M5 : Introduction aux équations différentielles et aux fonctions de plusieurs variables réelles

Chapitre 4 :
Forme matricielle des dérivées partielles et dérivées d'ordres supérieures
Cours 8-9-10

Année 2018 - 2019

Contact : A. Tonnoir
antoine.tonnoir@insa-rouen.fr

Introduction

Dans le chapitre 3, nous avons étudié les fonctions de plusieurs variables scalaire :

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$$

Pour ces fonctions, nous avons généralisé les notions de :

- continuité
- dérivabilité (via la notion de différentielle)

$$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n, \quad f(\underline{a} + \underline{h}) = f(\underline{a}) + d_a f(\underline{h}) + \| \underline{h} \| \, \epsilon_a(\underline{h})$$

$$\text{où} \quad d_a f(\underline{h}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_{x_i} f(\underline{a})$$

Introduction

Dans le chapitre 3, nous avons étudié les fonctions de plusieurs variables scalaire :

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Pour ces fonctions, nous avons généralisé les notions de :

- continuité
- dérivabilité (via la notion de différentielle)

$$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n, \; f(\underline{a} + \underline{h}) = f(\underline{a}) + d_a f(\underline{h}) + \| \underline{h} \| \, \epsilon_a(\underline{h})$$

Objectif 1 : Généraliser la notion de différentielle aux fonctions vectorielles :

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}^p}$$

Introduction

Dans le chapitre 3, nous avons étudié les fonctions de plusieurs variables scalaire :

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Pour ces fonctions, nous avons généralisé les notions de :

- continuité
- dérivabilité (via la notion de différentielle)

$$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n, \; f(\underline{a} + \underline{h}) = f(\underline{a}) + d_a f(\underline{h}) + \| \underline{h} \| \, \epsilon_a(\underline{h})$$

Objectif 2 : Définir la notion de dérivée à un ordre plus grand que 1 (2…).

Introduction

Dans le chapitre 3, nous avons étudié les fonctions de plusieurs variables scalaire :

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Pour ces fonctions, nous avons généralisé les notions de :

- continuité
- dérivabilité (via la notion de différentielle)

$$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n, \;\; f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + d_a f(\underline{h}) + \| \underline{h} \| \, \epsilon_a(\underline{h})$$

Objectif 3 : Se servir de la notion de différentielle pour étudier les extrema de f

Au programme (chapitre 4) :

Objectif :

Étudier les fonctions de plusieurs variables vectorielles :

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

Plan :

I. Forme matricielle des dérivées d'ordre 1

II. Dérivées d'ordres supérieures

III. Remarque sur les fonctions implicites

Au programme (chapitre 4) :

Objectif :

Étudier les fonctions de plusieurs variables vectorielles :

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

Plan :

I. Forme matricielle des dérivées d'ordre 1

1) Le gradient et ses propriétés
2) Matrice Jacobienne
3) Dérivée de composée de fonctions

II. Dérivées d'ordres supérieures

III. Remarque sur les fonctions implicites

I. 1) Le gradient et ses propriétés

1.1.1 Définition

Soit f une fonction C^1 définie d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Soit $\underline{a} \in \Omega$, on appelle gradient de f en $\underline{a}$ le vecteur :

$$\underline{\nabla} f(\underline{a}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(\underline{a}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(\underline{a}) \end{pmatrix}$$

Remarque :

Dans la définition ci-dessus, on a choisi f une fonction C^1 pour simplifier. Pour être plus précis, le gradient est bien défini si les dérivées partielles existent en $\underline{a}$.

I. 1) Le gradient et ses propriétés

1.1.1 Définition

Soit f une fonction C^1 définie d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Soit $\underline{a} \in \Omega$, on appelle gradient de f en $\underline{a}$ le vecteur :

$$\underline{\nabla} f(\underline{a}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(\underline{a}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(\underline{a}) \end{pmatrix}$$

1.1.2 Proposition

Soit $f \in C^1(\Omega) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sa différentielle en a vérifie :

$$d_{\underline{a}} f(\underline{h}) = \underline{\nabla} f(\underline{a}) \cdot \underline{h}$$

Rappel (produit scalaire) : $\forall (\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

I. 1) Le gradient et ses propriétés

1.1.3 Proposition

Soit $f \in C^1(\Omega) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Le vecteur $\underline{\nabla} f(\underline{a})$ pointe dans la direction du plus fort accroissement de f partant de $\underline{a}$.

Preuve : au (vrai) tableau ! ∎

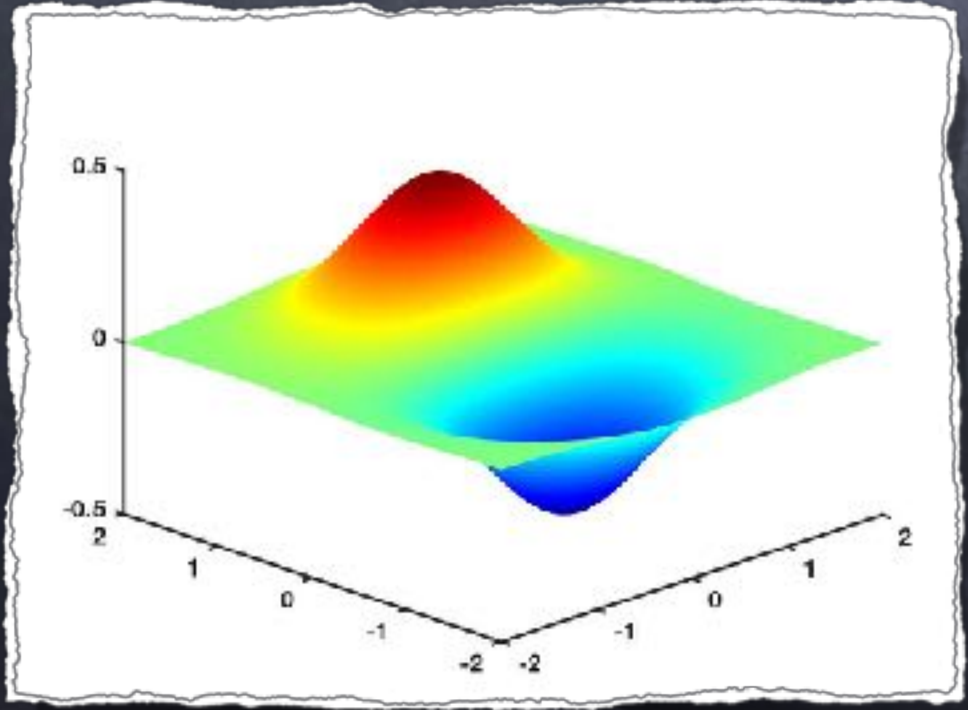
I. 1) Le gradient et ses propriétés

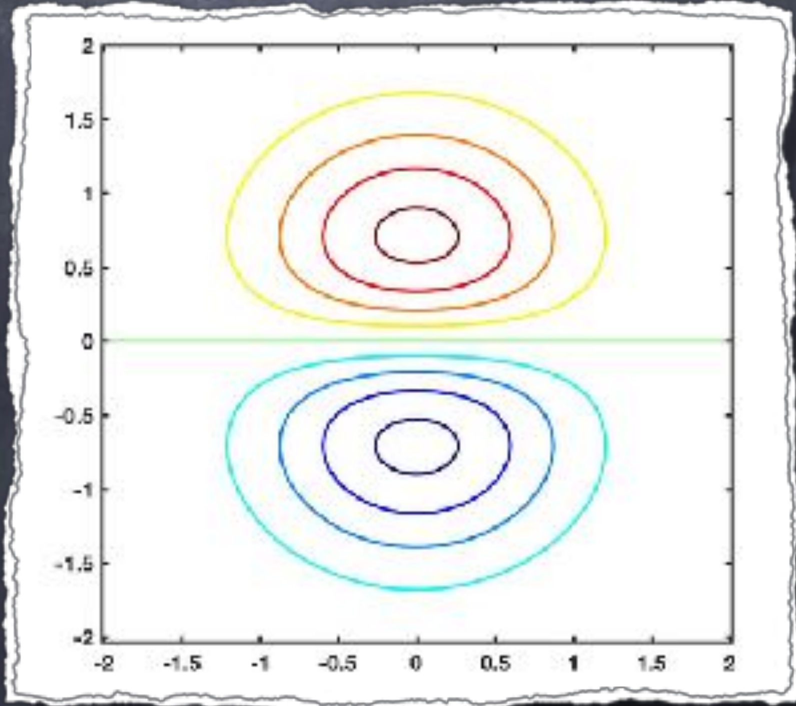
1.1.3 Proposition

Soit $f \in C^1(\Omega) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Le vecteur $\underline{\nabla} f(\underline{a})$ pointe dans la direction du plus fort accroissement de f partant de $\underline{a}$.

Exemple : $f(x,y) = xe^{-(x^2+y^2)}$

Calculer $\underline{\nabla} f(\underline{a}) \quad \forall \underline{a} \in \mathbb{R}^2$





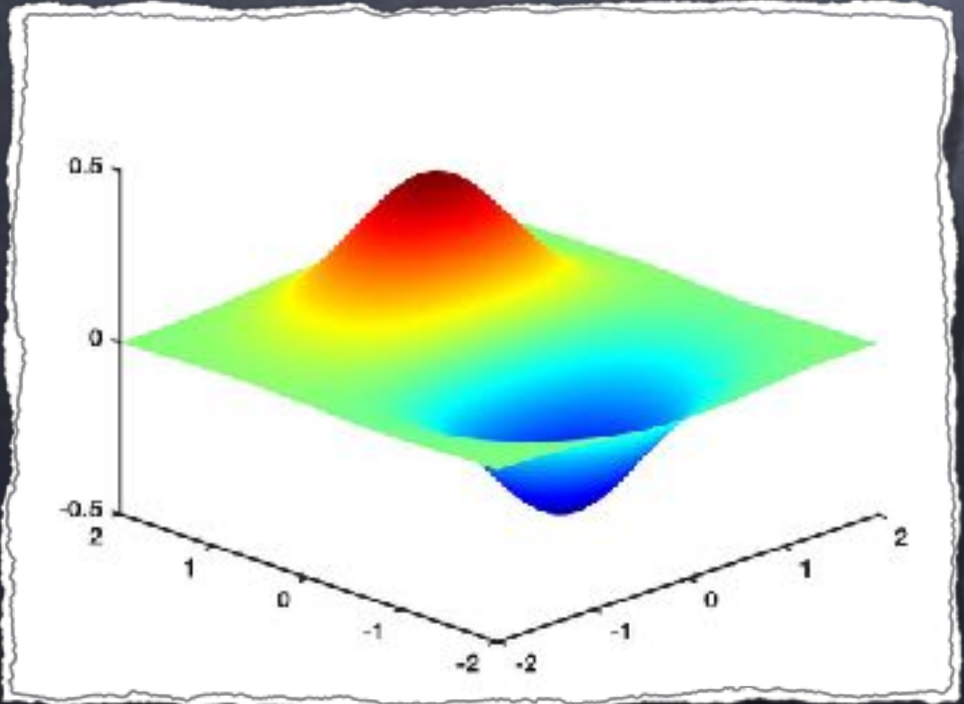
I. 1) Le gradient et ses propriétés

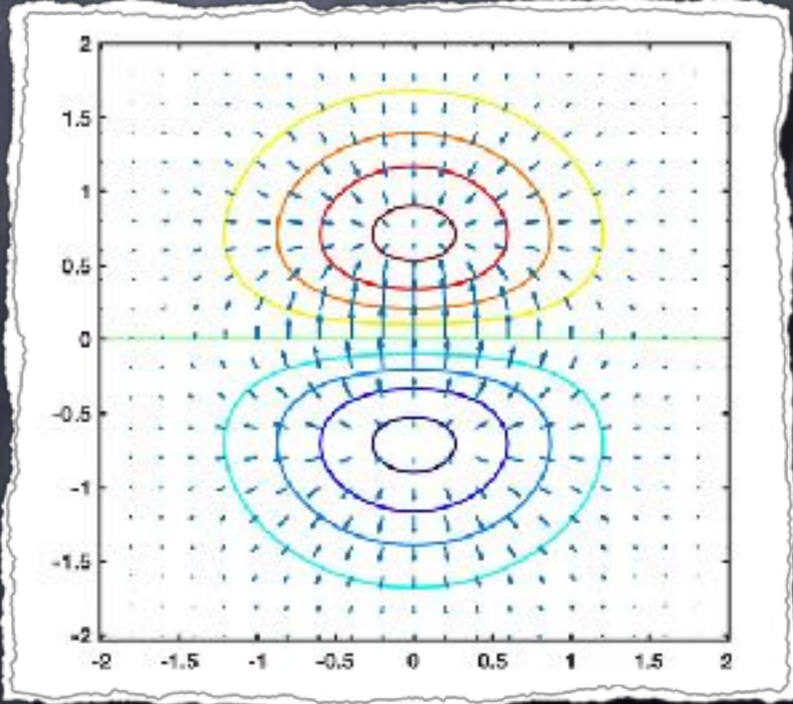
1.1.3 Proposition

Soit $f \in C^1(\Omega) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Le vecteur $\underline{\nabla} f(\underline{a})$ pointe dans la direction du plus fort accroissement de f partant de $\underline{a}$.

Exemple : $f(x,y) = xe^{-(x^2+y^2)}$

Calculer $\underline{\nabla} f(\underline{a}) \quad \forall \underline{a} \in \mathbb{R}^2$





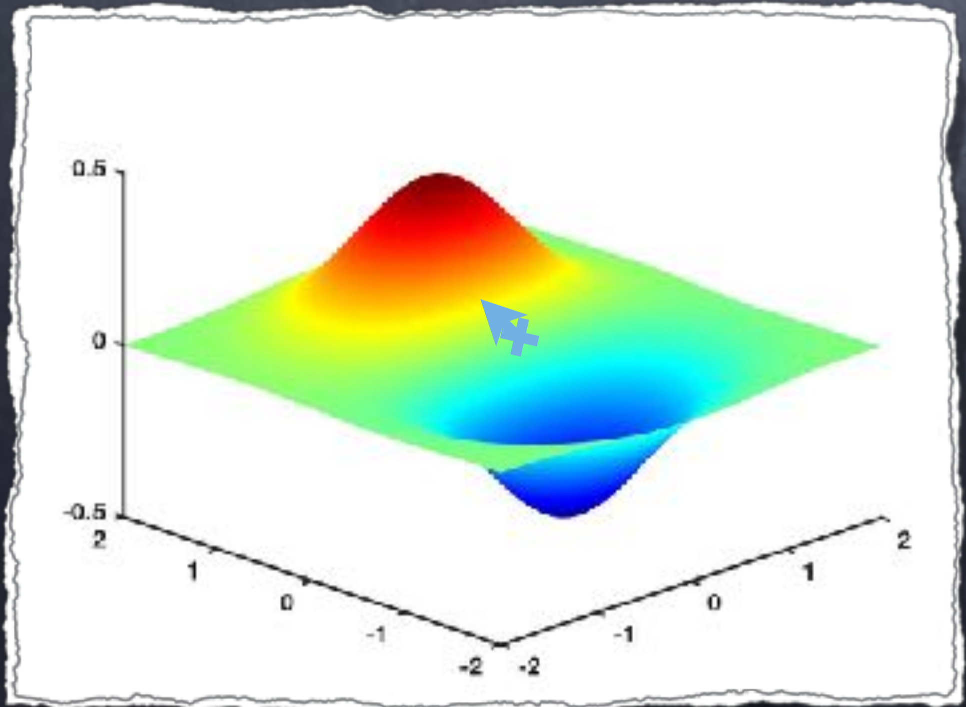
I. 1) Le gradient et ses propriétés

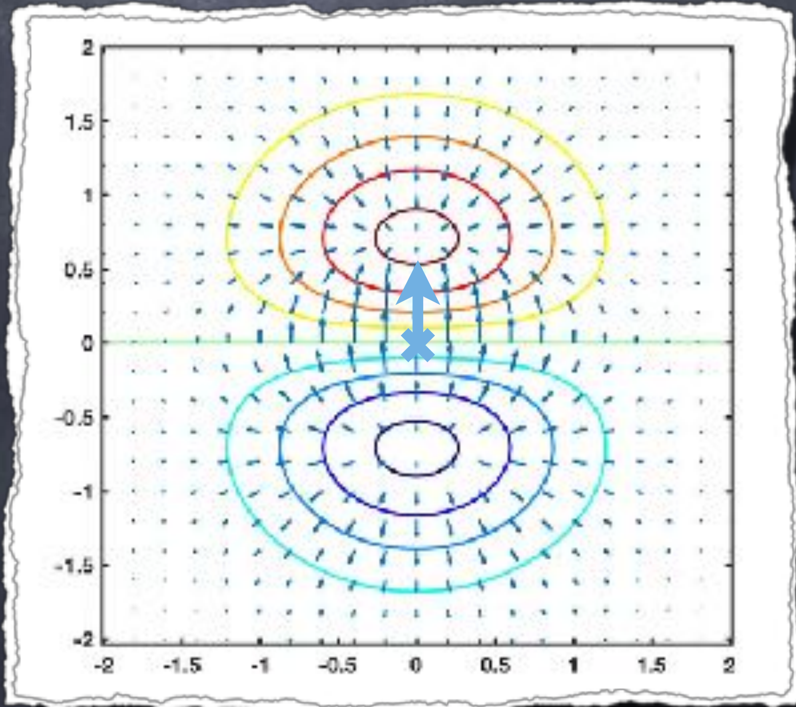
1.1.3 Proposition

Soit $f \in C^1(\Omega) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Le vecteur $\underline{\nabla} f(\underline{a})$ pointe dans la direction du plus fort accroissement de f partant de $\underline{a}$.

Exemple : $f(x,y) = xe^{-(x^2+y^2)}$

Calculer $\underline{\nabla} f(\underline{a}) \quad \forall \underline{a} \in \mathbb{R}^2$





I. 1) Le gradient et ses propriétés

1.1.4 Définition

Soit f une fonction C^1 définie d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

On appelle courbe de niveau de f associée à $c \in \mathbb{R}$ l'ensemble $N_c \subset \mathbb{R}^n$ défini par $N_c = \{\underline{x} \in \Omega,\ f(\underline{x}) = c\}$

Remarque :

Dans le cas d'une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, on parle plutôt de surface de niveau

I. 1) Le gradient et ses propriétés

1.1.4 Définition

Soit f une fonction C^1 définie d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

On appelle courbe de niveau de f associée à $c \in \mathbb{R}$ l'ensemble $N_c \subset \mathbb{R}^n$ défini par $N_c = \{\underline{x} \in \Omega,\ f(\underline{x}) = c\}$

Remarque :

Dans le cas d'une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, on parle plutôt de surface de niveau

Exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2$

Déterminer les courbes de niveaux de f.

I. 1) Le gradient et ses propriétés

1.1.4 Définition

Soit f une fonction C^1 définie d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

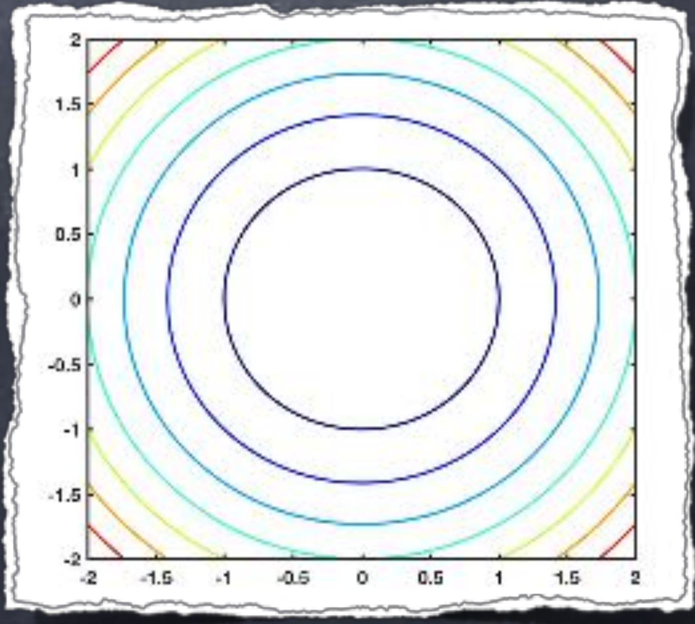
On appelle courbe de niveau de f associée à $c \in \mathbb{R}$ l'ensemble $N_c \subset \mathbb{R}^n$ défini par $N_c = \{\underline{x} \in \Omega,\ f(\underline{x}) = c\}$

Remarque :

Dans le cas d'une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, on parle plutôt de surface de niveau

Exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2$

Déterminer les courbes de niveaux de f.



I. 1) Le gradient et ses propriétés

1.1.4 Définition

Soit f une fonction C^1 définie d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

On appelle courbe de niveau de f associée à $c \in \mathbb{R}$

l'ensemble $N_c \subset \mathbb{R}^n$ défini par $N_c = \{\underline{x} \in \Omega,\ f(\underline{x}) = c\}$

1.1.5 Proposition

Le vecteur $\underline{\nabla} f(\underline{a})$ est orthogonal en $\underline{a}$ à $N_{f(\underline{a})}$.

Preuve : au (vrai) tableau !

$\blacksquare$

I. 1) Le gradient et ses propriétés

1.1.4 Définition

Soit f une fonction C^1 définie d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

On appelle courbe de niveau de f associée à $c \in \mathbb{R}$

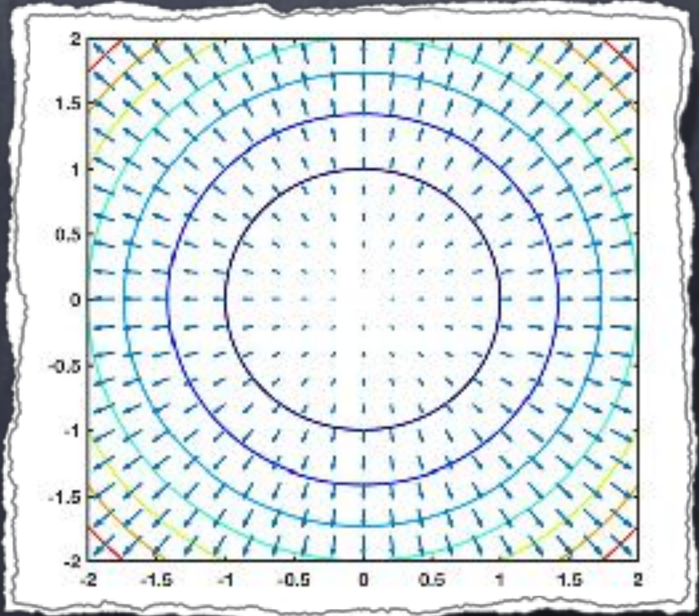
l'ensemble $N_c \subset \mathbb{R}^n$ défini par $N_c = \{\underline{x} \in \Omega,\ f(\underline{x}) = c\}$

1.1.5 Proposition

Le vecteur $\underline{\nabla} f(\underline{a})$ est orthogonal en $\underline{a}$ à $N_{f(\underline{a})}$.

Exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$



I. 1) Le gradient et ses propriétés

1.1.6 Définition

Soit f une fonction C^1 définie d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

On appelle **plan tangent** à f en $\underline{a} \in \Omega$ le plan d'equation :

$$P_{\underline{a}}(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \underline{\nabla} f(\underline{a}) \cdot (\underline{x} - \underline{a})$$

I. 1) Le gradient et ses propriétés

1.1.6 Définition

Soit f une fonction C^1 définie d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

On appelle plan tangent à f en $\underline{a} \in \Omega$ le plan d'equation :

$$P_{\underline{a}}(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \underline{\nabla} f(\underline{a}) \cdot (\underline{x} - \underline{a})$$

1.1.7 Proposition

Le vecteur $((\underline{\nabla} f(\underline{a}))^t, -1)$ est orthogonal $P_{\underline{a}}(\underline{x})$

Preuve :

Soit $\underline{X} = (\underline{x}, P_{\underline{a}}(\underline{x})) \in \mathbb{R}^{n+1}$ un point du plan tangent.

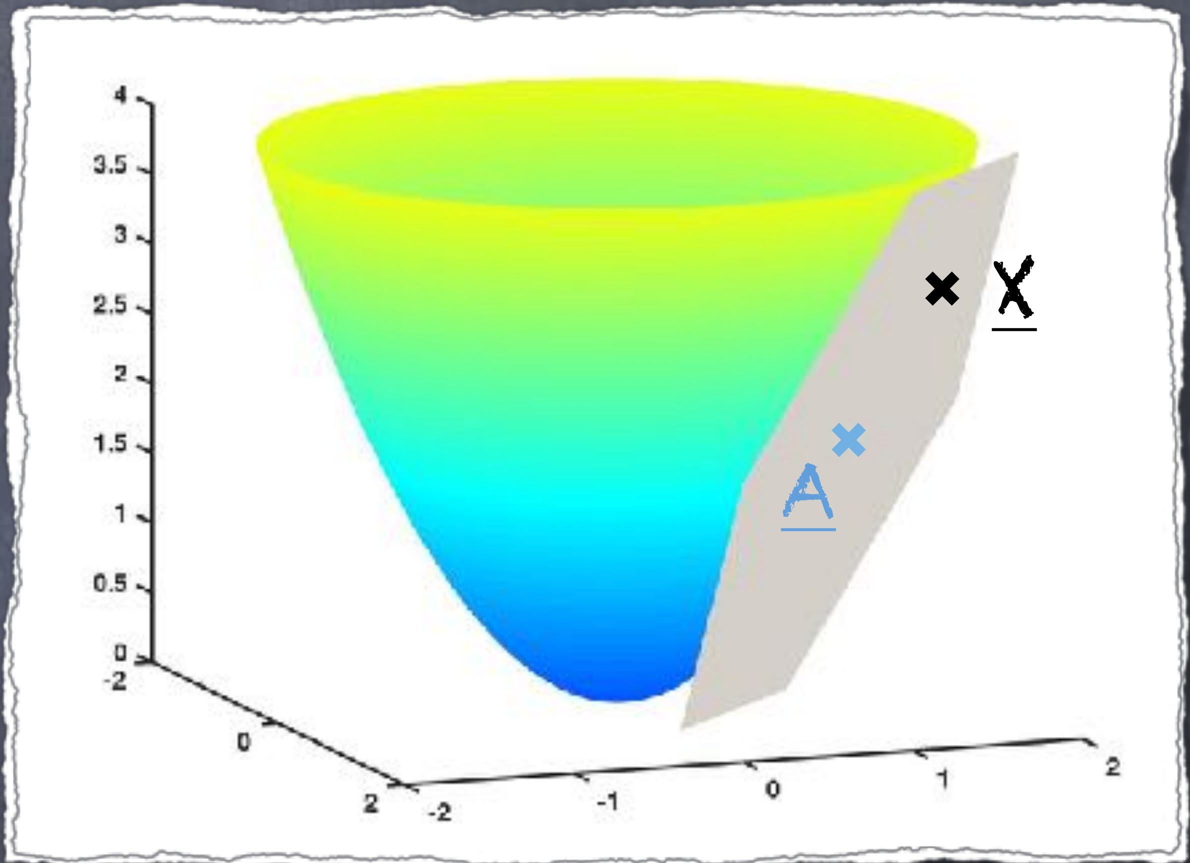
On note $\underline{A} = (\underline{a}, f(\underline{a})) \in \mathbb{R}^{n+1}$

I. 1) Le gradient et ses propriétés

(suite preuve de la proposition 1.7...)

$\underline{A} = (\underline{a}, f(\underline{a})) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$\underline{X} = (\underline{x}, P_{\underline{a}}(\underline{x})) \in \mathbb{R}^{n+1}$



Exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2$

I. 1) Le gradient et ses propriétés

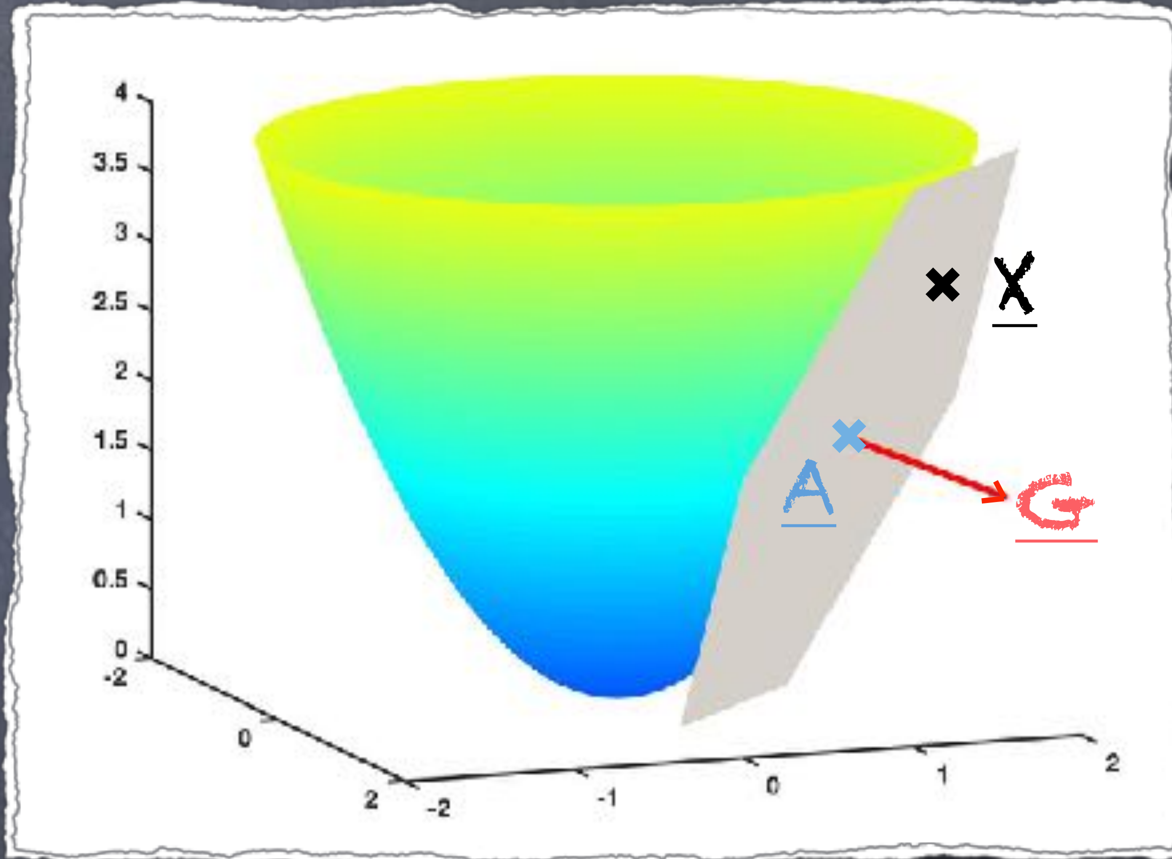
(suite preuve de la proposition 1.7...)

$\underline{A} = (\underline{a}, f(\underline{a})) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$\underline{X} = (\underline{x}, P_{\underline{a}}(\underline{x})) \in \mathbb{R}^{n+1}$

On note également

$\underline{G} = (\underline{\nabla} f(\underline{a}), -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$



Exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2$

I. 1) Le gradient et ses propriétés

(suite preuve de la proposition 1.7...)

$\underline{A} = (\underline{a}, f(\underline{a})) \in \mathbb{R}^{n+1}$

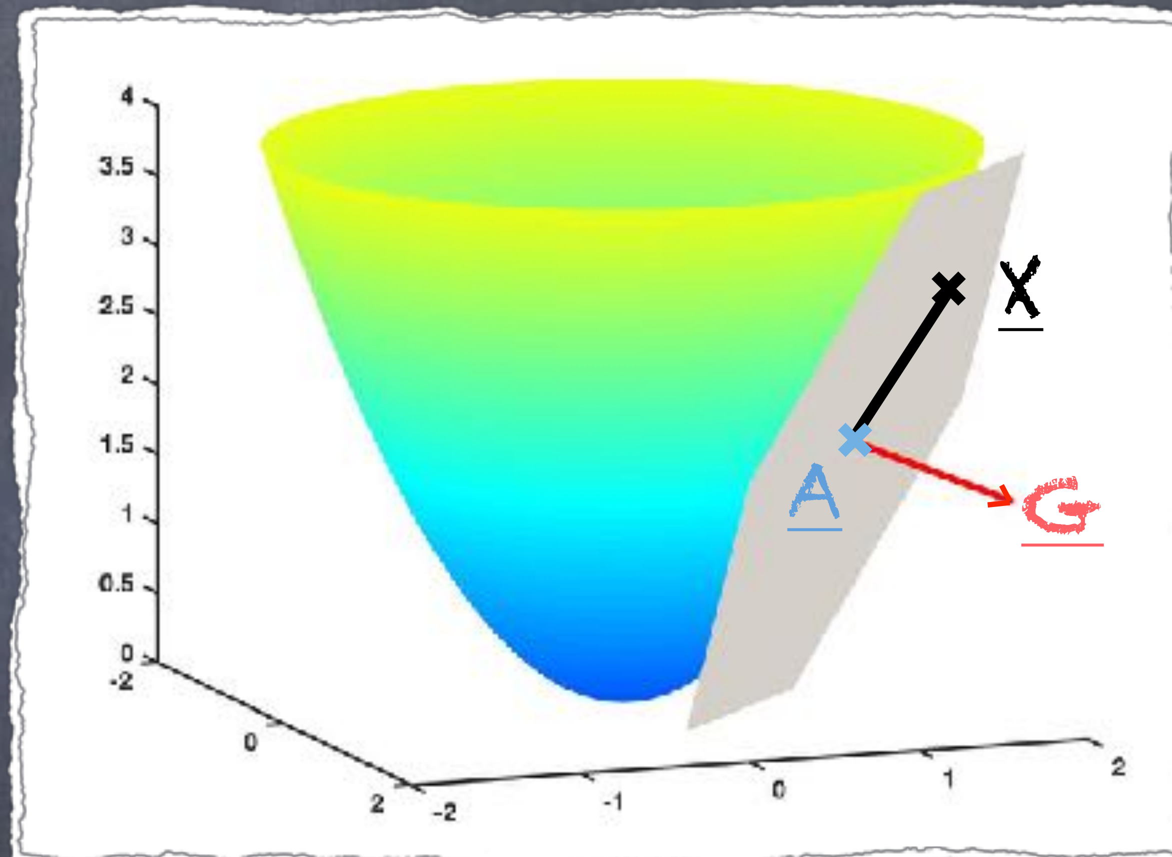
$\underline{X} = (\underline{x}, P_{\underline{a}}(\underline{x})) \in \mathbb{R}^{n+1}$

On note également

$\underline{G} = (\underline{\nabla} f(\underline{a}), -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Pour montrer notre résultat, on doit montrer que :

$$\underline{G} \cdot (\underline{X} - \underline{A}) = 0$$



Exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2$

I. 1) Le gradient et ses propriétés

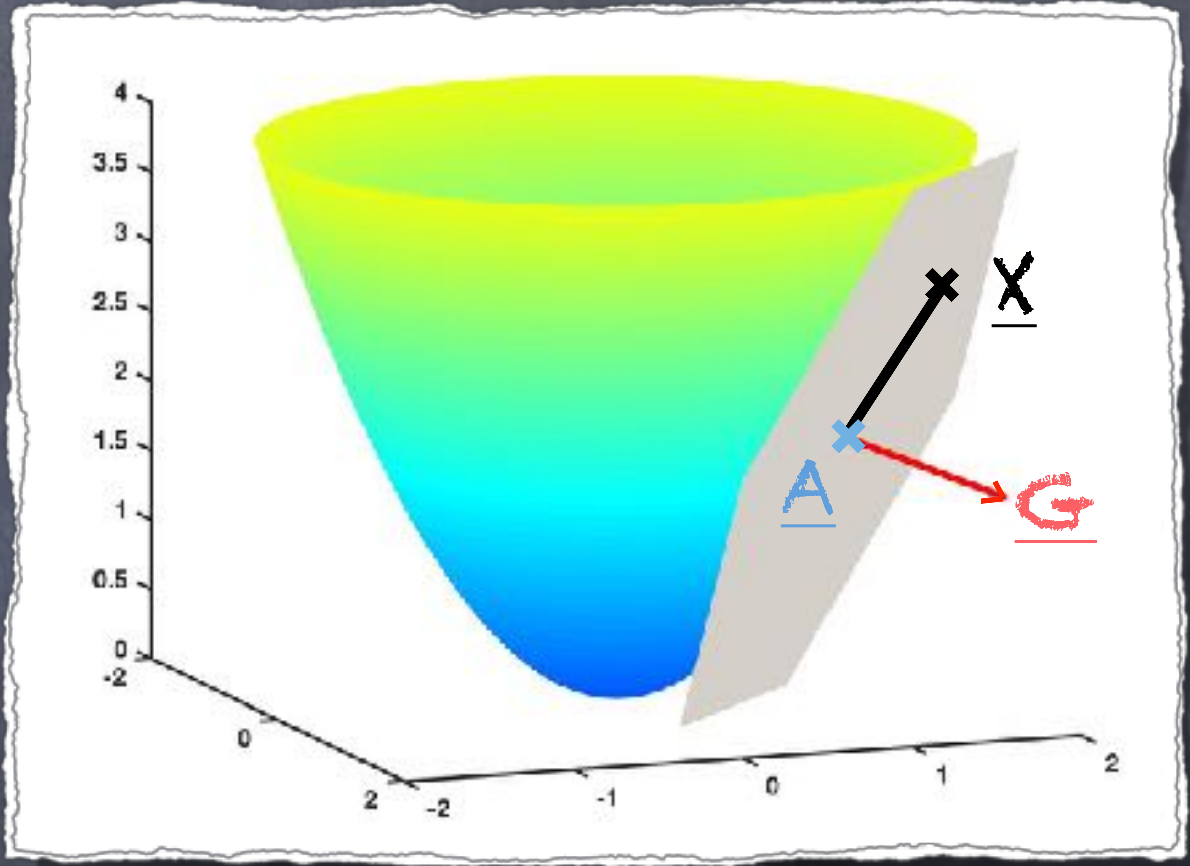
(suite preuve de la proposition 1.7...)

$\underline{A} = (\underline{a}, f(\underline{a})) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$\underline{X} = (\underline{x}, P_{\underline{a}}(\underline{x})) \in \mathbb{R}^{n+1}$

On note également

$\underline{G} = (\underline{\nabla} f(\underline{a}), -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$



Pour montrer notre résultat, on doit montrer que :

$$\underline{G} \cdot (\underline{X} - \underline{A}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\underline{\nabla} f(\underline{a}), -1) \cdot (\underline{x} - \underline{a}, P_{\underline{a}}(\underline{x}) - f(\underline{a})) = 0$$

Exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2$

I. 1) Le gradient et ses propriétés

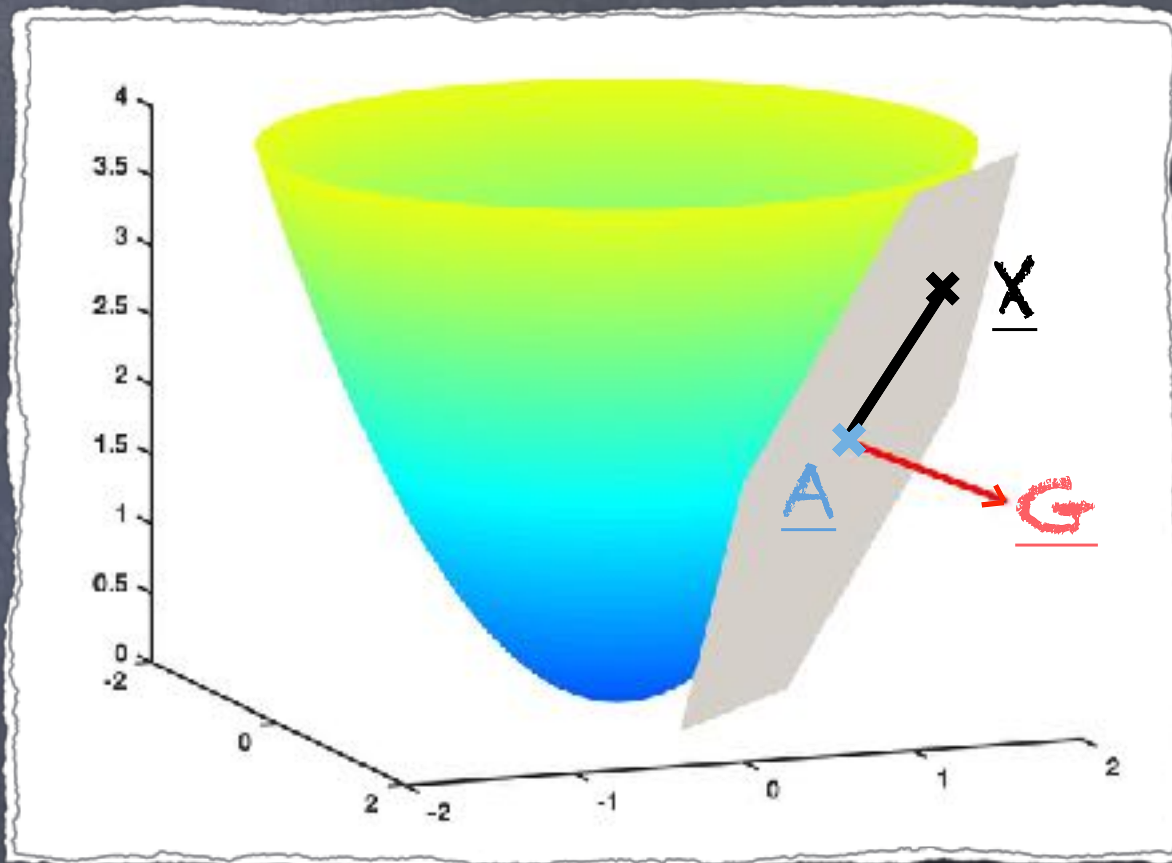
(suite preuve de la proposition 1.7...)

$\underline{A} = (\underline{a}, f(\underline{a})) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$\underline{X} = (\underline{x}, P_{\underline{a}}(\underline{x})) \in \mathbb{R}^{n+1}$

On note également

$\underline{G} = (\underline{\nabla} f(\underline{a}), -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$



Exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2$

Pour montrer notre résultat, on doit montrer que :

$$\underline{G} \cdot (\underline{X} - \underline{A}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\underline{\nabla} f(\underline{a}), -1) \cdot (\underline{x} - \underline{a}, P_{\underline{a}}(\underline{x}) - f(\underline{a})) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\nabla} f(\underline{a}) \cdot (\underline{x} - \underline{a}) + f(\underline{a}) - P_{\underline{a}}(\underline{x}) = 0$$

ce qui est la définition du plan tangent ∎

I. 2) La matrice Jacobienne

Soit $\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \cdots, f_p(\underline{x}))^t$ une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

1.2.1 Définition

On dit que $\underline{f}$ est différentiable en $\underline{a} \in \Omega$ si pour tout $k = \{1, \cdots, p\}$ la composante f_k est différentiable en $\underline{a}$

I. 2) La matrice Jacobienne

Soit $\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \cdots, f_p(\underline{x}))^t$ une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

1.2.1 Définition

On dit que $\underline{f}$ est différentiable en $\underline{a} \in \Omega$ si pour tout $k = \{1, \cdots, p\}$ la composante f_k est différentiable en $\underline{a}$

1.2.2 Définition

On dit que $\underline{f}$ est C^1 si chacune de ses composantes f_k pour $k = \{1, \cdots, p\}$ est une fonction C^1 de $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

I. 2) La matrice Jacobienne

Soit $\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \cdots, f_p(\underline{x}))^t$ une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

1.2.1 Définition

On dit que $\underline{f}$ est différentiable en $\underline{a} \in \Omega$ si pour tout $k = \{1, \cdots, p\}$ la composante f_k est différentiable en $\underline{a}$

1.2.3 Définition

Soit $\underline{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable en $\underline{a} \in \Omega$
On appelle **matrice Jacobienne** de $\underline{f}$ en $\underline{a}$ la **matrice p x n** définie ainsi :

$$\underline{\underline{J}}_{\underline{a}}(\underline{f}) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f_1(\underline{a}) & \partial_{x_2} f_1(\underline{a}) & \cdots & \partial_{x_n} f_1(\underline{a}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_p(\underline{a}) & \partial_{x_2} f_p(\underline{a}) & \cdots & \partial_{x_n} f_p(\underline{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\nabla}^t f_1(\underline{a}) \\ \vdots \\ \underline{\nabla}^t f_p(\underline{a}) \end{bmatrix}$$

I. 2) La matrice Jacobienne

1.2.4 Proposition

Soit $\underline{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable en $\underline{a} \in \Omega$

Nous avons alors :

$$\underline{f}(\underline{a}+\underline{h}) = \underline{f}(\underline{a}) + \underline{\underline{J}}_a(\underline{f})\underline{h} + \parallel \underline{h} \parallel \underline{\epsilon}(\underline{h})$$

où $\underline{\epsilon}(\underline{h}) = (\epsilon_1(\underline{h}), \cdots, \epsilon_p(\underline{h}))$ est une application de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

vérifiant $\forall i \in \{1, \cdots, p\}, \ \lim\limits_{h \to 0} \epsilon_i(\underline{h}) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} \underline{\epsilon}(\underline{h}) = \underline{0}$

Preuve :

C'est une application directe du résultat sur la différentielle pour chaque composante f_k

$\blacksquare$

I. 2) La matrice Jacobienne

1.2.4 Proposition

Soit $\underline{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable en $\underline{a} \in \Omega$

Nous avons alors :

$$\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) = \underline{f}(\underline{a}) + \underline{\underline{J}}_a(\underline{f})\underline{h} + \| \underline{h} \| \underline{\epsilon}(\underline{h})$$

où $\underline{\epsilon}(\underline{h}) = (\epsilon_1(\underline{h}), \cdots, \epsilon_p(\underline{h}))$ est une application de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

vérifiant $\forall i \in \{1, \cdots, p\},\ \lim_{h \to 0} \epsilon_i(\underline{h}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \underline{\epsilon}(\underline{h}) = \underline{0}$

Cette proposition nous indique que la matrice Jacobienne est l'approximation linéaire du champ de vecteur

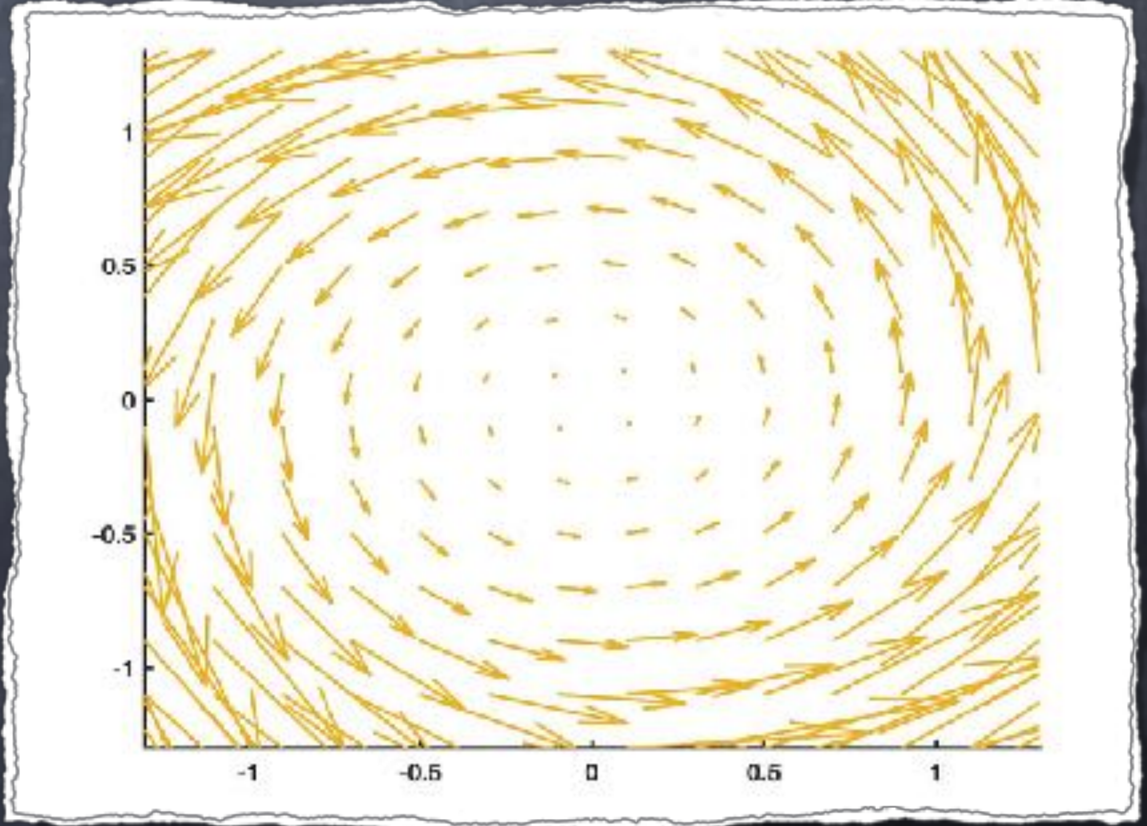
C'est la généralisation de la différentielle pour les fonctions vectorielles : $\underline{\underline{J}}_a(\underline{f}) = d_{\underline{a}}\underline{f}$

I. 2) La matrice Jacobienne

Exemple : $\underline{f}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} y e^{(x^2+y^2)} \\ -x e^{(x^2+y^2)} \end{bmatrix}$

Calculer la matrice Jacobienne en tout point $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$

$$\underline{\underline{J}}_{\underline{x}}\, \underline{f} = \begin{bmatrix} 2xy & (1+2y^2) \\ (-1-2x^2) & -2xy \end{bmatrix} e^{(x^2+y^2)}$$



I. 2) La matrice Jacobienne

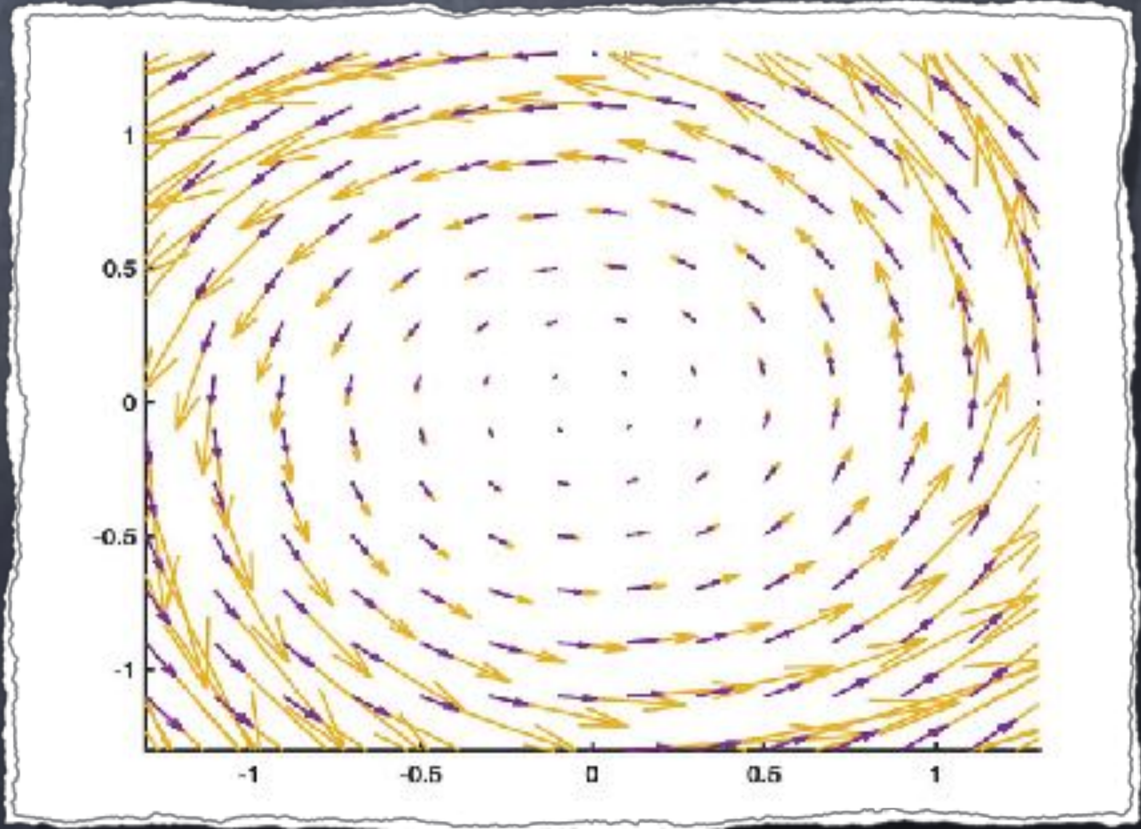
Exemple : $\underline{f}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} y e^{(x^2+y^2)} \\ -x e^{(x^2+y^2)} \end{bmatrix}$

Calculer la matrice Jacobienne en tout point $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$

$$\underline{\underline{J}}_{\underline{x}}\,\underline{f} = \begin{bmatrix} 2xy & (1+2y^2) \\ (-1-2x^2) & -2xy \end{bmatrix} e^{(x^2+y^2)}$$

On en déduit qu'au voisinage de 0, nous avons :

$$\underline{f}(\underline{x}) \simeq \underline{f}(\underline{0}) + \underline{\underline{J}}_{\underline{0}}\,\underline{f}\,\underline{x} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$$



I. 3) Dérivée de composée de fonctions

Soit $\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \cdots, f_p(\underline{x}))^t$ une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

et $\underline{g}(\underline{y}) = (g_1(\underline{y}), \cdots, g_q(\underline{y}))^t$ une fonction C^1 de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

où (n,p,q) sont 3 entiers strictement positifs.

I. 3) Dérivée de composée de fonctions

Soit $\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \cdots, f_p(\underline{x}))^t$ une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

et $\underline{g}(\underline{y}) = (g_1(\underline{y}), \cdots, g_q(\underline{y}))^t$ une fonction C^1 de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

où (n,p,q) sont 3 entiers strictement positifs.

1.3.1 Proposition (règle de la chaine, admis)

La fonction $\underline{g} \circ \underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ est C^1 et sa différentielle en $\underline{a}$ vérifie :

$$d_{\underline{a}}(\underline{g} \circ \underline{f}) = d_{\underline{f}(\underline{a})}\underline{g} \circ d_{\underline{a}}\underline{f} \qquad \text{(forme différentielle)}$$

I. 3) Dérivée de composée de fonctions

Soit $\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \cdots, f_p(\underline{x}))^t$ une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

et $\underline{g}(\underline{y}) = (g_1(\underline{y}), \cdots, g_q(\underline{y}))^t$ une fonction C^1 de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

où (n,p,q) sont 3 entiers strictement positifs.

1.3.1 Proposition (règle de la chaine, admis)

La fonction $\underline{g} \circ \underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ est C^1 et sa différentielle en $\underline{a}$ vérifie :

$$d_{\underline{a}}(\underline{g} \circ \underline{f}) = d_{\underline{f}(\underline{a})}\underline{g} \circ d_{\underline{a}}\underline{f} \qquad \text{(forme différentielle)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{J}}_{\underline{a}}(\underline{g} \circ \underline{f}) = (\underline{\underline{J}}_{\underline{f}(\underline{a})}\underline{g})(\underline{\underline{J}}_{\underline{a}}\underline{f}) \qquad \text{(forme matricielle)}$$

I. 3) Dérivée de composée de fonctions

Soit $\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \cdots, f_p(\underline{x}))^t$ une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

et $\underline{g}(\underline{y}) = (g_1(\underline{y}), \cdots, g_q(\underline{y}))^t$ une fonction C^1 de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

où (n,p,q) sont 3 entiers strictement positifs.

1.3.1 Proposition (règle de la chaine, admis)

La fonction $\underline{g} \circ \underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ est C^1 et sa différentielle en $\underline{a}$ vérifie :

$$d_{\underline{a}}(\underline{g} \circ \underline{f}) = d_{\underline{f}(\underline{a})}\underline{g} \circ d_{\underline{a}}\underline{f} \qquad \text{(forme différentielle)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{J}}_{\underline{a}}(\underline{g} \circ \underline{f}) = (\underline{\underline{J}}_{\underline{f}(\underline{a})}\underline{g})(\underline{\underline{J}}_{\underline{a}}\underline{f}) \qquad \text{(forme matricielle)}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \underline{g} \circ \underline{f}}{\partial x_i}(\underline{a}) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \underline{g}}{\partial y_k}(\underline{f}(\underline{a})) \; \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\underline{a})}$$

I. 3) Dérivée de composée de fonctions

Exemple : $\underline{f} : (r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \to (r\cos(\theta), r\sin\theta)$

(Passage des coordonnées polaires à celles cartésiennes)

- $g : (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \to y_1^2 + y_2^2$

Retrouver de 2 façons que $\partial_r(g \circ \underline{f}) = 2r$ et $\partial_\theta(g \circ \underline{f}) = 0$

- Soit en explicitant la fonction $g \circ \underline{f} : \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ (détails au (vrai) tableau)

I. 3) Dérivée de composée de fonctions

Exemple : • $\underline{f} : (r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \to (r\cos(\theta), r\sin\theta)$

(Passage des coordonnées polaires à celles cartésiennes)

• $g : (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \to y_1^2 + y_2^2$

Retrouver de 2 façons que $\partial_r(g \circ \underline{f}) = 2r$ et $\partial_\theta(g \circ \underline{f}) = 0$

- Soit en explicitant la fonction $g \circ \underline{f} : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ (détails au (vrai) tableau)

- Soit en utilisant la règle de la chaine (détails au (vrai) tableau)

I. 3) Dérivée de composée de fonctions

Exemple : Application à la résolution d'une EDP

À l'aide du changement de coordonnées :

$$\underline{f} : (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to (r\cos(\theta), r\sin\theta)$$

résoudre l'EDP linéaire suivante :

$$x\partial_x g(x,y) + y\partial_y g(x,y) = x^2 + y^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$

(détails au (vrai) tableau)

Au programme (chapitre 4) :

Objectif :

Étudier les fonctions de plusieurs variables vectorielles :

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

Plan :

I. Forme matricielle des dérivées d'ordre 1

II. Dérivées d'ordres supérieures

1) Fonctions de classe C^k
2) Étude des extrema

III. Remarque sur les fonctions implicites

II. 1) Fonctions de classe C^k

Soit $f(\underline{x})$ une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \boxed{\mathbb{R}}$

2.1.1 Définition

On dit que f est de classe C^2 si :

- elle est de classe C^1
- et toutes les fonctions dérivées partielles $\partial_{x_i} f$ sont C^1

II. 1) Fonctions de classe C^k

Soit $f(\underline{x})$ une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \boxed{\mathbb{R}}$

2.1.1 Définition

On dit que f est de classe C^2 si :

- elle est de classe C^1
- et toutes les fonctions dérivées partielles $\partial_{x_i} f$ sont C^1

Plus généralement, on dira que f est de classe C^k

- elle est de classe C^1
- et toutes les fonctions dérivées partielles $\partial_{x_i} f$ sont C^{k-1}

II. 1) Fonctions de classe C^k

Soit $f(\underline{x})$ une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \boxed{\mathbb{R}}$

2.1.1 Définition

On dit que f est de classe C^2 si :

- elle est de classe C^1
- et toutes les fonctions dérivées partielles $\partial_{x_i} f$ sont C^1

Pour une fonction de classe C^2, on peut donc pour chaque dérivée partielle $\partial_{x_i} f$ calculer des dérivées partielles

$$\forall i \in [1,n], \ \forall j \in [1,n], \quad \partial_{x_j}\partial_{x_i} f = \partial^2_{x_j x_i} f = \partial_{x_j}\left(\partial_{x_i} f\right)$$

On parle de dérivées partielles secondes (ou d'ordre 2)

Remarque : Pour i=j, on note $\partial_{x_i}\partial_{x_i} f = \partial^2_{x_i^2} f$

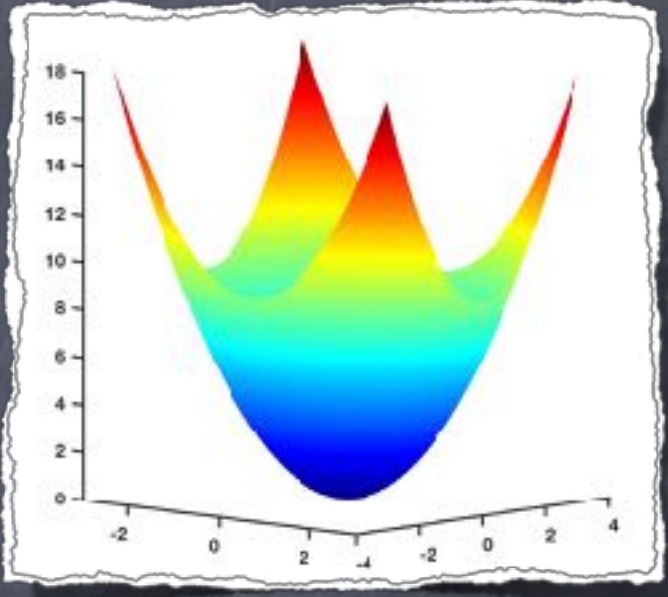
II. 1) Fonctions de classe C^k

Exemples :

Pour les fonctions suivantes, calculer l'ensemble des dérivées partielles d'ordre 2

- $f(x,y) = x^2 + y^2$

  (détails au (vrai) tableau)



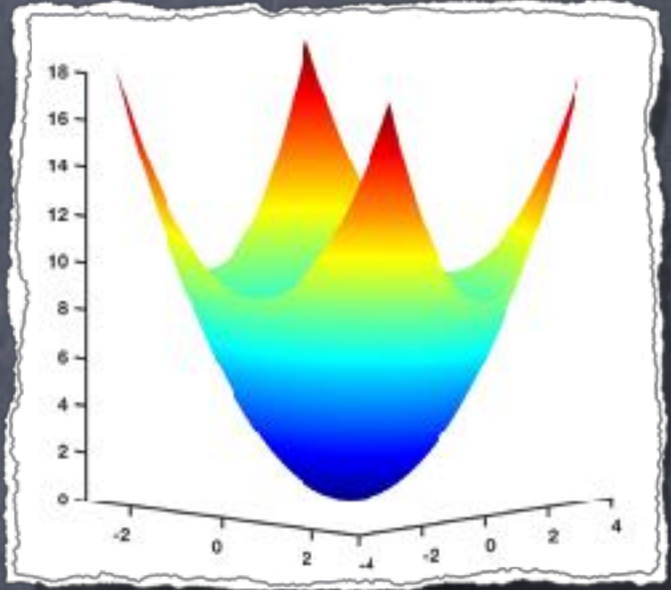
II. 1) Fonctions de classe C^k

Exemples :

Pour les fonctions suivantes, calculer l'ensemble des dérivées partielles d'ordre 2

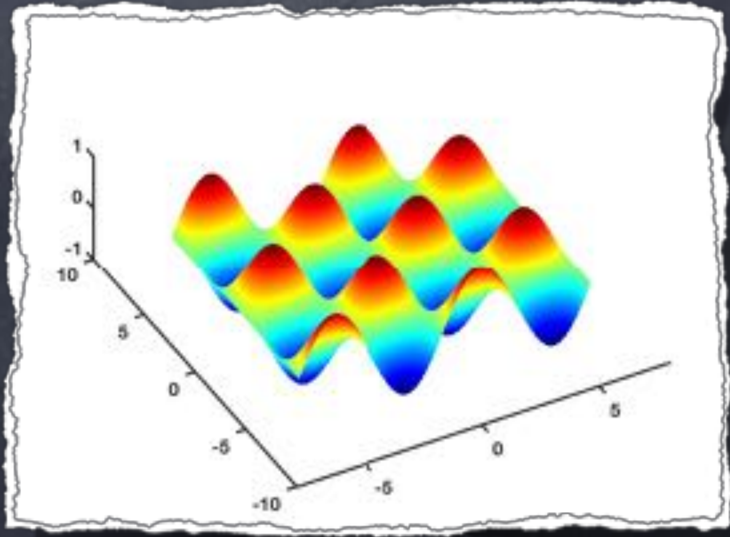
- $f(x,y) = x^2 + y^2$

  (détails au (vrai) tableau)



- $f(x,y) = \cos(x)\sin(y)$

  (détails au (vrai) tableau)



II. 1) Fonctions de classe C^k

Dans les exemples précédents, il apparait que les dérivées croisées $\partial^2_{x_j x_i} f$ et $\partial^2_{x_i x_j} f$ sont égales.

II. 1) Fonctions de classe C^k

Dans les exemples précédents, il apparait que les dérivées croisées $\partial^2_{x_j x_i} f$ et $\partial^2_{x_i x_j} f$ sont égales.

2.1.2 Théorème (de Schwarz, admis)

Si f est de classe C^2, alors l'ordre des dérivées partielles n'importe pas, c'est à dire :

$$\forall (i,j) \in [1,n], \quad \partial^2_{x_j x_i} f = \partial^2_{x_i x_j} f$$

II. 1) Fonctions de classe C^k

Dans les exemples précédents, il apparait que les dérivées croisées $\partial^2_{x_j x_i} f$ et $\partial^2_{x_i x_j} f$ sont égales.

2.1.2 Théorème (de Schwarz, admis)

Si f est de classe C^2, alors l'ordre des dérivées partielles n'importe pas, c'est à dire :

$$\forall (i,j) \in [1,n], \quad \partial^2_{x_j x_i} f = \partial^2_{x_i x_j} f$$

Remarque :

Il existe des fonctions (non C^2) admettant des dérivées partielles d'ordre 2 en un point $\underline{a}$ et telles que :

$$\partial^2_{x_i x_j} f(\underline{a}) \neq \partial^2_{x_j x_i} f(\underline{a})$$

2.1.3 Définition

Soit f une fonction de classe C^2. On appelle **Hessienne** la matrice définie par :

$$\underline{\underline{H}}_{\underline{a}} f = \begin{bmatrix} \partial^2_{x_1^2} f(\underline{a}) & \partial^2_{x_1 x_2} f(\underline{a}) & \cdots & \partial^2_{x_1 x_n} f(\underline{a}) \\ \partial^2_{x_2 x_1} f(\underline{a}) & \partial^2_{x_2^2} f(\underline{a}) & \cdots & \partial^2_{x_2 x_n} f(\underline{a}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial^2_{x_n x_1} f(\underline{a}) & \partial^2_{x_n x_2} f(\underline{a}) & \cdots & \partial^2_{x_n^2} f(\underline{a}) \end{bmatrix}$$

2.1.3 Définition

Soit f une fonction de classe C^2. On appelle **Hessienne** la matrice définie par :

$$\underline{\underline{H}}_{\underline{a}} f = \begin{bmatrix} \partial^2_{x_1^2} f(\underline{a}) & \partial^2_{x_1 x_2} f(\underline{a}) & \cdots & \partial^2_{x_1 x_n} f(\underline{a}) \\ \partial^2_{x_2 x_1} f(\underline{a}) & \partial^2_{x_2^2} f(\underline{a}) & \cdots & \partial^2_{x_2 x_n} f(\underline{a}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial^2_{x_n x_1} f(\underline{a}) & \partial^2_{x_n x_2} f(\underline{a}) & \cdots & \partial^2_{x_n^2} f(\underline{a}) \end{bmatrix}$$

2.1.4 Proposition

Si f est de classe C^2, alors sa **matrice Hessienne est symétrique.**

<u>Preuve</u> : Application directe du Thm. de Schwarz. ∎

II. 1) Fonctions de classe C^k

La Hessienne généralise la notion de différentielle à l'ordre 2 :

2.1.4 Proposition (admis)

Si f est de classe C^2, alors :

$$f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + \underline{\nabla} f(\underline{a}) \cdot \underline{h} + \frac{1}{2}\underline{h}^t \left(\underline{\underline{H}}_{\underline{a}} f\right) \underline{h} + \| \underline{h} \|^2 \epsilon(\underline{h})$$

où $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(\underline{h}) = 0$

II. 1) Fonctions de classe C^k

La Hessienne généralise la notion de différentielle à l'ordre 2 :

2.1.4 Proposition (admis)

Si f est de classe C^2, alors :

$$f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + \underline{\nabla} f(\underline{a}) \cdot \underline{h} + \frac{1}{2}\underline{h}^t \left(\underline{\underline{H}}_{\underline{a}} f\right) \underline{h} + \| \underline{h} \|^2 \epsilon(\underline{h})$$

où $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(\underline{h}) = 0$

Grâce à la Hessienne, on peut obtenir une approximation quadratique de f au voisinage de a.

II. 2) Extrema d'une fonction scalaire

2.2.1 Définition

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire et $\underline{a} \in \Omega$.

On dit que f admet en $\underline{a}$:

- Un minimum (resp. maximum) local si

  $\exists r > 0,\ \text{t.q. } \forall \underline{x} \in B(\underline{a}, r),\quad f(\underline{x}) \geq f(\underline{a})\ (\text{resp. } f(\underline{x}) \leq f(\underline{a}))$

- Un minimum (resp. maximum) local strict si

  $\exists r > 0,\ \text{t.q. } \forall \underline{x} \in B(\underline{a}, r) \setminus \underline{a},\quad f(\underline{x}) > f(\underline{a})\ (\text{resp. } f(\underline{x}) < f(\underline{a}))$

- Un extremum local si f admet un maximum ou un minimum en $\underline{a}$.

Exemple : $f(x, y) = x^2 + y^2$

Montrer que f admet un minimum strict en $(0,0)$.

II. 2) Extrema d'une fonction scalaire

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire de classe C^2.

2.2.2 Proposition

Si f admet un extremum en $\underline{a}$, alors $\underline{\nabla} f(\underline{a}) = 0$

Preuve : au (vrai) tableau !

$\blacksquare$

II. 2) Extrema d'une fonction scalaire

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire de classe C^2.

2.2.2 Proposition

Si f admet un extremum en $\underline{a}$, alors $\underline{\nabla} f(\underline{a}) = 0$

Preuve : au (vrai) tableau ! ∎

Soulignons que cette proposition est une implication et ce n'est pas une équivalence !

De plus, notons qu'elle généralise le résultat connu en 1D

$$a \text{ est un extremum} \quad \Rightarrow \quad f'(a) = 0$$

II. 2) Extrema d'une fonction scalaire

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire de classe C^2.

2.2.2 Proposition

Si f admet un extremum en $\underline{a}$, alors $\underline{\nabla} f(\underline{a}) = 0$

Preuve : au (vrai) tableau !

■

2.2.3 Définition

On dit que $\underline{a}$ est un point critique si $\underline{\nabla} f(\underline{a}) = 0$

Comme pour les fonctions d'une variable, on doit étudier la dérivée seconde pour déterminer la nature du point critique.

II. 2) Extrema d'une fonction scalaire

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire de classe C^2.

2.2.4 Proposition

Si f admet en $\underline{a}$ un minimum (resp. maximum) alors la matrice Hessienne en $\underline{a}$ est positive (resp. négative) :

$$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{h}^t \left(\underline{\underline{H}}_{\underline{a}} f \right) \underline{h} \geq 0 \text{ (resp. } \underline{h}^t \left(\underline{\underline{H}}_{\underline{a}} f \right) \underline{h} \leq 0)$$

Preuve : au (vrai) tableau ! ■

II. 2) Extrema d'une fonction scalaire

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire de classe C^2.

2.2.4 Proposition

Si f admet en $\underline{a}$ un minimum (resp. maximum) alors la matrice Hessienne en $\underline{a}$ est positive (resp. négative) :

$$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{h}^t \left(\underline{\underline{H}}_{\underline{a}} f \right) \underline{h} \geq 0 \ (\text{resp. } \underline{h}^t \left(\underline{\underline{H}}_{\underline{a}} f \right) \underline{h} \leq 0)$$

Preuve : au (vrai) tableau ! ∎

Notons encore que cette proposition est une implication et pas une équivalence !

II. 2) Extrema d'une fonction scalaire

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire de classe C^2.

2.2.5 Proposition (admis)

f admet en $\underline{a}$ un minimum (resp. maximum) strict ssi la matrice Hessienne en $\underline{a}$ est définie positive (resp. négative) :

$$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \underline{0},\ \underline{h}^t \left(\underline{\underline{H}}_{\underline{a}} f \right) \underline{h} > 0 \text{ (resp. } \underline{h}^t \left(\underline{\underline{H}}_{\underline{a}} f \right) \underline{h} < 0)$$

II. 2) Extrema d'une fonction scalaire

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire de classe C^2.

2.2.5 Proposition (admis)

f admet en $\underline{a}$ un minimum (resp. maximum) strict ssi la matrice Hessienne en $\underline{a}$ est définie positive (resp. négative) :

$$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \underline{0},\ \underline{h}^t \left(\underline{\underline{H}}_{\underline{a}} f \right) \underline{h} > 0 \ (\text{resp. } \underline{h}^t \left(\underline{\underline{H}}_{\underline{a}} f \right) \underline{h} < 0)$$

Cette fois, on a bien l'équivalence !!

II. 2) Extrema d'une fonction scalaire

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire de classe C^2.

2.2.5 Proposition (admis)

f admet en $\underline{a}$ un minimum (resp. maximum) strict ssi la matrice Hessienne en $\underline{a}$ est définie positive (resp. négative) :

$$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \underline{0},\ \underline{h}^t \left(\underline{\underline{H}}_{\underline{a}} f \right) \underline{h} > 0 \text{ (resp. } \underline{h}^t \left(\underline{\underline{H}}_{\underline{a}} f \right) \underline{h} < 0\text{)}$$

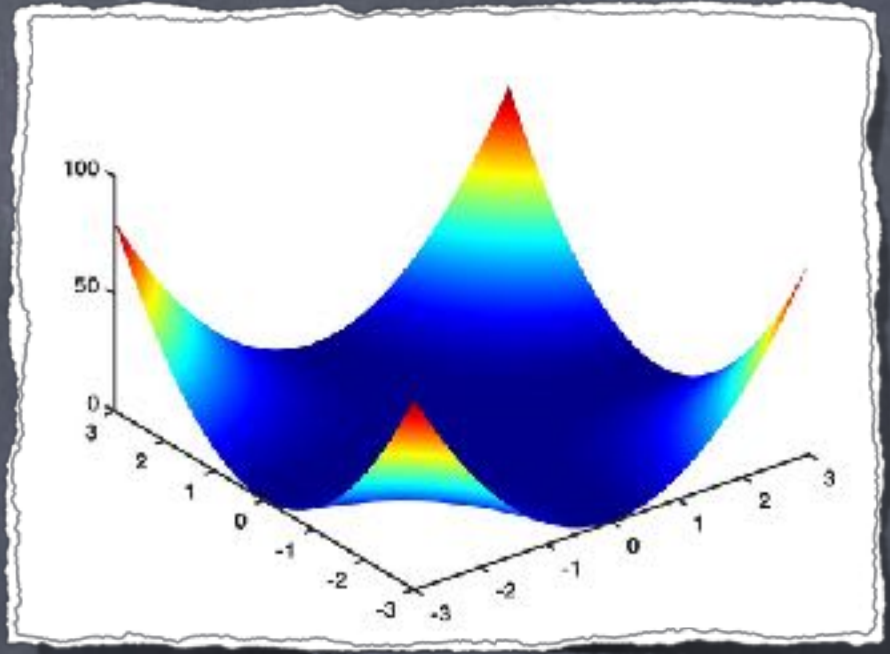
Cette fois, on a bien l'équivalence !!

Ceci nous assure que l'étude de la matrice Hessienne nous permet de conclure sur la nature de l'extremum si ce dernier est strict.

II. 2) Extrema d'une fonction scalaire

Exemples :

- $f(x,y) = x^2y^2$



Déterminer les extrema de f

(détails au (vrai) tableau)

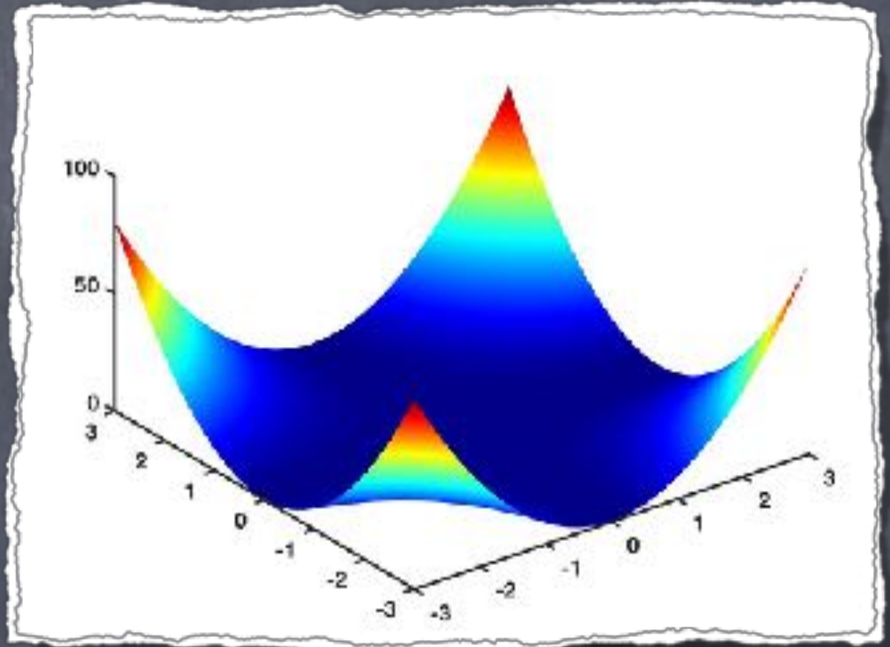
II. 2) Extrema d'une fonction scalaire

Exemples :

- $f(x,y) = x^2y^2$

Déterminer les extrema de f

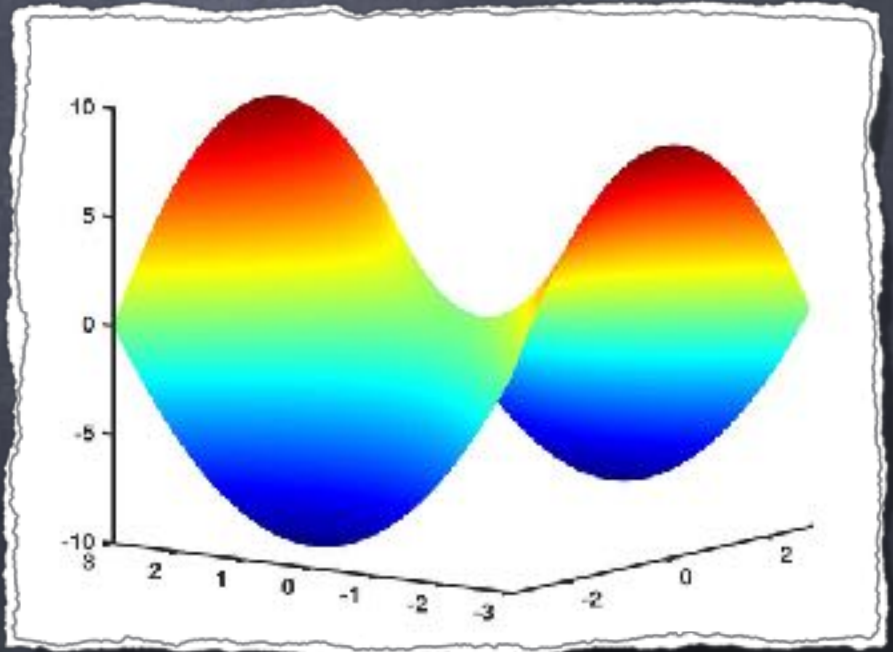
(détails au (vrai) tableau)



- $f(x,y) = x^2 - y^2$

Montrer que f n'admet aucun extremum.

(détails au (vrai) tableau)



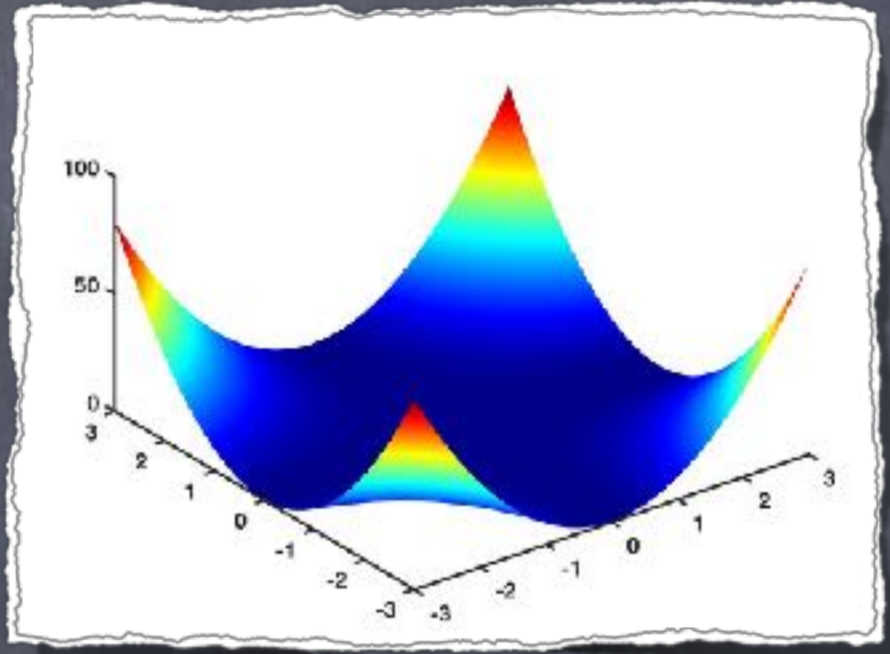
II. 2) Extrema d'une fonction scalaire

Exemples :

- $f(x,y) = x^2y^2$

Déterminer les extrema de f

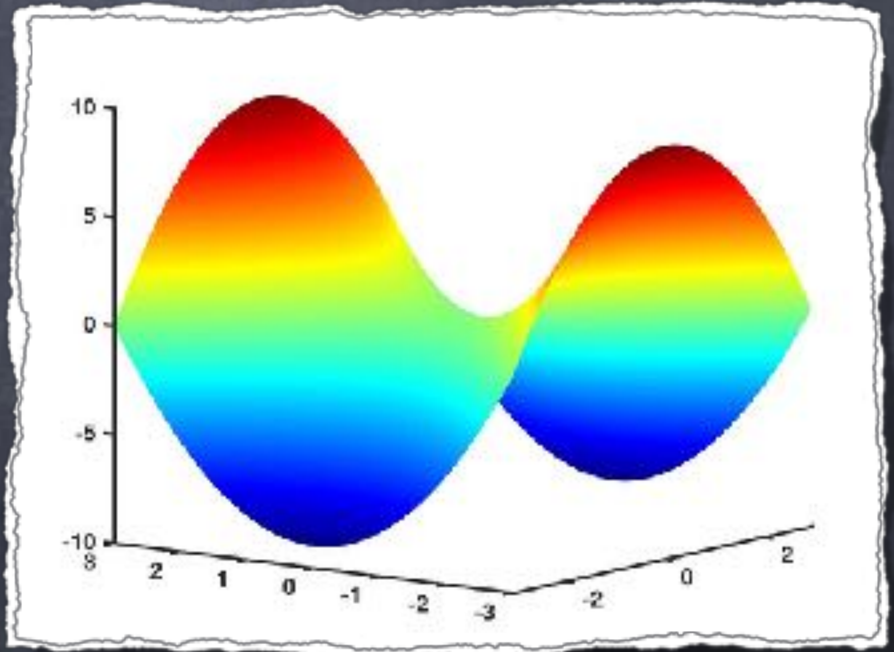
(détails au (vrai) tableau)



- $f(x,y) = x^2 - y^2$

Montrer que f n'admet aucun extremum.

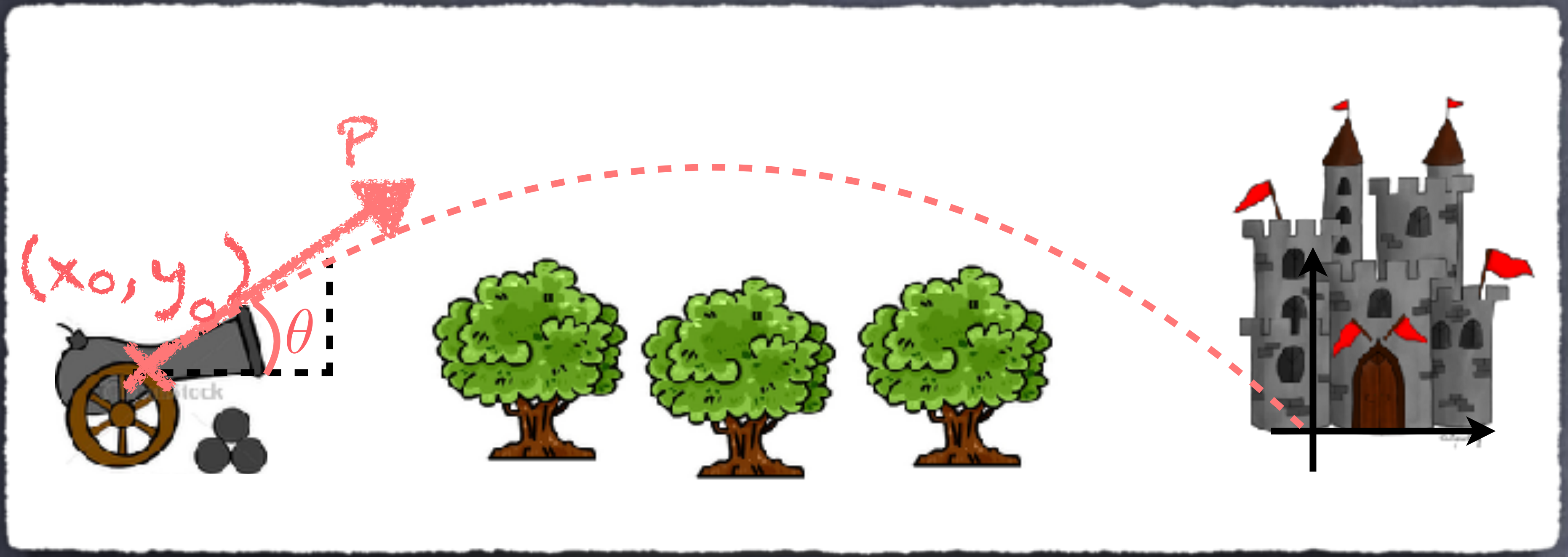
(détails au (vrai) tableau)



Le point critique en (0,0) est appelé point selle (ou col).

II. 2) Extrema d'une fonction scalaire

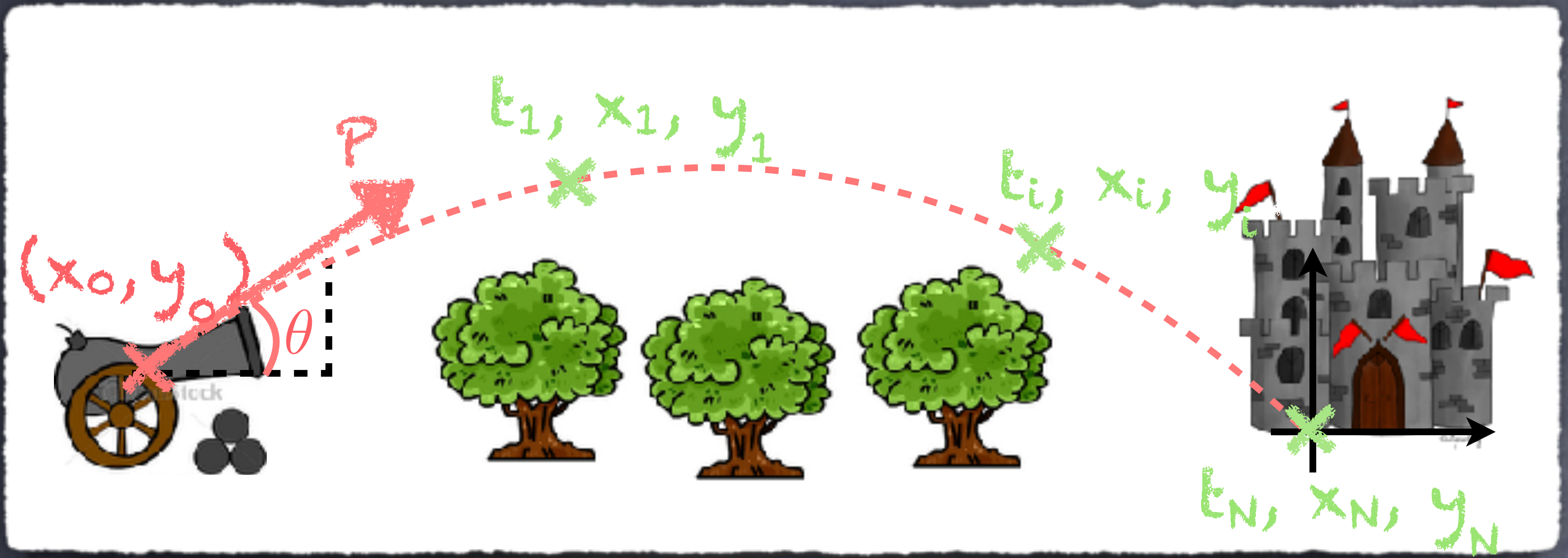
Exemple : Application à l'identification de paramètres



Paramètres inconnus : x_0, y_0, P, θ

II. 2) Extrema d'une fonction scalaire

Exemple : Application à l'identification de paramètres



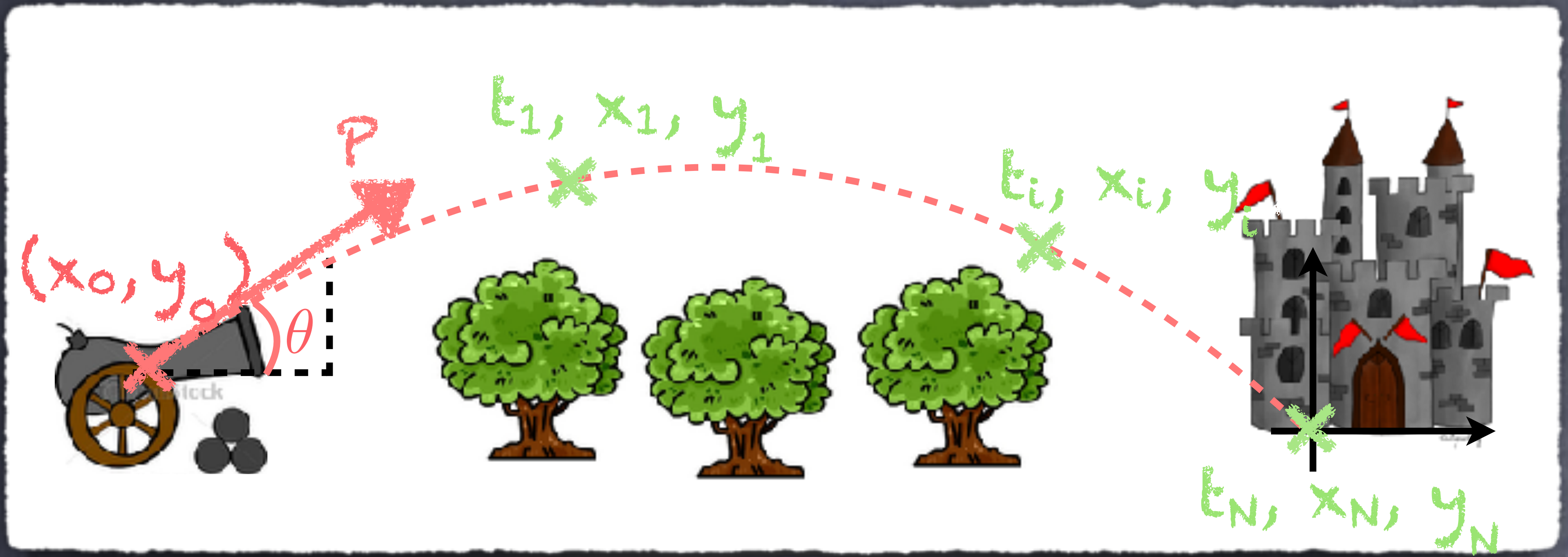
Paramètres inconnus : x_0, y_0, P, θ

Données : $\left(t_i, x_i, y_i\right)_{i=1,N}$

À l'aide des mesures $\left(t_i, x_i, y_i\right)_{i=1,N}$ on souhaite pouvoir identifier les paramètres : x_0, y_0, P, θ

II. 2) Extrema d'une fonction scalaire

Exemple : Application à l'identification de paramètres



Paramètres inconnus : x_0, y_0, P, θ

Données : $\left(t_i, x_i, y_i\right)_{i=1,N}$

D'après le Principe Fondamentale de la dynamique, on a :

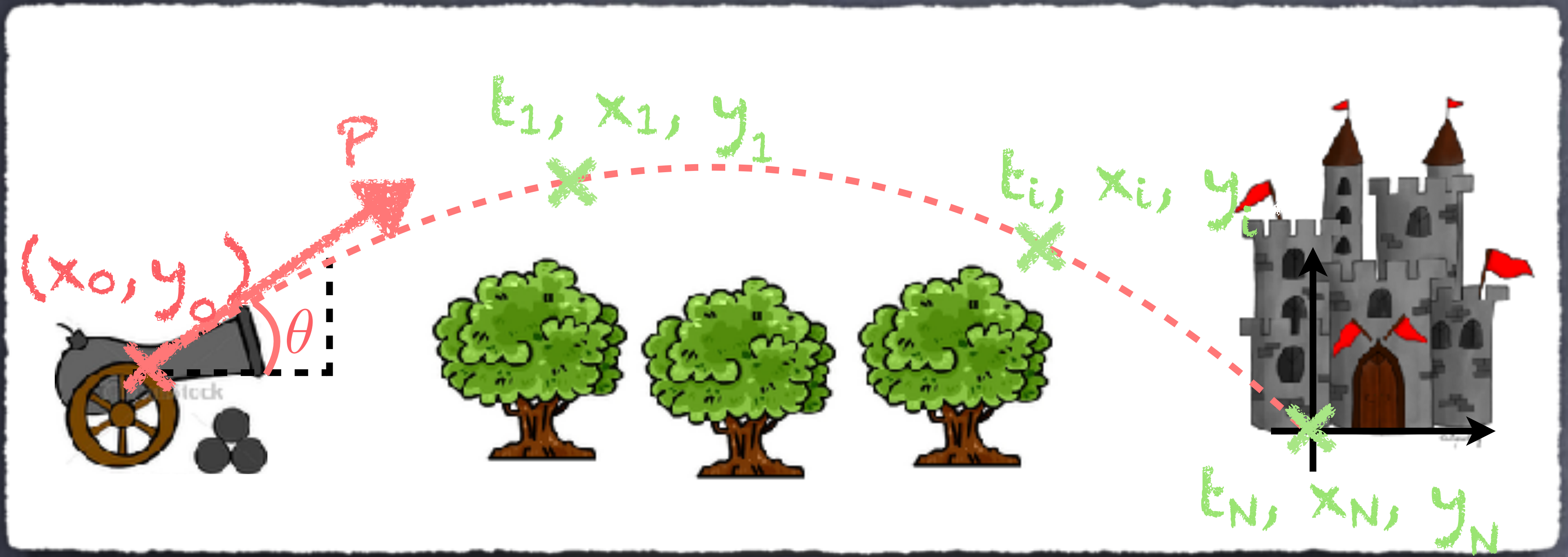
$$x(t) = P\cos(\theta)t + x_0 \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{g}{m}t^2 + P\sin(\theta)t + y_0$$

On cherche les « meilleurs » paramètres pour vérifier

$$\forall i \in [1, N], \quad \left(x(t_i), y(t_i)\right) \sim \left(x_i, y_i\right)$$

II. 2) Extrema d'une fonction scalaire

Exemple : Application à l'identification de paramètres



Paramètres inconnus : x_0, y_0, P, θ

Données : $\left(t_i, x_i, y_i\right)_{i=1,N}$

Idée : Chercher à minimiser la fonction

$$J(x_0, y_0, P, \theta) = \sum_{i=1}^{N} (x(t_i) - x_i)^2 + (y(t_i) - y_i)^2$$

Remarque :

J n'est rien d'autre que la norme 2 du vecteur formé par la différence entres les données et les « prédictions »

Au programme (chapitre 4) :

Objectif :

Étudier les fonctions de plusieurs variables vectorielles :

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

Plan :

I. Forme matricielle des dérivées d'ordre 1

II. Dérivées d'ordres supérieures

III. Remarque sur les fonctions implicites

III. Les fonctions implicites

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire de classe C^1.

Considérons l'équation

(E) $$f(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega$$

Afin de décrire l'ensemble des (x,y) solutions (la ligne de niveau 0), on aimerait pouvoir exprimer explicitement y en fonction x à partir de la relation ci-dessus (qui définit implicitement y en fonction de x).

L'équation (E) est appelée équation cartésienne.

Question : Peut-on déterminer une fonction $\varphi(x)$ telle que $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$?

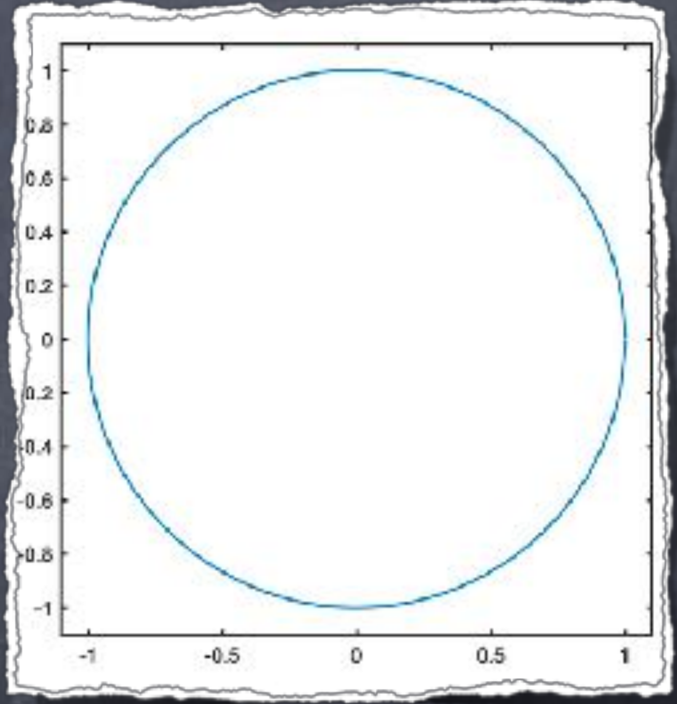
III. Les fonctions implicites

Exemple :

Considérons l'équation

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\Leftrightarrow \ f(x,y) = x^2 + y^2 - 1)$$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ t.q. } f(x,y) = 0\} =$
cercle de rayon 1 et de centre 0



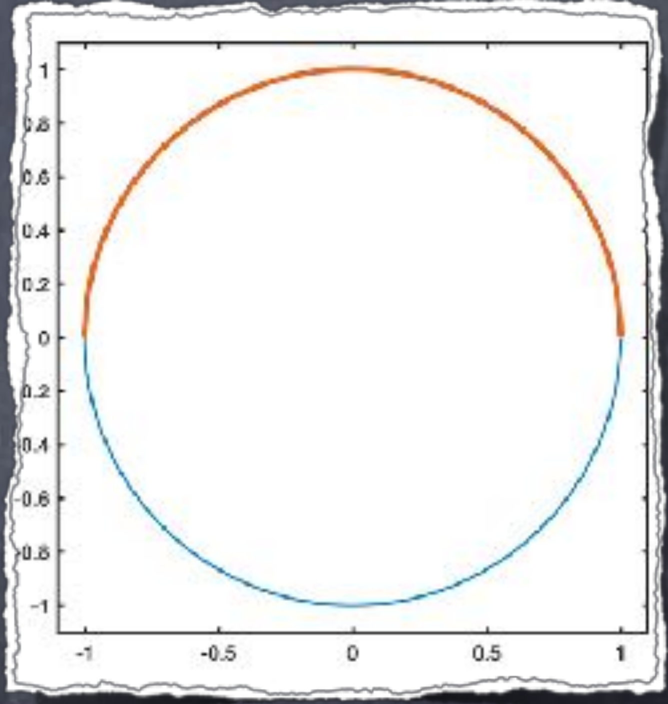
III. Les fonctions implicites

Exemple :

Considérons l'équation

$$x^2+y^2-1=0, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad (\Leftrightarrow \; f(x,y)=x^2+y^2-1)$$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } f(x,y)=0\} =$
cercle de rayon 1 et de centre 0



Par ailleurs, pour $y\geq 0$, on a $f(x,y)=0 \;\Leftrightarrow\; y=\sqrt{1-x^2}$

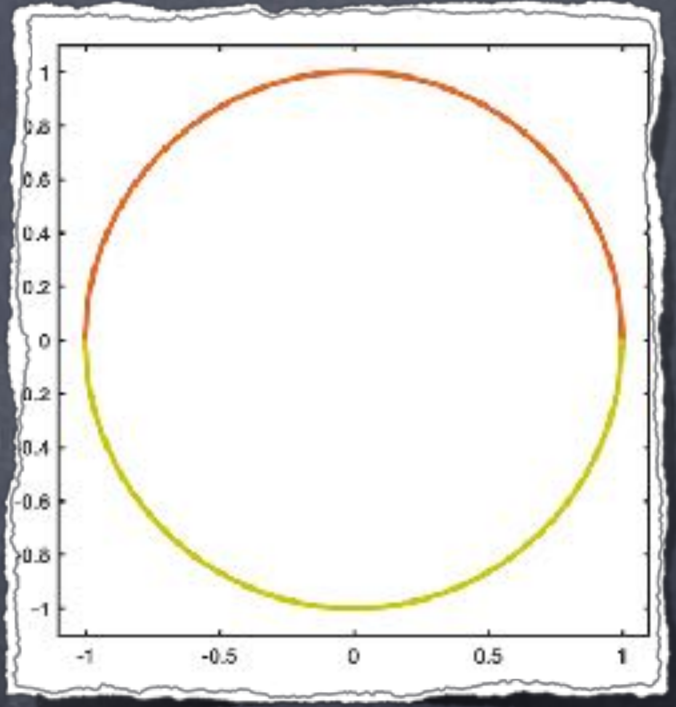
III. Les fonctions implicites

Exemple :

Considérons l'équation

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\Leftrightarrow \; f(x,y) = x^2 + y^2 - 1)$$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ t.q. } f(x,y) = 0\} =$
cercle de rayon 1 et de centre 0



Par ailleurs, pour $y \geq 0$, on a $f(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \sqrt{1 - x^2}$

et pour $y \leq 0$, on a $f(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = -\sqrt{1 - x^2}$

III. Les fonctions implicites

3.1 Théorème des fcts. implicites (admis)

Soit f une fonction C^1 sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $\underline{a} \in \Omega$ t.q. $f(\underline{a}) = 0$. Si $\partial_y f(\underline{a}) \neq 0$ alors il existe une fonction $\varphi(x)$ de $I =]a_1 - \alpha, a_1 + \alpha[$ dans $J =]a_2 - \beta, a_2 + \beta[$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in I \times J, \; f(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \varphi(x)$$

où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. De plus, nous avons :

$$\varphi'(x) = \frac{-\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))}, \quad \forall x \in I$$

Remarque :

Le théorème nous assure l'existence de $\varphi(x)$ sans pour autant nous donner la fonction explicitement...

III. Les fonctions implicites

3.1 Théorème des fcts. implicites (admis)

Soit f une fonction C^1 sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $\underline{a} \in \Omega$ t.q. $f(\underline{a}) = 0$. Si $\partial_y f(\underline{a}) \neq 0$ alors il existe une fonction $\varphi(x)$ de $I =]a_1 - \alpha, a_1 + \alpha[$ dans $J =]a_2 - \beta, a_2 + \beta[$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in I \times J, \; f(x,y) = 0 \; \Leftrightarrow \; y = \varphi(x)$$

où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. De plus, nous avons :

$$\varphi'(x) = \frac{-\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))}, \quad \forall x \in I$$

Remarque :

... néanmoins, il nous permet d'obtenir une approximation de $\varphi(x)$ au voisinage de $\underline{a}$: $\varphi(x) \simeq a_2 + (x - a_1)\varphi'(a_1)$

III. Les fonctions implicites

3.1 Théorème des fcts. implicites (admis)

Soit f une fonction C^1 sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $\underline{a} \in \Omega$ t.q. $f(\underline{a}) = 0$. Si $\partial_y f(\underline{a}) \neq 0$ alors il existe une fonction $\varphi(x)$ de $I =]a_1 - \alpha, a_1 + \alpha[$ dans $J =]a_2 - \beta, a_2 + \beta[$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in I \times J, \; f(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \varphi(x)$$

où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. De plus, nous avons :

$$\varphi'(x) = \frac{-\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))}, \quad \forall x \in I$$

Remarque 2 :

Si $\partial_x f(\underline{a}) \neq 0$ on peut énoncer un résultat similaire avec une fonction $\psi : y \in J \to I$.

Plan détaillé du chapitre 4

I. Forme matricielle des dérivées d'ordre 1

1) Le gradient et ses propriétés
2) Matrice Jacobienne
3) Dérivée de composée de fonctions

II. Dérivées d'ordres supérieures

1) Fonctions de classe C^k
2) Étude des extrema

III. Remarque sur les fonctions implicites