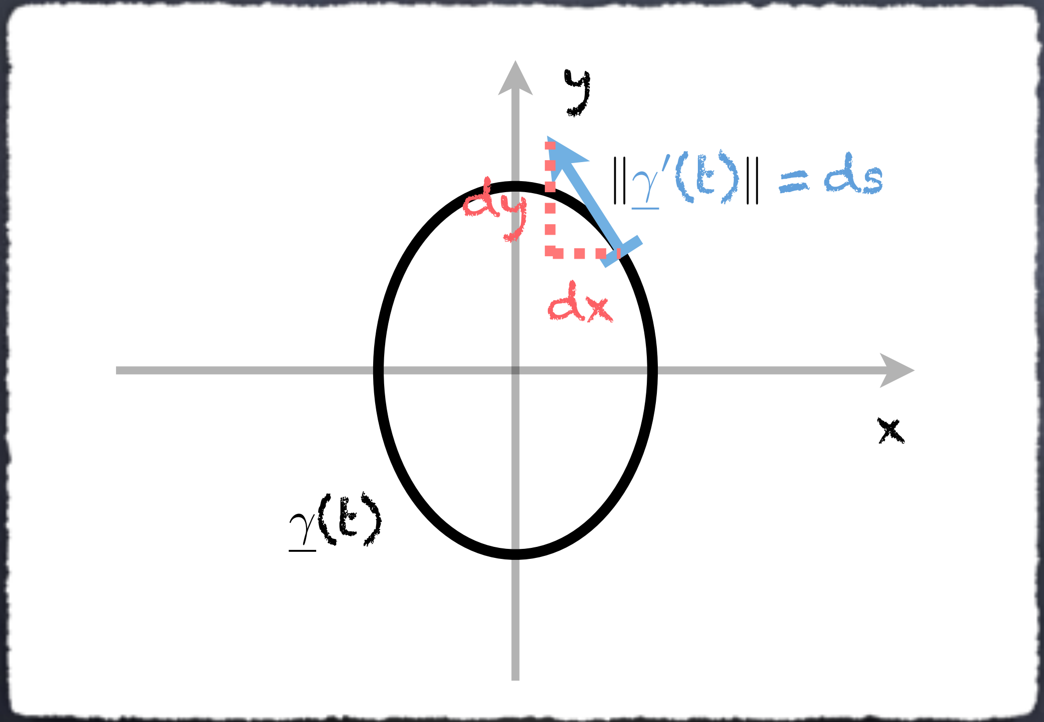
I. 4) Intégrale curviligne

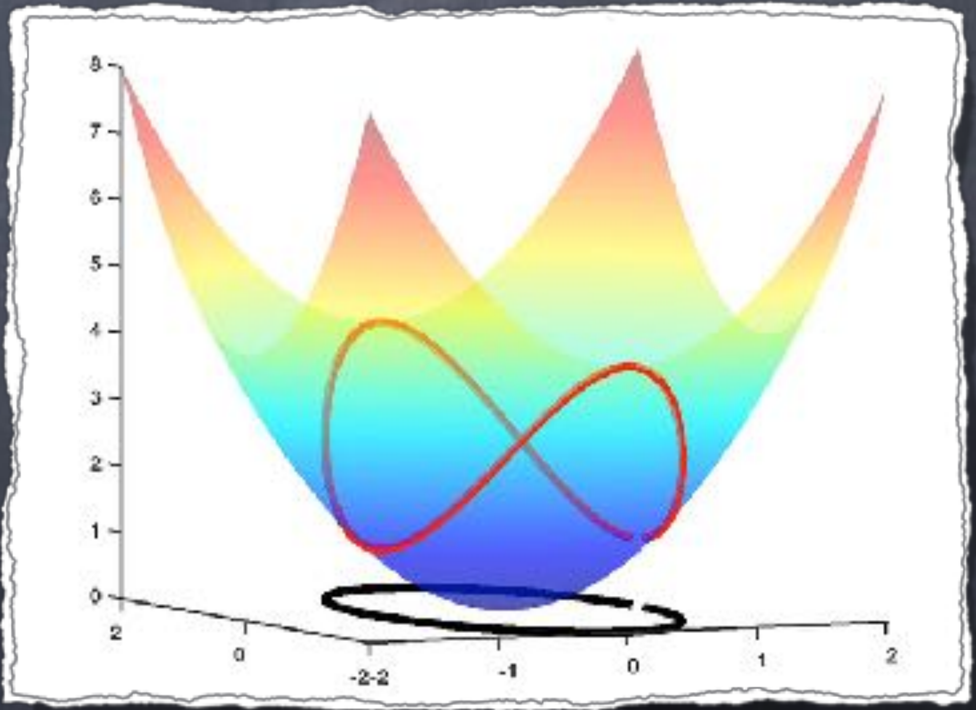
Soit f une fonction continue sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et C une courbe paramétrée par $\underline{\gamma}(t) : [0, T] \to C$.

Exemple :

$\underline{\gamma}(t) : [0, 2\pi] \to (\cos(t), 2\sin(t))$

$f(x, y) = x^2 + y^2$





$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$
$$= (\gamma_1'(t))^2 dt^2 + (\gamma_2'(t))^2 dt^2$$

$$I_C(f) = \int_C f(x, y)\, ds$$

I. 4) Intégrale curviligne

1.1.4 Définition (intégrale curviligne)

Soit f une fonction continue sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et C une courbe paramétrée par $\underline{\gamma}(t) : [0, T] \to \Omega$.

On appelle **intégrale le long de C** (ou **intégrale curviligne**) l'intégrale définie par :

$$I_C(f) = \int_C f(x,y)ds = \int_0^T f(\underline{\gamma}(t))\, |\underline{\gamma}'(t)|\, dt$$

où $|\underline{\gamma}'(t)| = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}$

Remarque :

Cette intégrale est une intégrale selon une variable !
Elle se calcule donc de manière « habituelle ».

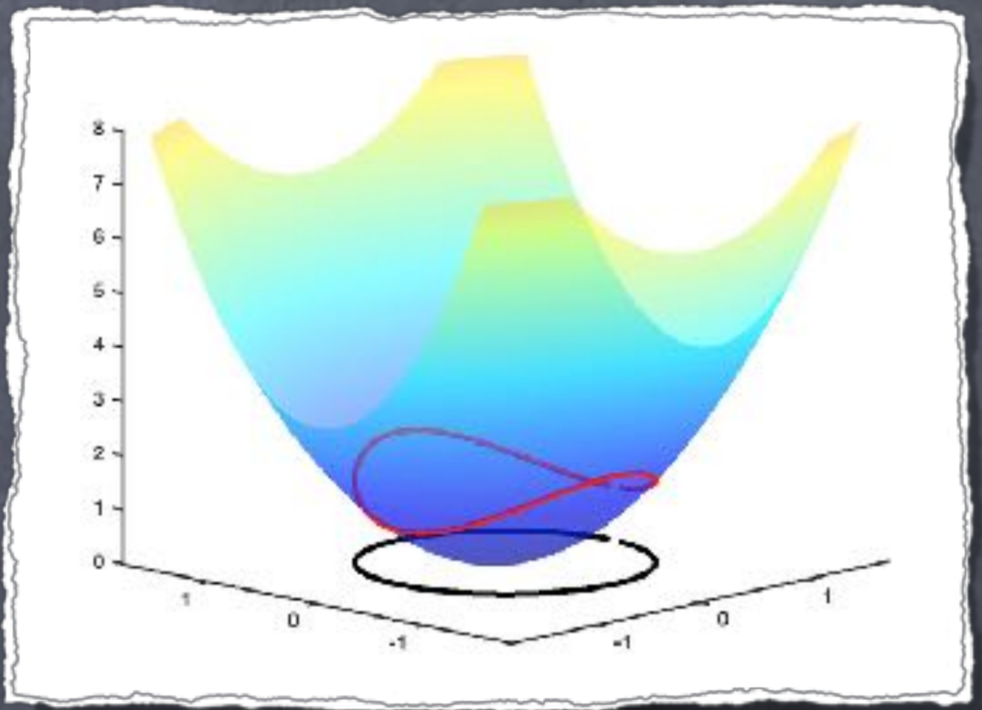
I. 4) Intégrale curviligne

Exemple :

Calculer l'intégrale de f le long de la trajectoire:

$\underline{\gamma}(t) : [0, 2\pi] \rightarrow (\cos(t), \sin(t))$

(détails au (vrai) tableau)



$f(x, y) = 2x^2 + y^2$

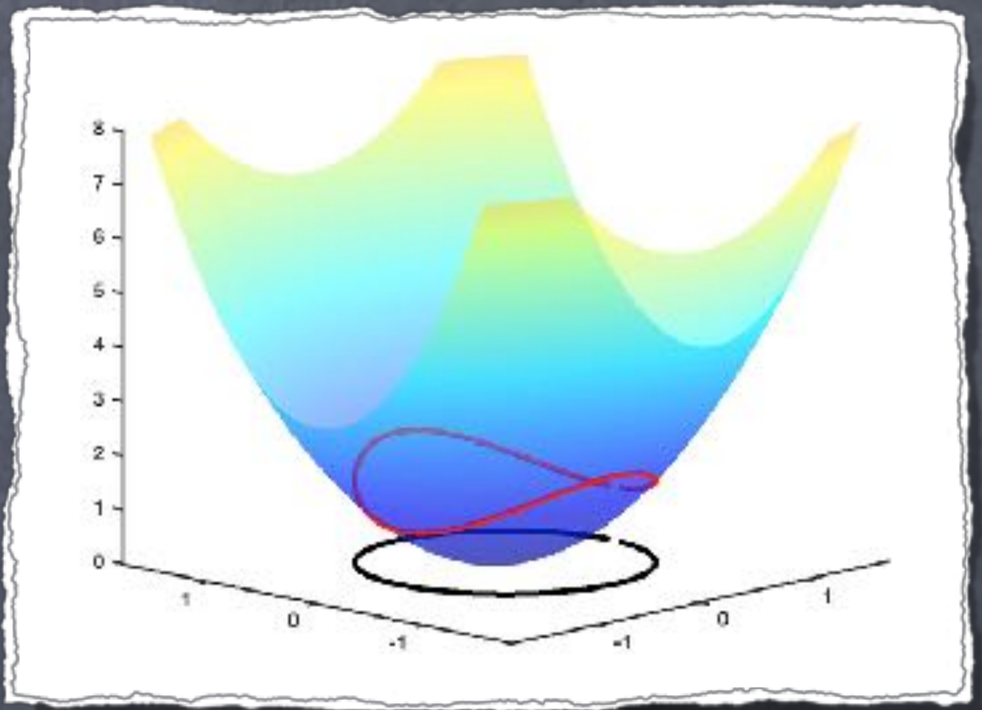
I. 4) Intégrale curviligne

Exemple :

Calculer l'intégrale de f le long de la trajectoire:

$\underline{\gamma}(t) : [0, 2\pi] \to (\cos(t), \sin(t))$

(détails au (vrai) tableau)



$f(x, y) = 2x^2 + y^2$

Que se passe-t-il si on change la paramétrisation du trajet par :

$\underline{\gamma}_2(t) : [0, \pi] \to (\cos(-2t), \sin(-2t))$

(détails au (vrai) tableau)

Au programme (chapitre 5) :

Objectif :

Étudier la notion d'intégrale pour les fonctions

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Plan :

I. Intégrale d'une fonction scalaire

II. Formes différentielles

1) Quelques définitions

2) Travail le long d'une trajectoire

3) Les théorèmes de Green-Riemann et de Poincaré

II. 1) Quelques définitions

Considérons la fonction $x_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$x_j : \underline{x} \to x_j$$

Remarque :

Cette application correspond simplement à prendre la j-ème coordonnées de $\underline{x}$

II. 1) Quelques définitions

Considérons la fonction $x_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$x_j : \underline{x} \to x_j$$

Il est facile de montrer que cette fonction est différentiable et nous avons en tout point $\underline{x}$:

$$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^2 \qquad d_{\underline{x}} x_j(\underline{h}) = h_j$$

En assimilant h_j à $d_{\underline{x}} x_j(\underline{h})$ qu'on notera plus simplement

$$d_{\underline{x}} x_j(\underline{h}) = dx_j(\underline{h})$$

on retrouve la notation des physiciens pour la différentielle d'une fonction f :

$$d_{\underline{x}} f(\underline{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1(\underline{h}) + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2(\underline{h})$$

II. 1) Quelques définitions

Une généralisation « naturelle » de la différentielle :

$$d_{\underline{x}}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$$

est la notion de 1-forme différentielle :

2.1.1 Définition (1-forme différentielle)

On appelle 1-forme (ou 1-forme différentielle) de classe C^k et on note $\omega_{\underline{x}}$ une application qui en tout point $\underline{x}$ est définie par

$$\omega_{\underline{x}} = \alpha_1(\underline{x})dx_1 + \alpha_2(\underline{x})dx_2$$

où $\alpha_1(\underline{x})$ et $\alpha_2(\underline{x})$ sont deux fonctions C^k

II. 1) Quelques définitions

Une généralisation « naturelle » de la différentielle :

$$d_{\underline{x}}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$$

est la notion de 1-forme différentielle :

2.1.1 Définition (1-forme différentielle)

On appelle 1-forme (ou 1-forme différentielle) de classe C^k et on note $\omega_{\underline{x}}$ une application qui en tout point $\underline{x}$ est définie par

$$\omega_{\underline{x}} = \alpha_1(\underline{x})dx_1 + \alpha_2(\underline{x})dx_2$$

Remarque 1 :

En chaque point $\underline{x}$ fixé, la 1-forme $\omega_{\underline{x}}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^2 \quad \omega_{\underline{x}}(\underline{h}) = \alpha_1(\underline{x})h_1 + \alpha_2(\underline{x})h_2$

II. 1) Quelques définitions

Une généralisation « naturelle » de la différentielle :

$$d_{\underline{x}}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$$

est la notion de 1-forme différentielle :

2.1.1 Définition (1-forme différentielle)

On appelle 1-forme (ou 1-forme différentielle) de classe C^k et on note $\omega_{\underline{x}}$ une application qui en tout point $\underline{x}$ est définie par

$$\omega_{\underline{x}} = \alpha_1(\underline{x})dx_1 + \alpha_2(\underline{x})dx_2$$

Remarque 2 :

Si f est une fonction C^2, alors sa différentielle $d_{\underline{x}}f$ est une 1-forme de classe C^1.

II. 1) Quelques définitions

2.1.2 Définition (forme exacte)

On dira qu'une 1-forme $\omega_{\underline{x}}$ est **exacte** s'il existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 t.q. $\omega_{\underline{x}} = d_{\underline{x}} f$

Exemples :

- Montrer que la 1-forme définie par $\omega_{\underline{x}} = x dx + y dy$ est exacte.
  (détails au (vrai) tableau)

II. 1) Quelques définitions

2.1.2 Définition (forme exacte)

On dira qu'une 1-forme $\omega_{\underline{x}}$ est **exacte** s'il existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 t.q. $\omega_{\underline{x}} = d_{\underline{x}} f$

Exemples :

- Montrer que la 1-forme définie par $\omega_{\underline{x}} = xdx + ydy$ est exacte.
  (détails au (vrai) tableau)

- Montrer que la 1-forme définie par $\omega_{\underline{x}} = ydx$ **n'est pas** exacte.
  (détails au (vrai) tableau)

II. 2) Travail le long d'une trajectoire

2.2.1 Définition (Intégrale curviligne, le retour...)

Soit $\omega_{\underline{x}}$ une 1-forme de classe C^1 et $\underline{\gamma}(t) : [0,T] \to \mathbb{R}^2$ une trajectoire. On définit l'intégrale curviligne de $\omega_{\underline{x}}$ le long de $\underline{\gamma}(t)$ ainsi :

$$\int_\gamma \omega_{\underline{x}} = \int_0^T \omega_{\underline{\gamma}(t)}(\underline{\gamma}'(t))\,dt$$

$$= \int_0^T \alpha_1(\underline{\gamma}(t))\gamma_1'(t) + \alpha_2(\underline{\gamma}(t))\gamma_2'(t)\,dt$$

II. 2) Travail le long d'une trajectoire

2.2.1 Définition (Intégrale curviligne, le retour...)

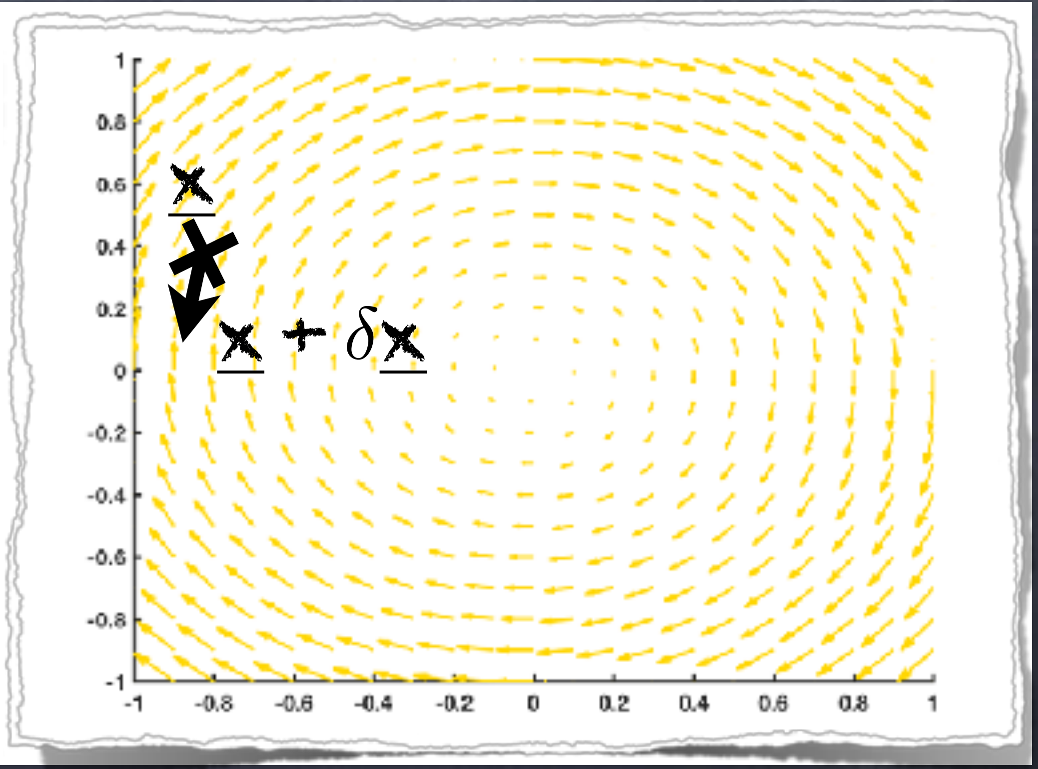
Soit $\omega_{\underline{x}}$ une 1-forme de classe C^1 et $\underline{\gamma}(t):[0,T]\to\mathbb{R}^2$ une trajectoire. On définit l'intégrale curviligne de $\omega_{\underline{x}}$ le long de $\underline{\gamma}(t)$ ainsi :

$$\int_\gamma \omega_{\underline{x}} = \int_0^T \omega_{\underline{\gamma}(t)}(\underline{\gamma}'(t))\,dt$$

Interpretation :

Travail infinitésimale pour passer de $\underline{x}$ à $\underline{x}+\delta\underline{x}$:

$$W(\underline{x}\to\underline{x}+\delta\underline{x}) = \omega_{\underline{x}}(\delta\underline{x})$$



$\underline{x}\in\mathbb{R}^2 \to (\alpha_1(\underline{x}),\alpha_2(\underline{x}))$

II. 2) Travail le long d'une trajectoire

2.2.1 Définition (Intégrale curviligne, le retour...)

Soit $\omega_{\underline{x}}$ une 1-forme de classe C^1 et $\underline{\gamma}(t) : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ une trajectoire. On définit l'intégrale curviligne de $\omega_{\underline{x}}$ le long de $\underline{\gamma}(t)$ ainsi :

$$\int_\gamma \omega_{\underline{x}} = \int_0^T \omega_{\underline{\gamma}(t)}(\underline{\gamma}'(t))\,dt$$

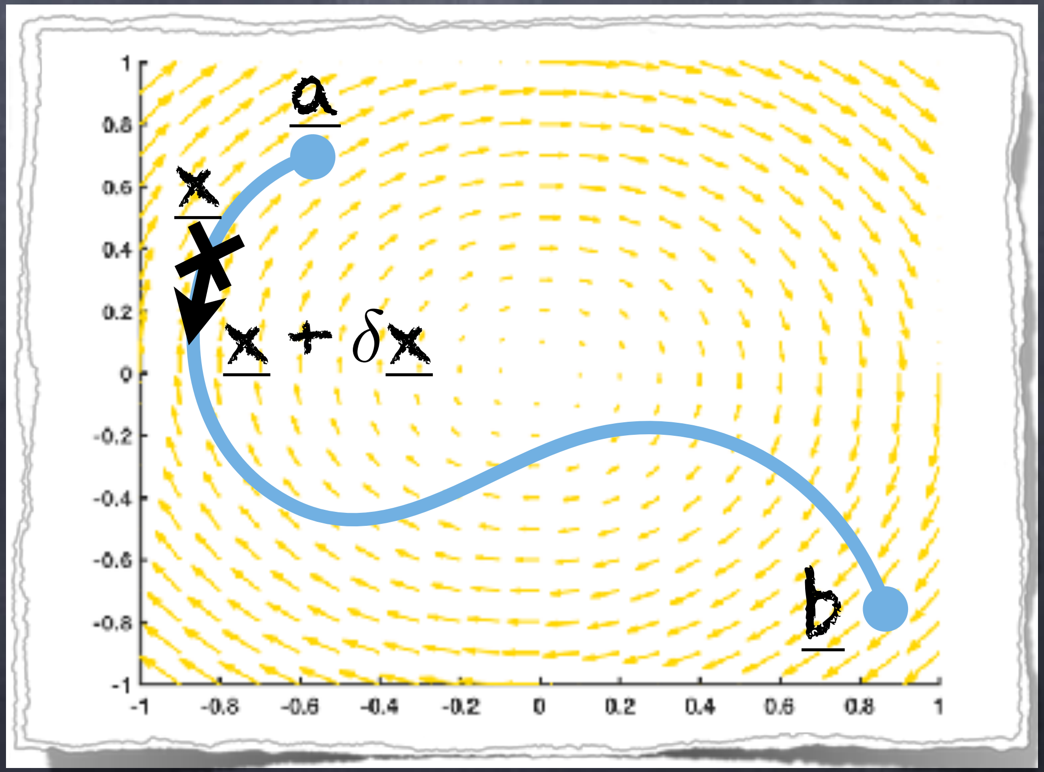
Interpretation :

Travail infinitésimale pour passer de $\underline{x}$ à $\underline{x} + \delta\underline{x}$:

$$W(\underline{x} \to \underline{x} + \delta\underline{x}) = \omega_{\underline{x}}(\delta\underline{x})$$

Travail de $\underline{a}$ à $\underline{b}$ suivant $\underline{\gamma}(t)$:

$$W_{\underline{\gamma}}(\underline{a} \to \underline{b}) = \int_\gamma \omega_{\underline{x}}$$



$\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \to (\alpha_1(\underline{x}), \alpha_2(\underline{x}))$

II. 2) Travail le long d'une trajectoire

2.2.1 Définition (Intégrale curviligne, le retour...)

Soit $\omega_{\underline{x}}$ une 1-forme de classe C^1 et $\underline{\gamma}(t) : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ une trajectoire. On définit l'intégrale curviligne de $\omega_{\underline{x}}$ le long de $\underline{\gamma}(t)$ ainsi :

$$\int_\gamma \omega_{\underline{x}} = \int_0^T \omega_{\underline{\gamma}(t)}(\underline{\gamma}'(t))\,dt$$

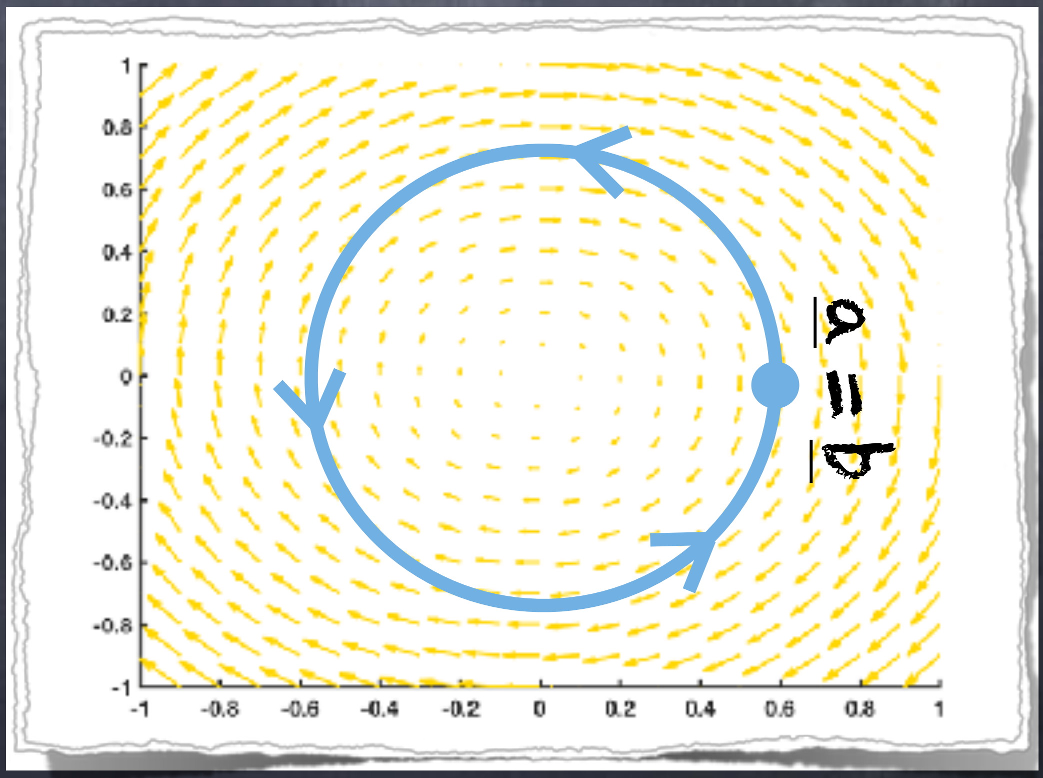
Exemple :

Déterminer le travail effectué lors du trajet

$$\underline{\gamma} : t \in [0,1] \to (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

dans le champ de forces donné par : $\omega_{\underline{x}} = y dx - x dy$

(détails au (vrai) tableau)



$\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \to (\alpha_1(\underline{x}), \alpha_2(\underline{x}))$

II. 2) Travail le long d'une trajectoire

2.2.2 Théorème

Soit $\omega_{\underline{x}}$ une 1-forme exacte, i.e. $\omega_{\underline{x}} = d_{\underline{x}} f$, alors on a :

$$\int_\gamma \omega_{\underline{x}} = \int_\gamma d_{\underline{x}} f = f(\underline{b}) - f(\underline{a})$$

où $\underline{b} = \underline{\gamma}(T)$ et $\underline{a} = \underline{\gamma}(0)$

Preuve : au (vrai) tableau !

$\blacksquare$

II. 2) Travail le long d'une trajectoire

2.2.2 Théorème

Soit $\omega_{\underline{x}}$ une 1-forme exacte, i.e. $\omega_{\underline{x}} = d_{\underline{x}} f$, alors on a :

$$\int_\gamma \omega_{\underline{x}} = \int_\gamma d_{\underline{x}} f = f(\underline{b}) - f(\underline{a})$$

où $\underline{b} = \underline{\gamma}(T)$ et $\underline{a} = \underline{\gamma}(0)$

Remarque 1 :

Cette propriété est l'équivalent du théorème fondamentale pour les fonctions d'une variable :

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

II. 2) Travail le long d'une trajectoire

2.2.2 Théorème

Soit $\omega_{\underline{x}}$ une 1-forme exacte, i.e. $\omega_{\underline{x}} = d_{\underline{x}} f$, alors on a :

$$\int_\gamma \omega_{\underline{x}} = \int_\gamma d_{\underline{x}} f = f(\underline{b}) - f(\underline{a})$$

où $\underline{b} = \underline{\gamma}(T)$ et $\underline{a} = \underline{\gamma}(0)$

Remarque 2 :

On notera que le résultat ne dépend pas du trajet $\underline{\gamma}(t)$ choisi pour rejoindre les points $\underline{a}$ et $\underline{b}$

II. 2) Travail le long d'une trajectoire

2.2.2 Théorème

Soit $\omega_{\underline{x}}$ une 1-forme exacte, i.e. $\omega_{\underline{x}} = d_{\underline{x}} f$, alors on a :

$$\int_{\gamma} \omega_{\underline{x}} = \int_{\gamma} d_{\underline{x}} f = f(\underline{b}) - f(\underline{a})$$

où $\underline{b} = \underline{\gamma}(T)$ et $\underline{a} = \underline{\gamma}(0)$

Remarque 2 :

On notera que le résultat ne dépend pas du trajet $\underline{\gamma}(t)$ choisi pour rejoindre les points $\underline{a}$ et $\underline{b}$

Les champs de forces pour lesquels le travail est indépendant du trajet (correspond aux formes exactes) sont appelés champs conservatifs.

II. 2) Travail le long d'une trajectoire

2.2.2 Théorème

Soit $\omega_{\underline{x}}$ une 1-forme exacte, i.e. $\omega_{\underline{x}} = d_{\underline{x}}f$, alors on a :

$$\int_\gamma \omega_{\underline{x}} = \int_\gamma d_{\underline{x}}f = f(\underline{b}) - f(\underline{a})$$

où $\underline{b} = \underline{\gamma}(T)$ et $\underline{a} = \underline{\gamma}(0)$

2.2.3 Corollaire

Si la trajectoire décrit une boucle, i.e. $\underline{b} = \underline{a}$, alors

$$\int_\gamma \omega_{\underline{x}} = \int_\gamma d_{\underline{x}}f = 0$$

Preuve : Application directe du résultat précédent ! $\blacksquare$

II. 3) Le théorème de Green-Riemann

Soit $\omega_{\underline{x}}$ une 1-forme de classe C^1 : $\omega_{\underline{x}} = \alpha_1(\underline{x})dx_1 + \alpha_2(\underline{x})dx_2$

et Ω un domaine régulier, i.e. :

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ où } x \in [x_0, x_1] \text{ et } \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

où $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ où } y \in [y_0, y_1] \text{ et } \mu(y) \leq x \leq \epsilon(y)\}$

2.3.1 Théorème de Green-Riemann (admis)

Nous avons la relation suivante :

$$\iint_\Omega d\omega_{\underline{x}} := \iint_\Omega \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\underline{\gamma}} \omega_{\underline{x}}$$

où $\underline{\gamma}(t)$ est une trajectoire parcourant le bord de Ω dans le sens trigonométrique.

II. 3) Le théorème de Green-Riemann

2.3.1 Théorème de Green-Riemann (admis)

Nous avons la relation suivante :

$$\iint_\Omega d\omega_{\underline{x}} := \iint_\Omega \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\underline{\gamma}} \omega_{\underline{x}}$$

où $\underline{\gamma}(t)$ est une trajectoire parcourant le bord de Ω dans le sens trigonométrique.

Exemple d'application :

À l'aide du théorème ci-dessus, montrer que l'aire d'un domaine Ω peut s'exprimer comme suit :

$$\text{Aire}(\Omega) = \int_\gamma x dy = -\int_\gamma y dx$$

(détails au (vrai) tableau)

II. 3) Le théorème de Green-Riemann

2.3.1 Théorème de Green-Riemann (admis)

Nous avons la relation suivante :

$$\iint_{\Omega} d\omega_{\underline{x}} := \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right) dxdy \ = \int_{\underline{\gamma}} \omega_{\underline{x}}$$

où $\underline{\gamma}(t)$ est une trajectoire parcourant le bord de Ω dans le sens trigonométrique.

Remarque :

Outre son aspect mathématique, ce théorème sert à démontrer des résultats importants en physique - mathématiques comme le théorème Flux-divergence :

$$\iint_{\Omega} \mathrm{div}(\underline{f}) dxdy := \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dxdy \ = \int_{\partial\Omega} \underline{f} \cdot \underline{\nu}$$

II. 3) Le théorème de Green-Riemann

2.3.1 Théorème de Green-Riemann (admis)

Nous avons la relation suivante :

$$\iint_\Omega d\omega_{\underline{x}} := \iint_\Omega \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\underline{\gamma}} \omega_{\underline{x}}$$

où $\underline{\gamma}(t)$ est une trajectoire parcourant le bord de Ω dans le sens trigonométrique.

On peut remarquer avec ce théorème que si $\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x} - \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial y} = 0$

alors, comme pour les formes exactes nous avons :

$$\int_\gamma \omega_{\underline{x}} = 0$$

On rappelle que dans ce cas, $\underline{\gamma}(t)$ décrit une boucle !

II. 3) Le théorème de Poincaré

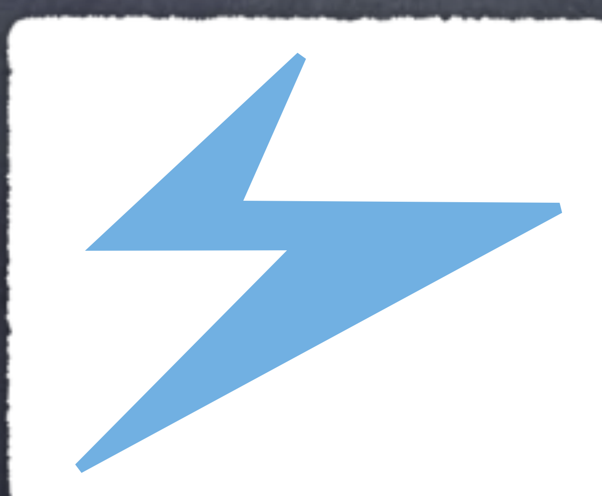
2.3.2 Définition (Forme fermée)

Soit $\omega_{\underline{x}}$ une 1-forme de classe C^1. On dit que c'est une forme fermée ssi : $\partial_y \alpha_1 - \partial_x \alpha_2 = 0$

2.3.3 Définition (Ouvert étoilé)

On dira qu'un ouvert Ω est étoilé s'il existe un point $\underline{a} \in \Omega$ t.q. $\forall \underline{x} \in \Omega$ et $t \in [0,1]$, $\quad t\underline{x} + (1-t)\underline{a} \in \Omega$

Ensemble étoilé



Ensemble non étoilé

II. 3) Le théorème de Poincaré

2.3.2 Définition (Forme fermée)

Soit $\omega_{\underline{x}}$ une 1-forme de classe C^1. On dit que c'est une forme fermée ssi : $\partial_y \alpha_1 - \partial_x \alpha_2 = 0$

2.3.3 Définition (Ouvert étoilé)

On dira qu'un ouvert Ω est étoilé s'il existe un point $\underline{a} \in \Omega$ t.q. $\forall \underline{x} \in \Omega$ et $t \in [0,1]$, $t\underline{x} + (1-t)\underline{a} \in \Omega$

2.3.4 Théorème de Poincaré (admis)

Dans un ouvert étoilé, nous avons l'equivalence

$$\omega_{\underline{x}} \text{ est fermé} \Leftrightarrow \omega_{\underline{x}} \text{ est exacte}$$

Plan détaillé du chapitre 5

I. Intégrale d'une fonction scalaire

1) Définition et propriétés
2) Calcul explicite sur les domaines réguliers
3) Changement de coordonnées
4) Intégrale curviligne

II. Formes différentielles

1) Quelques définitions
2) Travail le long d'une trajectoire
3) Les théorèmes de Green-Riemann et de Poincaré