M5 : Introduction aux équations différentielles et aux fonctions de plusieurs variables réelles

Chapitre 3 :

Fonctions de plusieurs variables

Cours 5-6-7

Année 2018 - 2019

Contact : A. Tonnoir

antoine.tonnoir@insa-rouen.fr

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables :

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

où $(n, p) \in \mathbb{N}$ et Ω est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables :

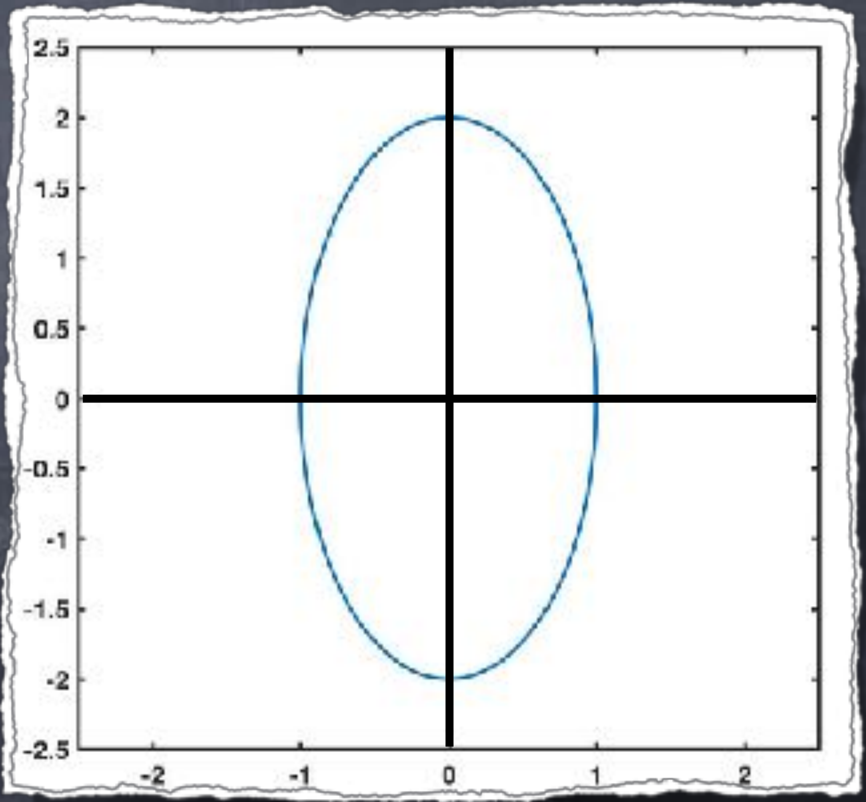
$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

où $(n,p) \in \mathbb{N}$ et Ω est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$

Exemples :

- $f : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
  $\quad t \to (\cos(2\pi t), 2\sin(2\pi t))$

  trajectoire paramètre par t



Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables :

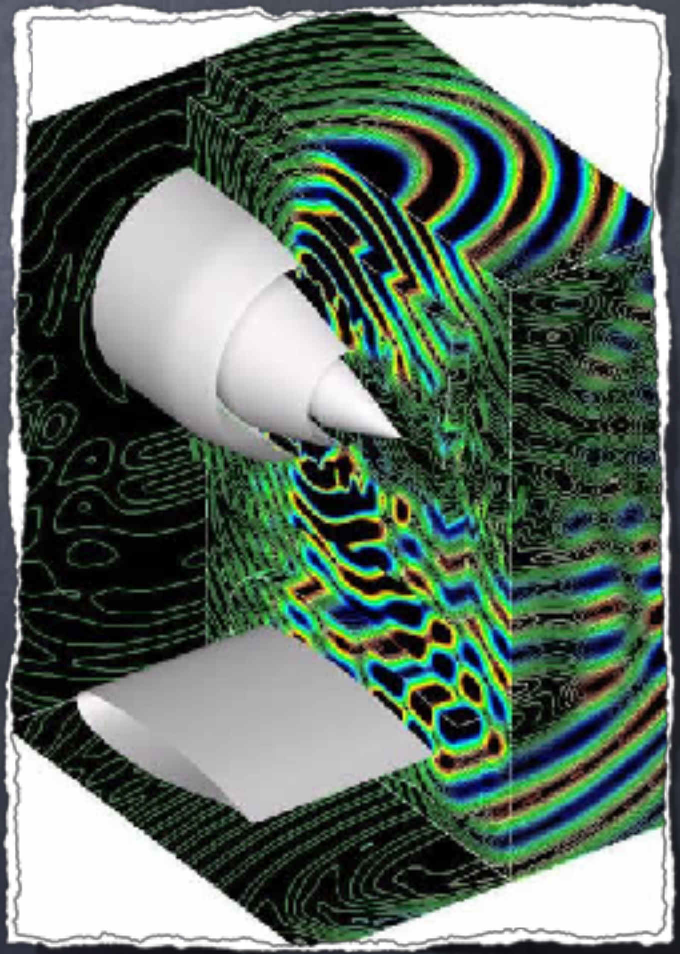
$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

où $(n, p) \in \mathbb{N}$ et Ω est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$

Exemples :

- $f : t \in [0, 1] \subset \mathbb{R} \to (\cos(2\pi t), \cos(2\pi t))$
- $p : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

  Champ de pression acoustique
  (représentation par couleur)



Introduction

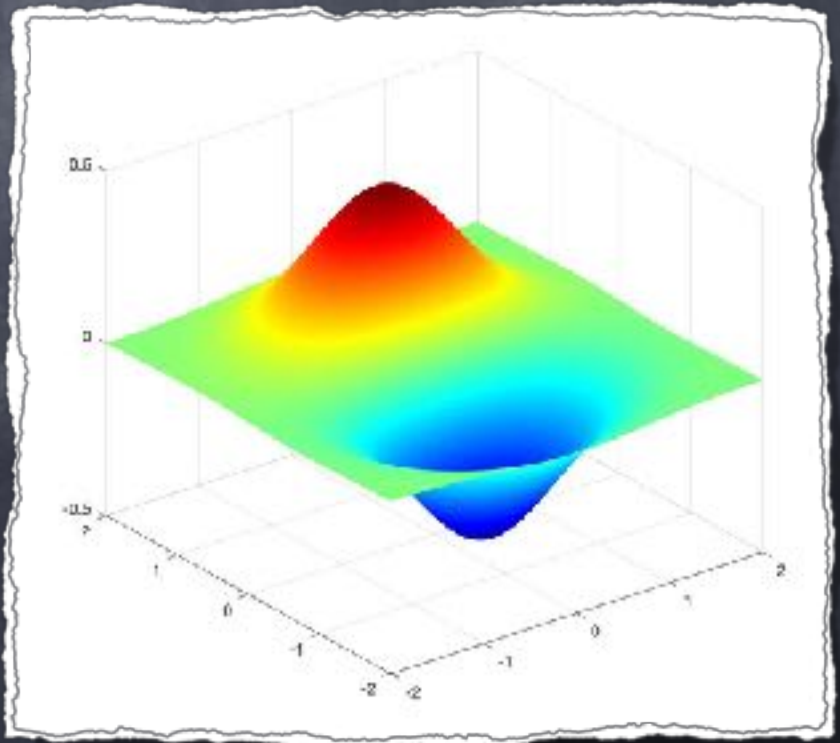
Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables :

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

où $(n, p) \in \mathbb{N}$ et Ω est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$

Exemples :

- $f : t \in [0, 1] \subset \mathbb{R} \to (\cos(2\pi t), \cos(2\pi t))$
- $p : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
- $c : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \to x e^{-(x^2+y^2)} \end{array}$



Représentation du graphe en 3D

Introduction

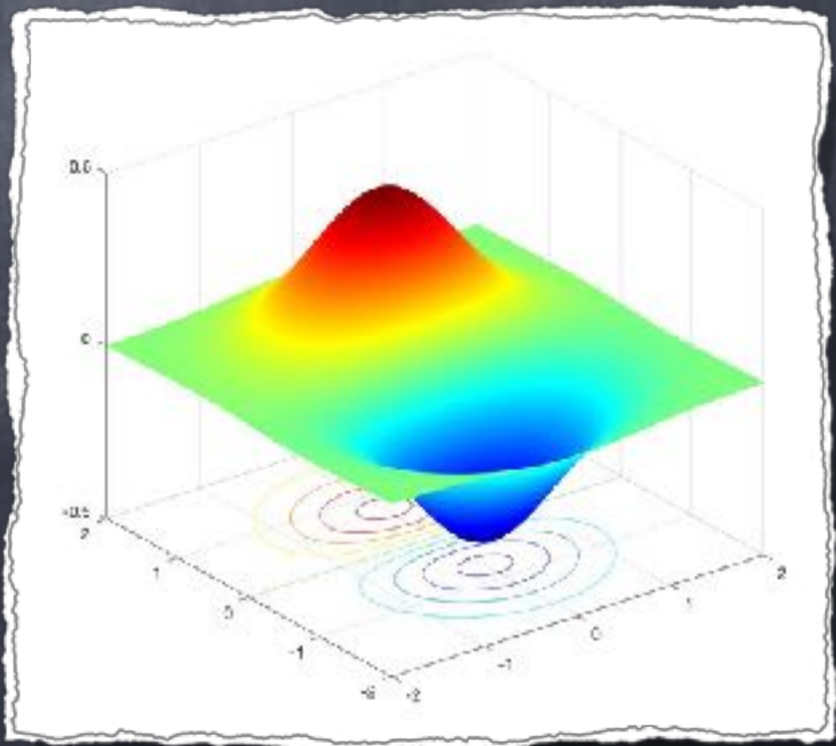
Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables :

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

où $(n, p) \in \mathbb{N}$ et Ω est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$

Exemples :

- $f : t \in [0,1] \subset \mathbb{R} \to (\cos(2\pi t), \cos(2\pi t))$
- $p : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
- $c : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \to x e^{-(x^2+y^2)} \end{array}$



Représentation du graphe en 3D ou par ligne de niveaux

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables :

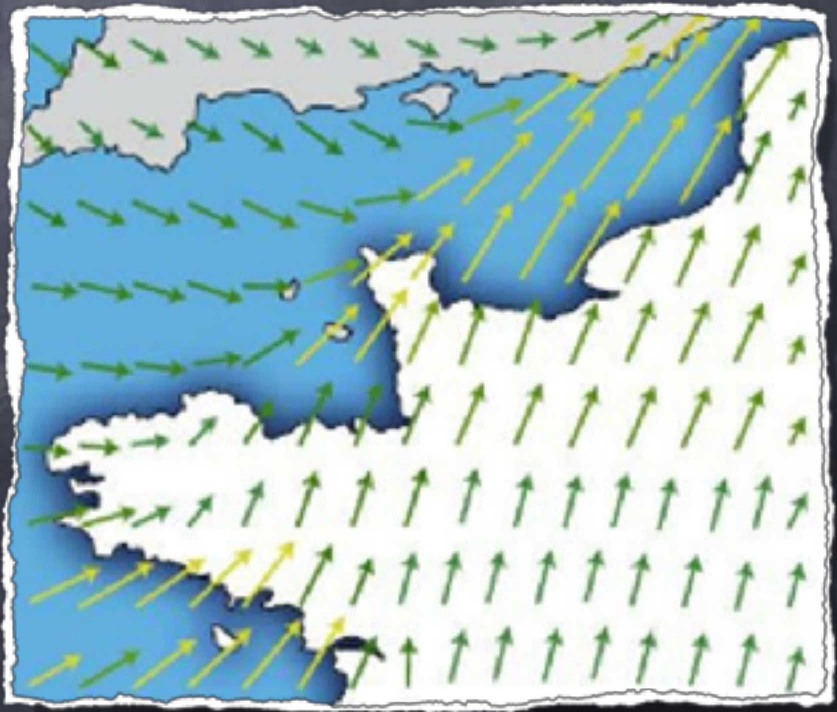
$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

où $(n,p) \in \mathbb{N}$ et Ω est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$

Exemples :

- $f : t \in [0,1] \subset \mathbb{R} \to (\cos(2\pi t), \cos(2\pi t))$
- $p : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
- $c : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to xe^{-(x^2+y^2)}$
- $u : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

  Champ de vecteurs



Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables :

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

où $(n, p) \in \mathbb{N}$ et Ω est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$

Pour ces fonctions, on souhaitera pouvoir :

- généraliser la notion de continuité

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables :

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

où $(n, p) \in \mathbb{N}$ et Ω est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$

Pour ces fonctions, on souhaitera pouvoir :

- généraliser la notion de continuité

  Rappel en 1D :

  $g : x \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en a ssi

  $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ t.q. $|x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables :

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

où $(n, p) \in \mathbb{N}$ et Ω est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$

Pour ces fonctions, on souhaitera pouvoir :

- généraliser la notion de continuité

  Rappel en 1D :

  $g : x \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en a ssi

  $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ t.q. $|x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$

  Difficulté : Définir la notion de « x proche de a » et « f(x) proche de f(a) »

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables :

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

où $(n,p) \in \mathbb{N}$ et Ω est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$

Pour ces fonctions, on souhaitera pouvoir :

- généraliser la notion de continuité
- généraliser la notion de dérivabilité

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables :

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

où $(n,p) \in \mathbb{N}$ et Ω est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$

Pour ces fonctions, on souhaitera pouvoir :

- généraliser la notion de continuité
- généraliser la notion de dérivabilité

  En déduire des résultats du type :

  - f dérivable implique f continue
  - la dérivée en a donne une approximation de f en a
  - la dérivée donne les variations de f

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables :

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

où $(n,p) \in \mathbb{N}$ et Ω est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$

Pour ces fonctions, on souhaitera pouvoir :

- généraliser la notion de continuité
- généraliser la notion de dérivabilité

Remarque :

Pour les fonctions $f : x \in \Omega \subset \boxed{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ on peut aisément généraliser les notions ci-dessus en procédant composante par composante

Au programme (chapitre 3) :

Objectif :

Étudier les fonctions de plusieurs variables scalaires

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$$

Plan :

I. Un peu de topologie sur $\mathbb{R}^n$

II. Limite et continuité

III. Dérivées partielles, différentielle et fonctions C^1

IV. Ma première équation aux dérivées partielles

I. Un peu de topologie

On considère l'espace $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ \forall k \in [1, n],\ x_k \in \mathbb{R}\}$ muni de sa base canonique $(\underline{e_k})_{k=1,\cdots,n}$ où

$$\forall k,\ \underline{e_k} = (0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-ème position}}}{1}, 0, \cdots, 0)$$

Remarque :

La notation $\underline{x}$ signifie que x est un vecteur $\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$

I. Un peu de topologie

On considère l'espace $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n), \forall k \in [1, n], \ x_k \in \mathbb{R}\}$ muni de sa base canonique $(\underline{e_k})_{k=1,\cdots,n}$

On notera $\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n = \sum_{k=1}^{n} x_k \underline{e_k}$

I. Un peu de topologie

On considère l'espace $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ \forall k \in [1,n],\ x_k \in \mathbb{R}\}$ muni de sa base canonique $(\underline{e_k})_{k=1,\cdots,n}$

On notera $\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n = \sum_{k=1}^{n} x_k \underline{e_k}$

1.1 Définition

On appelle **norme** sur $\mathbb{R}^n$ toute application $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :

- le caractère **définie** :

$$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad N(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$$

I. Un peu de topologie

On considère l'espace $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ \forall k \in [1,n],\ x_k \in \mathbb{R}\}$ muni de sa base canonique $(\underline{e_k})_{k=1,\cdots,n}$

On notera $\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n = \sum_{k=1}^{n} x_k \underline{e_k}$

1.1 Définition

On appelle **norme** sur $\mathbb{R}^n$ toute application $N : \mathbb{R}^n \to \underline{\mathbb{R}^+}$ vérifiant :

- le caractère **définie** :

  $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad N(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$

- l'**homogénéité** :

  $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R} \quad N(\lambda \underline{x}) = |\lambda| N(\underline{x})$

I. Un peu de topologie

On considère l'espace $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ \forall k \in [1, n],\ x_k \in \mathbb{R}\}$ muni de sa base canonique $(\underline{e_k})_{k=1,\cdots,n}$

On notera $\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n = \sum_{k=1}^{n} x_k \underline{e_k}$

1.1 Définition

On appelle **norme** sur $\mathbb{R}^n$ toute application $N : \mathbb{R}^n \to \underline{\mathbb{R}^+}$ vérifiant :

- le caractère **définie** :
  $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad N(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$
- l'**homogénéité** :
  $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R} \quad N(\lambda \underline{x}) = |\lambda| N(\underline{x})$
- l'**inégalité triangulaire** :
  $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \underline{y} \in \mathbb{R}^n \quad N(\underline{x} + \underline{y}) \leq N(\underline{x}) + N(\underline{y})$

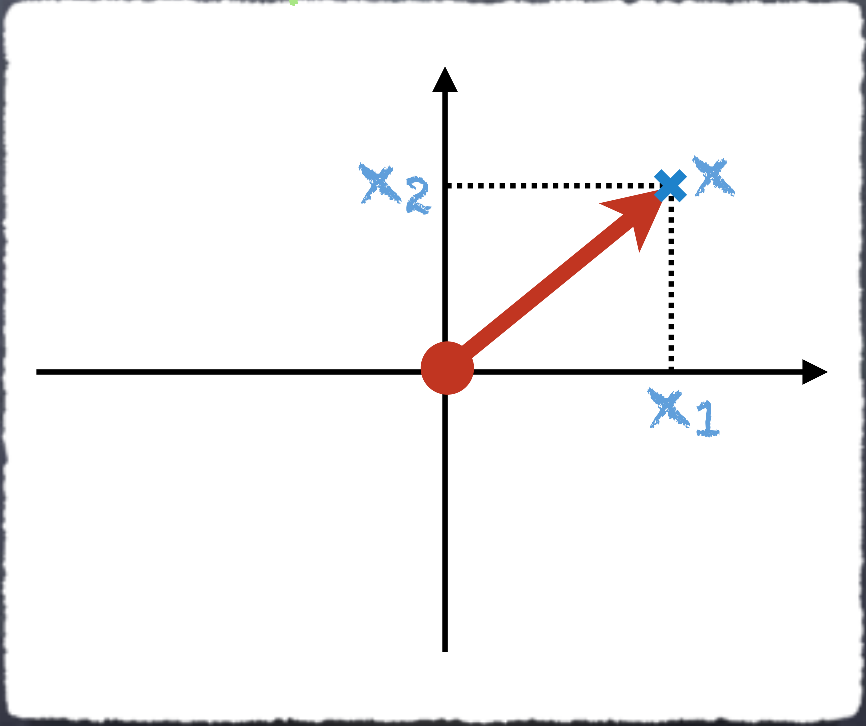
I. Un peu de topologie

Les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$

- La norme euclidienne (ou norme 2)

$$N(\underline{x}) = \| \underline{x} \|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Exemple dans $\mathbb{R}^2$



$$\| \underline{x} \|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

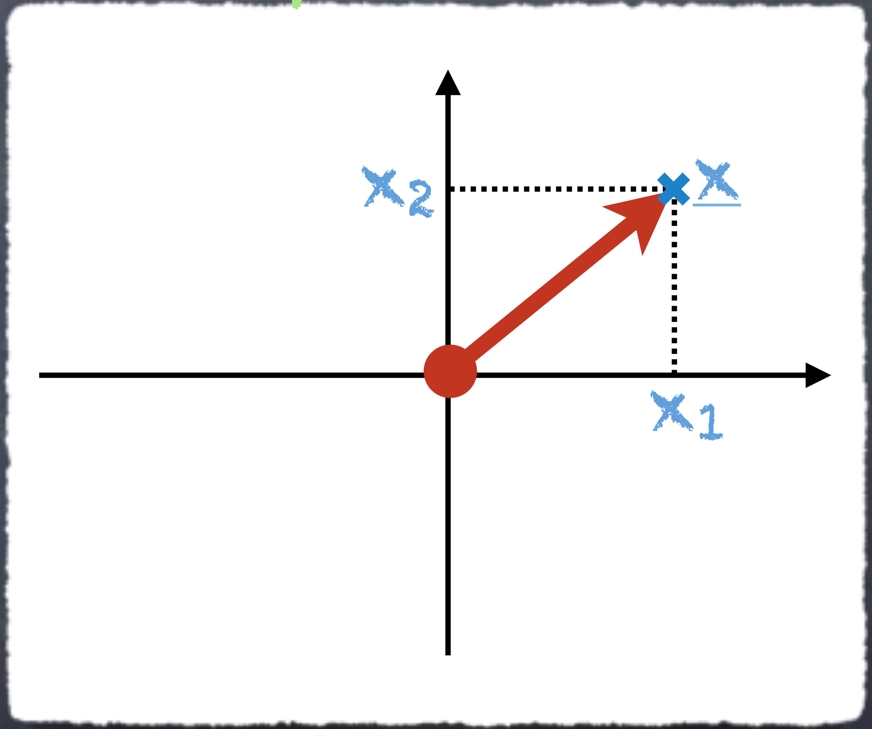
I. Un peu de topologie

Les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$

- La norme euclidienne (ou norme 2)

$$N(\underline{x}) = \| \underline{x} \|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Exemple dans $\mathbb{R}^2$



$$\| \underline{x} \|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

I. Un peu de topologie

Les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$

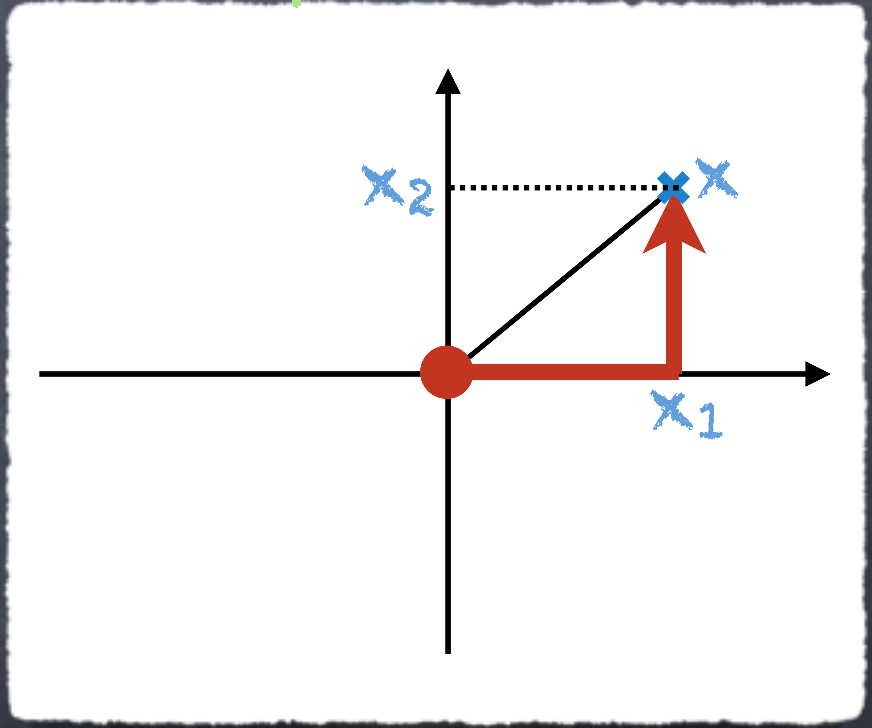
- La **norme euclidienne** (ou norme 2)

$$N(\underline{x}) = \| \underline{x} \|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- La **norme 1**

$$N(\underline{x}) = \| \underline{x} \|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

Exemple dans $\mathbb{R}^2$



$$\| \underline{x} \|_1 = |x_1| + |x_2|$$

I. Un peu de topologie

Les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$

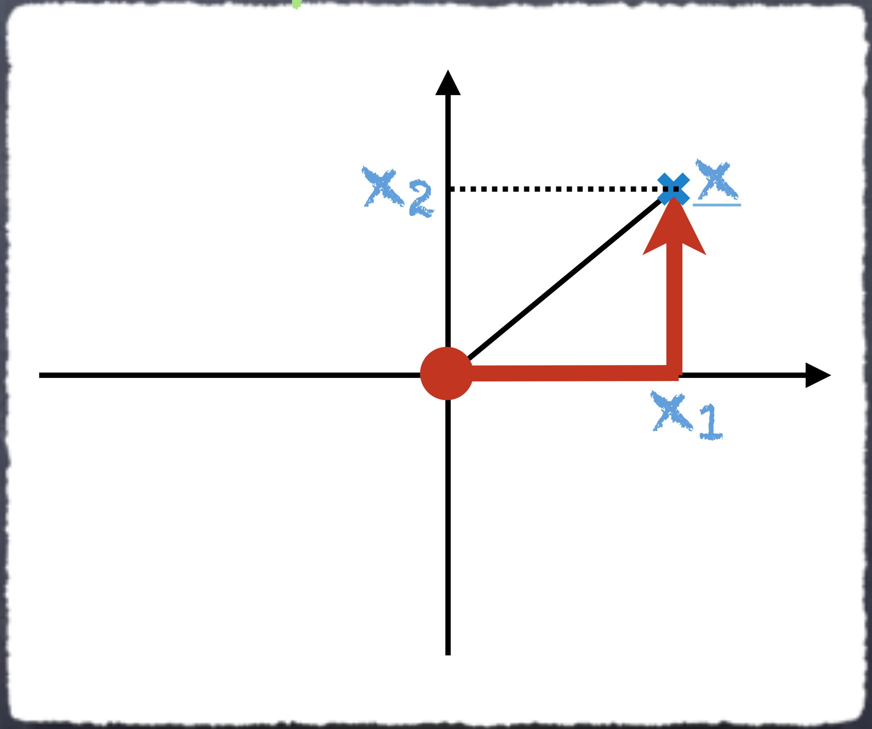
- La norme euclidienne (ou norme 2)

$$N(\underline{x}) = \| \underline{x} \|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- La norme 1

$$N(\underline{x}) = \| \underline{x} \|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

Exemple dans $\mathbb{R}^2$



$$\| \underline{x} \|_1 = |x_1| + |x_2|$$

I. Un peu de topologie

Les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$

- La norme euclidienne (ou norme 2)

$$N(\underline{x}) = \| \underline{x} \|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

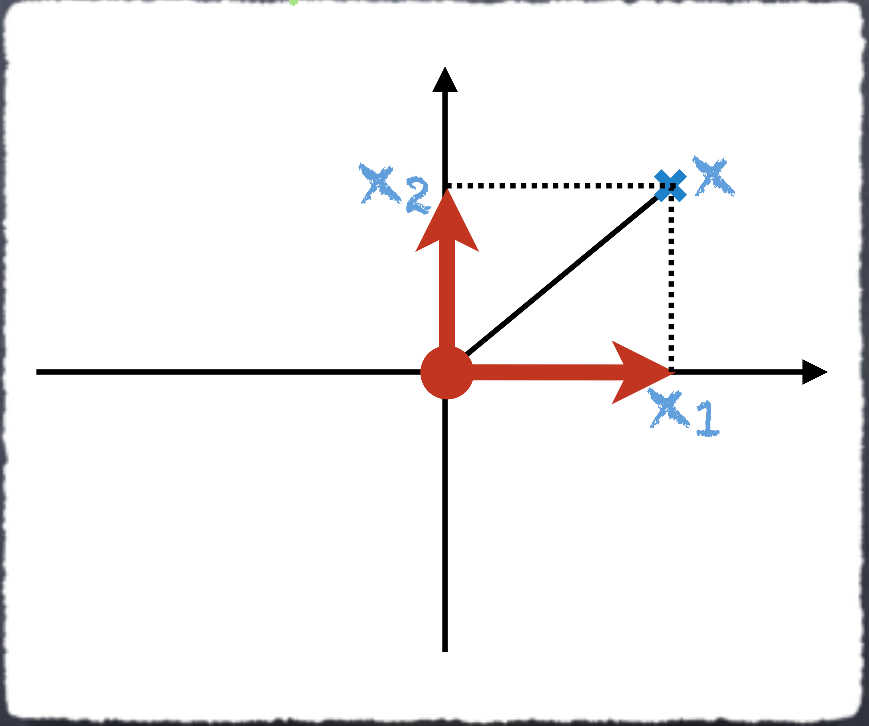
- La norme 1

$$N(\underline{x}) = \| \underline{x} \|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

- La norme infinie

$$N(\underline{x}) = \| \underline{x} \|_\infty = \max_{k \in [1,n]} (|x_k|)$$

Exemple dans $\mathbb{R}^2$



$$\| \underline{x} \|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$$

I. Un peu de topologie

Les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$

- La **norme euclidienne** (ou norme 2)

$$N(\underline{x}) = \| \underline{x} \|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

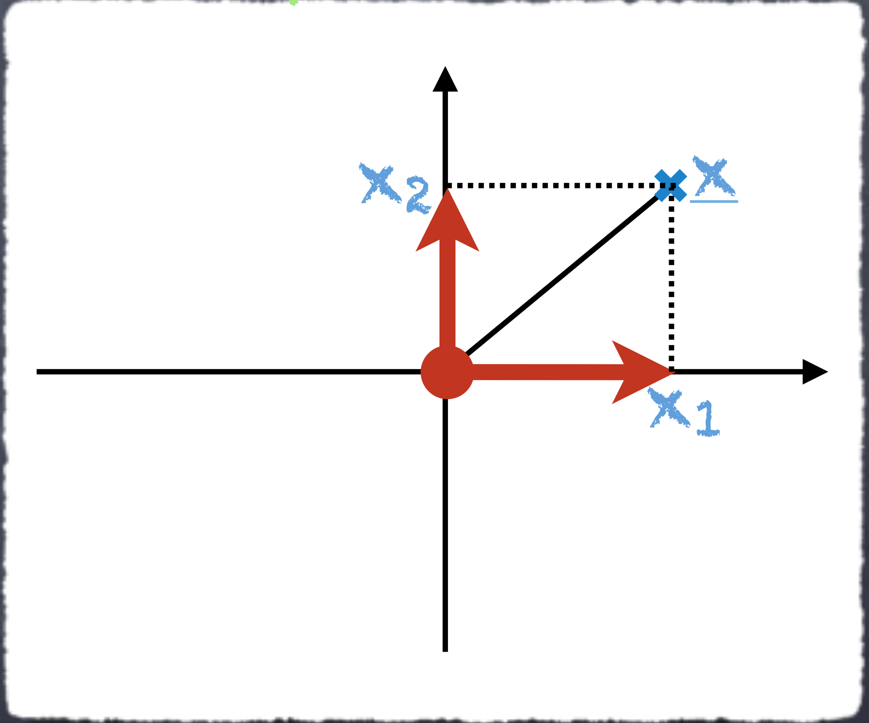
- La **norme 1**

$$N(\underline{x}) = \| \underline{x} \|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

- La **norme infinie**

$$N(\underline{x}) = \| \underline{x} \|_\infty = \max_{k \in [1,n]} (|x_k|)$$

Exemple dans $\mathbb{R}^2$



$$\| \underline{x} \|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$$

I. Un peu de topologie

1.2 Définition

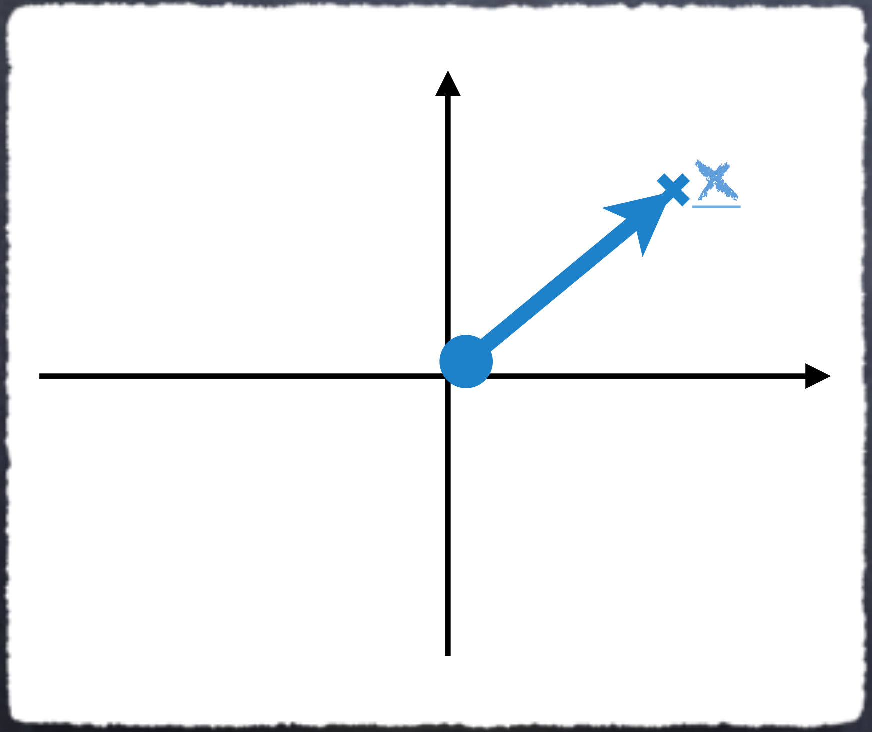
À partir d'une norme N, on peut définir la distance $d(\underline{x},\underline{y})$ entre deux éléments $(\underline{x},\underline{y}) \in \mathbb{R}^n$ ainsi : $d(\underline{x},\underline{y}) = N(\underline{x} - \underline{y})$

I. Un peu de topologie

1.2 Définition

À partir d'une norme N, on peut définir la distance $d(\underline{x},\underline{y})$ entre deux éléments $(\underline{x},\underline{y}) \in \mathbb{R}^n$ ainsi : $d(\underline{x},\underline{y}) = N(\underline{x}-\underline{y})$

Exemple dans $\mathbb{R}^2$ (pour la norme 2)

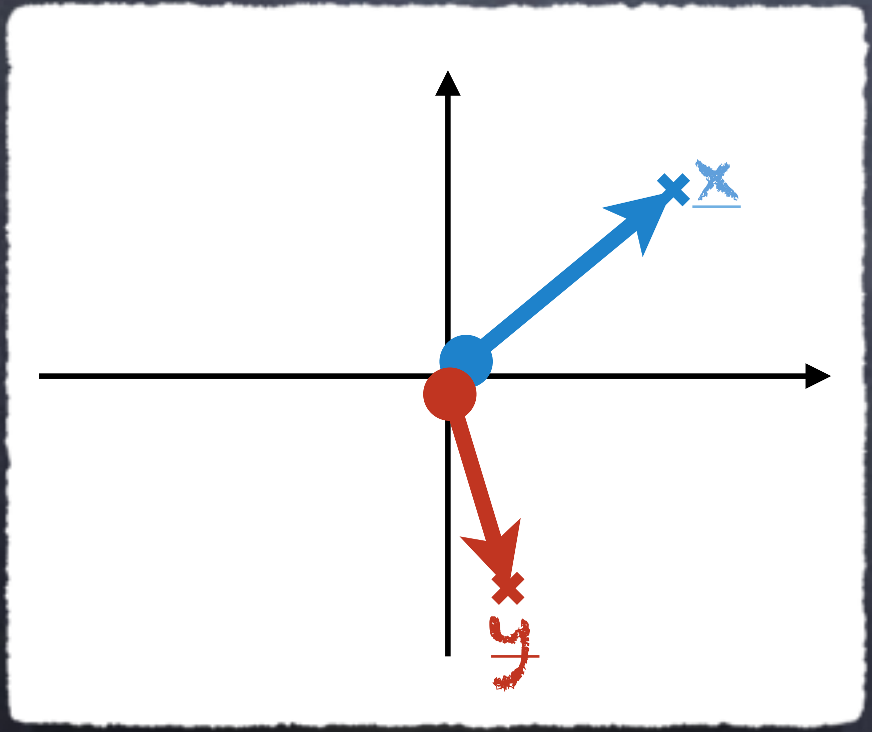


I. Un peu de topologie

1.2 Définition

À partir d'une norme N, on peut définir la distance $d(\underline{x},\underline{y})$ entre deux éléments $(\underline{x},\underline{y}) \in \mathbb{R}^n$ ainsi : $d(\underline{x},\underline{y}) = N(\underline{x} - \underline{y})$

Exemple dans $\mathbb{R}^2$ (pour la norme 2)

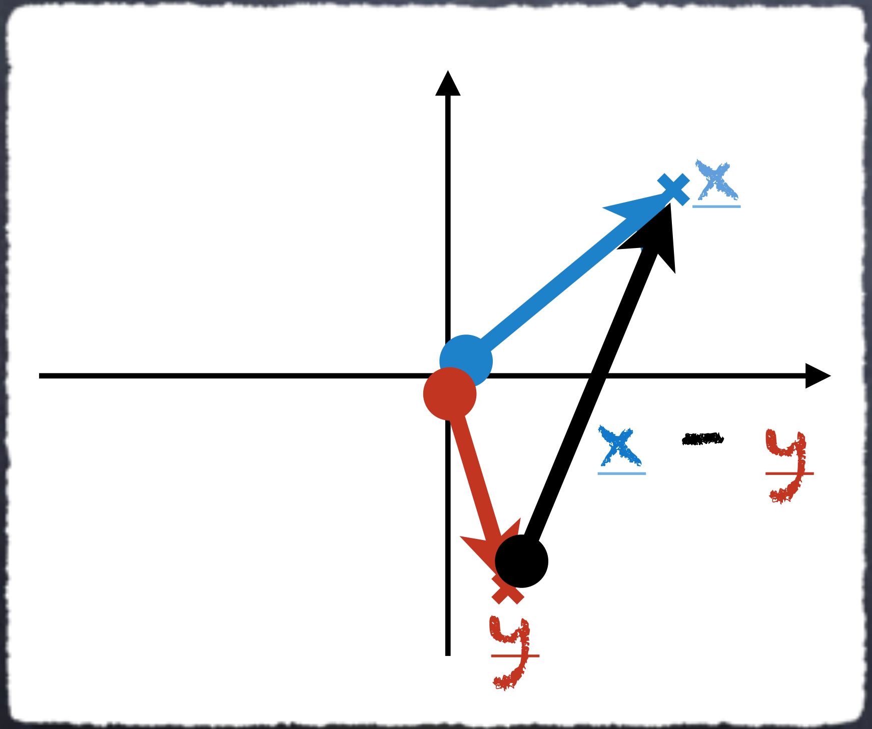


I. Un peu de topologie

1.2 Définition

À partir d'une norme N, on peut définir la distance $d(\underline{x},\underline{y})$ entre deux éléments $(\underline{x},\underline{y}) \in \mathbb{R}^n$ ainsi : $d(\underline{x},\underline{y}) = N(\underline{x}-\underline{y})$

Exemple dans $\mathbb{R}^2$ (pour la norme 2)



$$d(\underline{x},\underline{y}) = N(\underline{x}-\underline{y})$$
$$= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

I. Un peu de topologie

1.2 Définition

À partir d'une norme N, on peut définir la distance $d(\underline{x},\underline{y})$ entre deux éléments $(\underline{x},\underline{y}) \in \mathbb{R}^n$ ainsi : $d(\underline{x},\underline{y}) = N(\underline{x}-\underline{y})$

1.3 Définition

On dit que 2 normes N_1 et N_2 sont équivalentes ssi

$$\exists (A,B) > 0, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \; AN_1(\underline{x}) \leq N_2(\underline{x}) \leq BN_1(\underline{x})$$

I. Un peu de topologie

1.2 Définition

À partir d'une norme N, on peut définir la distance $d(\underline{x},\underline{y})$ entre deux éléments $(\underline{x},\underline{y}) \in \mathbb{R}^n$ ainsi : $d(\underline{x},\underline{y}) = N(\underline{x}-\underline{y})$

1.3 Définition

On dit que 2 normes N_1 et N_2 sont équivalentes ssi

$$\exists (A,B) > 0, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \; AN_1(\underline{x}) \leq N_2(\underline{x}) \leq BN_1(\underline{x})$$

Dire que 2 normes sont équivalentes signifie que si $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont proches au sens d'une norme, alors ils le seront également au sens de l'autre norme :

$$N_1(\underline{x}-\underline{y}) \sim 0 \Leftrightarrow N_2(\underline{x}-\underline{y}) \sim 0$$

I. Un peu de topologie

1.2 Définition

À partir d'une norme N, on peut définir la distance $d(\underline{x},\underline{y})$ entre deux éléments $(\underline{x},\underline{y}) \in \mathbb{R}^n$ ainsi : $d(\underline{x},\underline{y}) = N(\underline{x}-\underline{y})$

1.3 Définition

On dit que 2 normes N_1 et N_2 sont équivalentes ssi

$\exists (A,B) > 0, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \; AN_1(\underline{x}) \leq N_2(\underline{x}) \leq BN_1(\underline{x})$

1.4 Proposition (admis)

Les 3 normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Remarque : Cette proposition n'est pas difficile à montrer et vous pouvez le faire à titre d'exercice.

I. Un peu de topologie

1.5 Définition

On appelle **boule ouverte** et **boule fermée** de rayons R et de centre $\underline{a}$ les ensembles définis ainsi :

- $B_o(a,R) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \text{t.q. } N(\underline{x}-\underline{a}) = \| \underline{x}-\underline{a} \| < R\}$ (ouverte)
- $B_f(a,R) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \text{t.q. } N(\underline{x}-\underline{a}) = \| \underline{x}-\underline{a} \| \leq R\}$ (fermée)

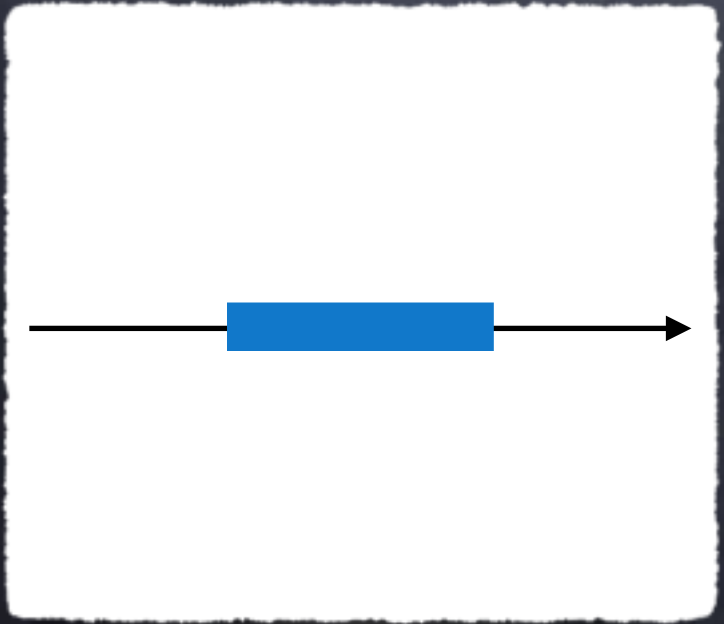
I. Un peu de topologie

1.5 Définition

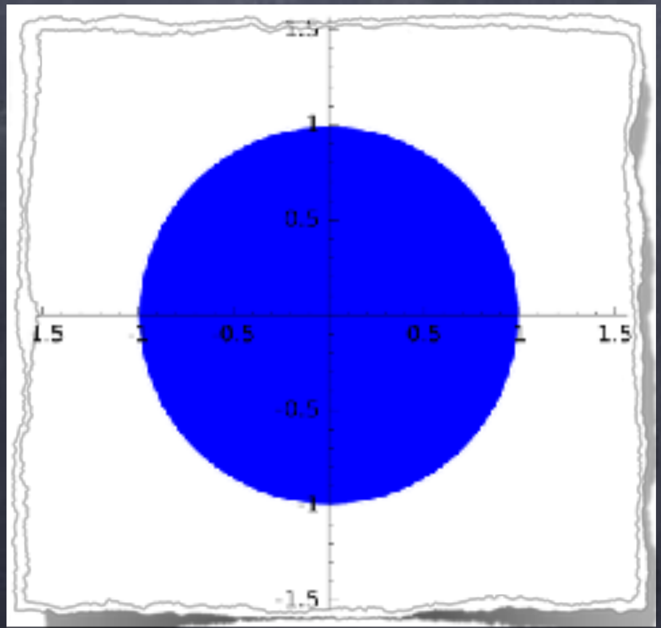
On appelle boule ouverte et boule fermée de rayons R et de centre $\underline{a}$ les ensembles définis ainsi :

- $B_o(a,R) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ t.q. } N(\underline{x}-\underline{a}) = \| \underline{x}-\underline{a} \| < R\}$ (ouverte)
- $B_f(a,R) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ t.q. } N(\underline{x}-\underline{a}) = \| \underline{x}-\underline{a} \| \leq R\}$ (fermée)

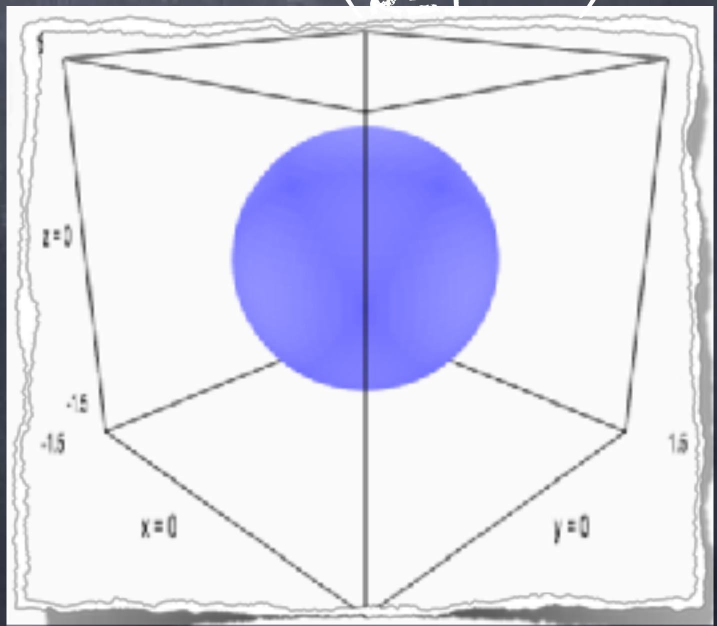
Exemples (norme 2) : $B_o(\underline{0},1) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ t.q. } \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} < 1\}$



n = 1



n = 2



n = 3

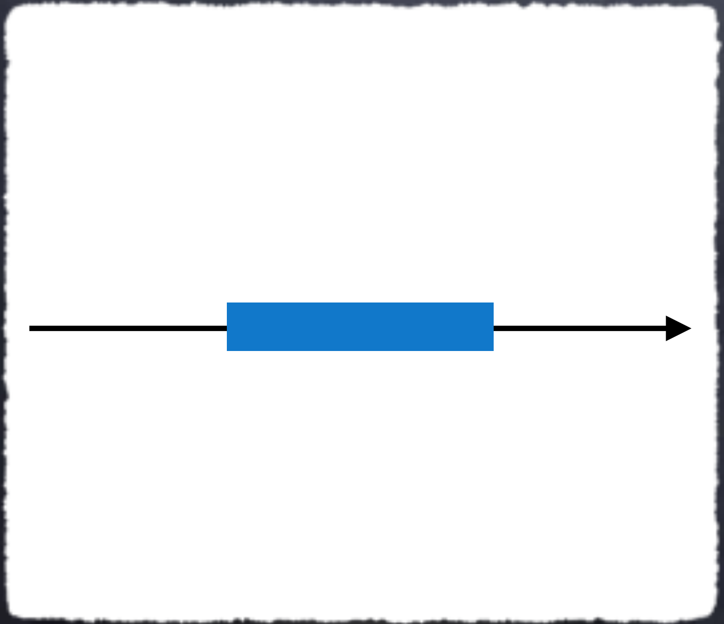
I. Un peu de topologie

1.5 Définition

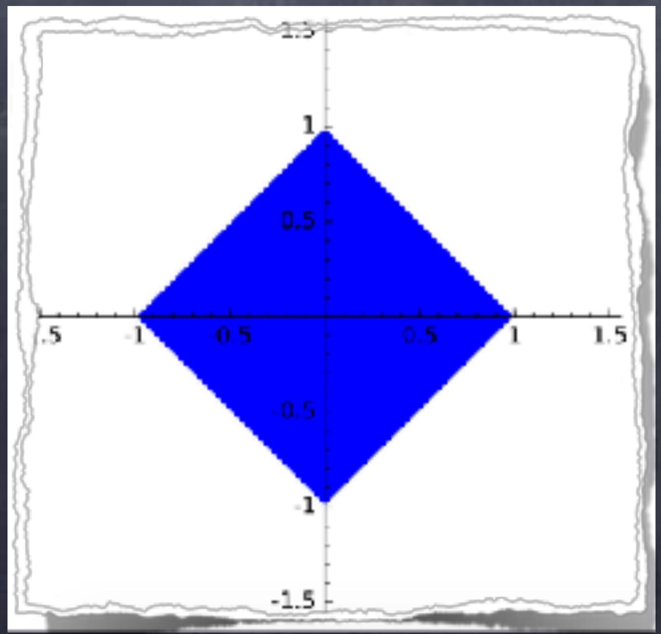
On appelle boule ouverte et boule fermée de rayons R et de centre $\underline{a}$ les ensembles définis ainsi :

- $B_o(a,R) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \text{t.q. } N(\underline{x}-\underline{a}) = \| \underline{x}-\underline{a} \| < R\}$ (ouverte)
- $B_f(a,R) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \text{t.q. } N(\underline{x}-\underline{a}) = \| \underline{x}-\underline{a} \| \leq R\}$ (fermée)

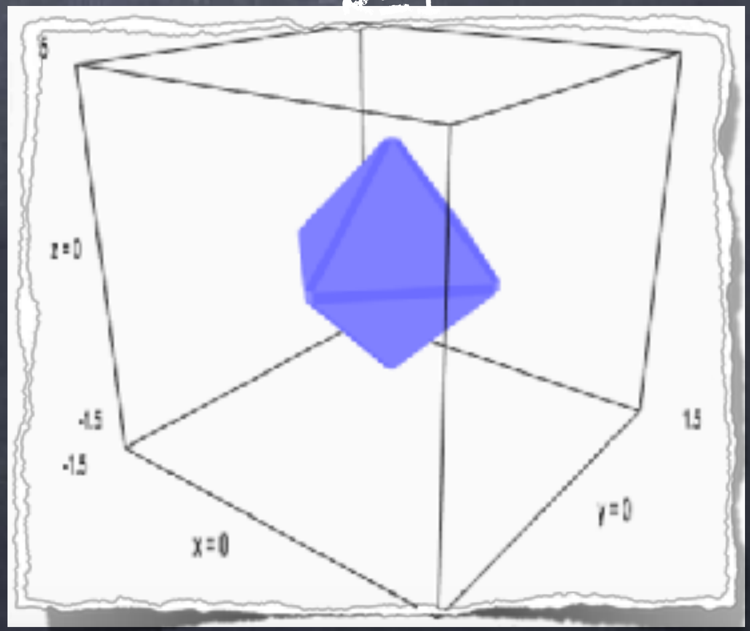
Exemples (norme 1) : $B_o(\underline{0},1) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \text{t.q. } \sum_{k=1}^{n} |x_k| < 1\}$



n = 1



n = 2



n = 3

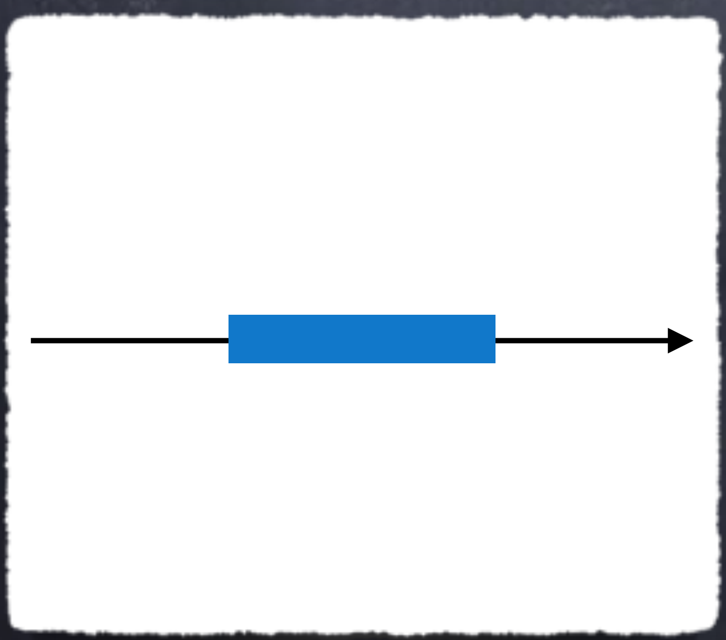
I. Un peu de topologie

1.5 Définition

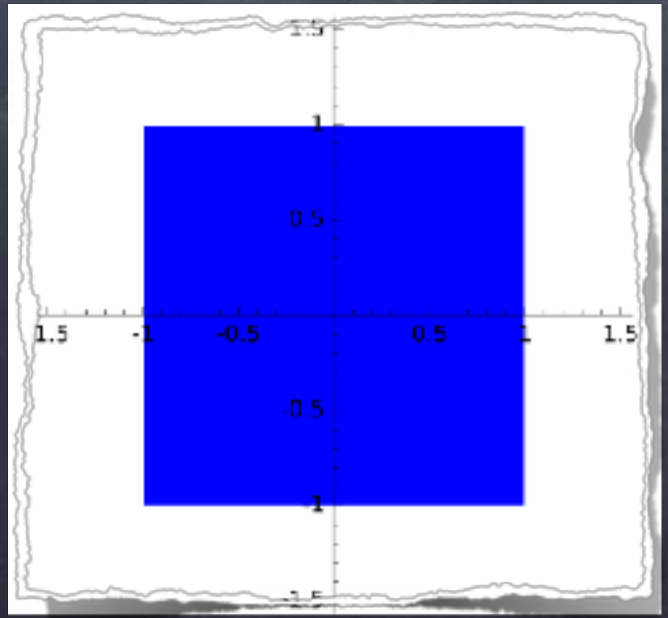
On appelle **boule ouverte** et **boule fermée** de rayons R et de centre $\underline{a}$ les ensembles définis ainsi :

- $B_o(a,R)=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^n,\ \text{t.q. } N(\underline{x}-\underline{a})=\|\underline{x}-\underline{a}\|<R\}$ (ouverte)
- $B_f(a,R)=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^n,\ \text{t.q. } N(\underline{x}-\underline{a})=\|\underline{x}-\underline{a}\|\leq R\}$ (fermée)

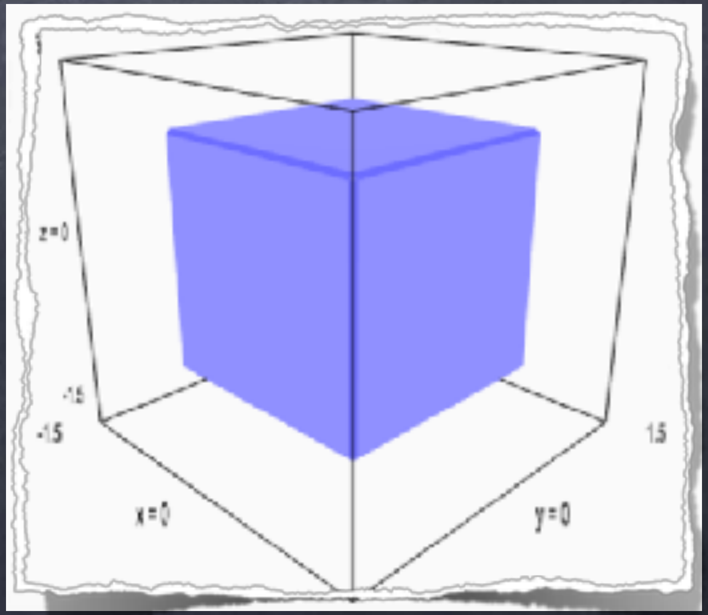
Exemples (norme ∞) : $B_o(\underline{0},1)=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^n,\ \text{t.q. } \max_k|x_k|<1\}$



n = 1



n = 2



n = 3

I. Un peu de topologie

1.5 Définition

On appelle boule ouverte et boule fermée de rayons R et de centre $\underline{a}$ les ensembles définis ainsi :

- $B_o(a,R) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \text{t.q. } N(\underline{x}-\underline{a}) = \| \underline{x}-\underline{a} \| < R\}$ (ouverte)
- $B_f(a,R) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \text{t.q. } N(\underline{x}-\underline{a}) = \| \underline{x}-\underline{a} \| \leq R\}$ (fermée)

1.6 Définition

Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, on dit que cet ensemble est ouvert ssi pour tout $\underline{a} \in \mathcal{O}$, il existe $\eta > 0$ t.q. $B_o(\underline{a},\eta) \subset \mathcal{O}$

On dira qu'un ensemble $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ est fermé si son complémentaire dans $\mathbb{R}^n$, noté $\overline{\mathcal{F}} = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{F}$ est ouvert

Exemples : $]0,1[$ est ouvert

$[0,1]$ est fermé

$[0,1[$ est ni ouvert, ni fermé

Au programme (chapitre 3) :

Objectif :

Étudier les fonctions de plusieurs variables scalaires

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Plan :

I. Un peu de topologie sur $\mathbb{R}^n$

II. Limite et continuité

III. Dérivées partielles, différentielle et fonctions C^1

IV. Ma première équation aux dérivées partielles

II. Limite et continuité

2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que f admet une limite en $\underline{a} \in \Omega$ ssi :

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall \underline{x} \in \Omega,$$

$$\| \underline{x} - \underline{a} \| \leq \eta \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| \leq \epsilon$$

II. Limite et continuité

2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que f admet une limite en $\underline{a} \in \Omega$ ssi :

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall \underline{x} \in \Omega,$$

$$\| \underline{x} - \underline{a} \| \leq \eta \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| \leq \epsilon$$

Remarques :

- Dans cette définition, le choix de la norme n'est pas préciser, car comme vu précédemment, les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

II. Limite et continuité

2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que f admet une limite en $\underline{a} \in \Omega$ ssi :

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall \underline{x} \in \Omega,$$

$$\| \underline{x} - \underline{a} \| \leq \eta \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| \leq \epsilon$$

Remarques :

- Dans cette définition, le choix de la norme n'est pas préciser, car comme vu précédemment, les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

- Afin d'être certain que f(x) existe pour $\underline{x} \in B(\underline{a}, \eta)$ $\Leftrightarrow \| \underline{x} - \underline{a} \| \leq \eta$ on doit considérer Ω ouvert

II. Limite et continuité

2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que f admet une limite en $\underline{a} \in \Omega$ ssi :

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall \underline{x} \in \Omega,$$

$$\| \underline{x} - \underline{a} \| \leq \eta \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| \leq \epsilon$$

2.2 Proposition (unicité de la limite, admis)

La limite de f en $\underline{a}$, si elle existe, est unique.

II. Limite et continuité

2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

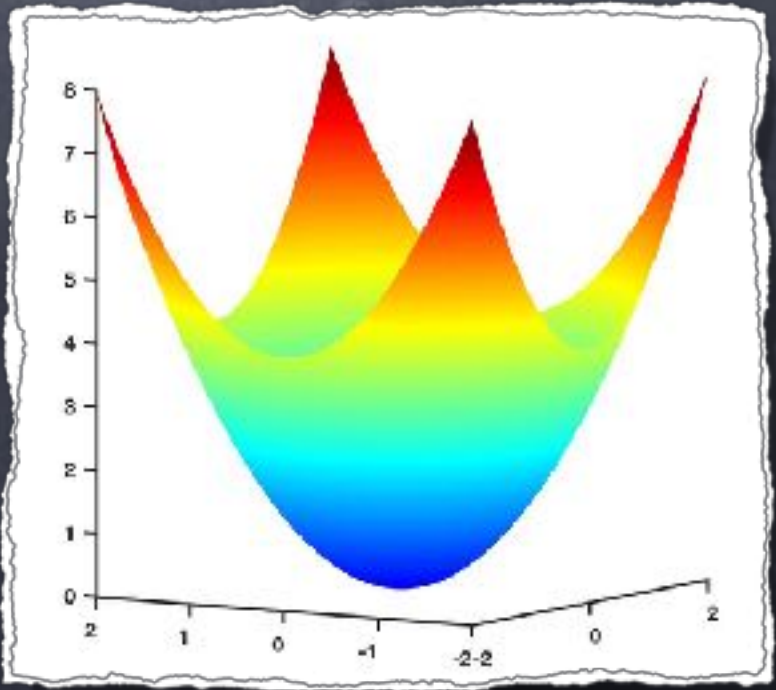
On dit que f admet une limite en $\underline{a} \in \Omega$ ssi :

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall \underline{x} \in \Omega,$$

$$\| \underline{x} - \underline{a} \| \leq \eta \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| \leq \epsilon$$

Exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2$ définie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$



II. Limite et continuité

2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

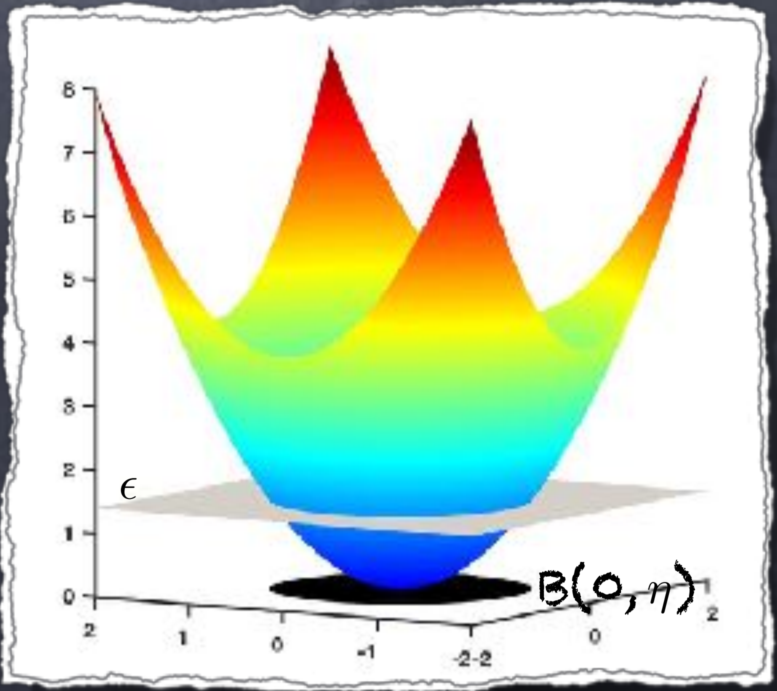
On dit que f admet une limite en $\underline{a} \in \Omega$ ssi :

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall \underline{x} \in \Omega,$$

$$\| \underline{x} - \underline{a} \| \leq \eta \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| \leq \epsilon$$

Exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2$ définie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$



Soit $\epsilon > 0$.

Pour $\eta = \sqrt{\epsilon}$ nous avons bien

$$\| \underline{x} \|_2 \leq \eta = \sqrt{\epsilon} \Rightarrow \| \underline{x} \|_2^2 = |x^2 + y^2| \leq \epsilon$$

II. Limite et continuité

2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que f admet une limite en $\underline{a} \in \Omega$ ssi :

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = l \iff \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall \underline{x} \in \Omega,$$

$$\| \underline{x} - \underline{a} \| \leq \eta \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| \leq \epsilon$$

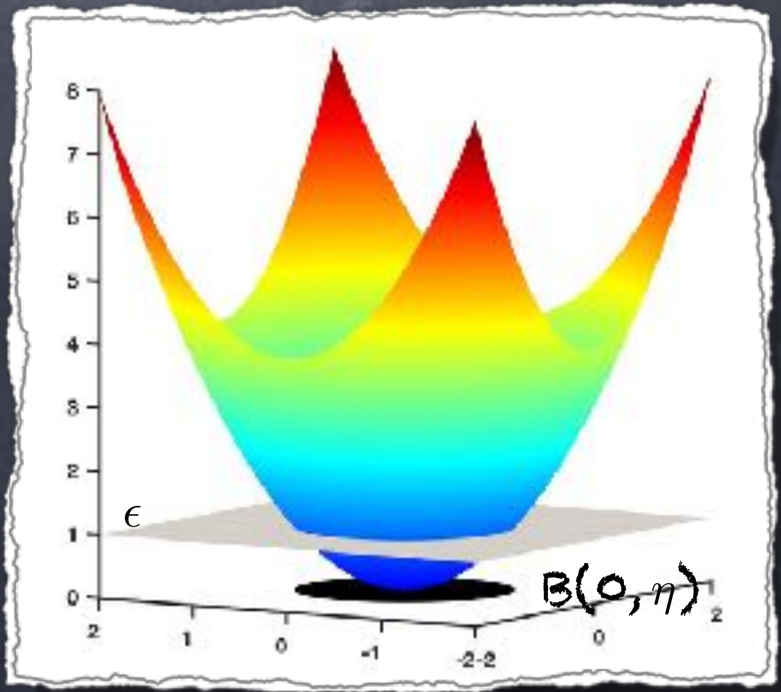
Exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2$ définie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Soit $\epsilon > 0$.

Pour $\eta = \sqrt{\epsilon}$ nous avons bien

$$\| \underline{x} \|_2 \leq \eta = \sqrt{\epsilon} \Rightarrow \| \underline{x} \|_2^2 = |x^2 + y^2| \leq \epsilon$$



II. Limite et continuité

2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que f admet une limite en $\underline{a} \in \Omega$ ssi :

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall \underline{x} \in \Omega,$$

$$\| \underline{x} - \underline{a} \| \leq \eta \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| \leq \epsilon$$

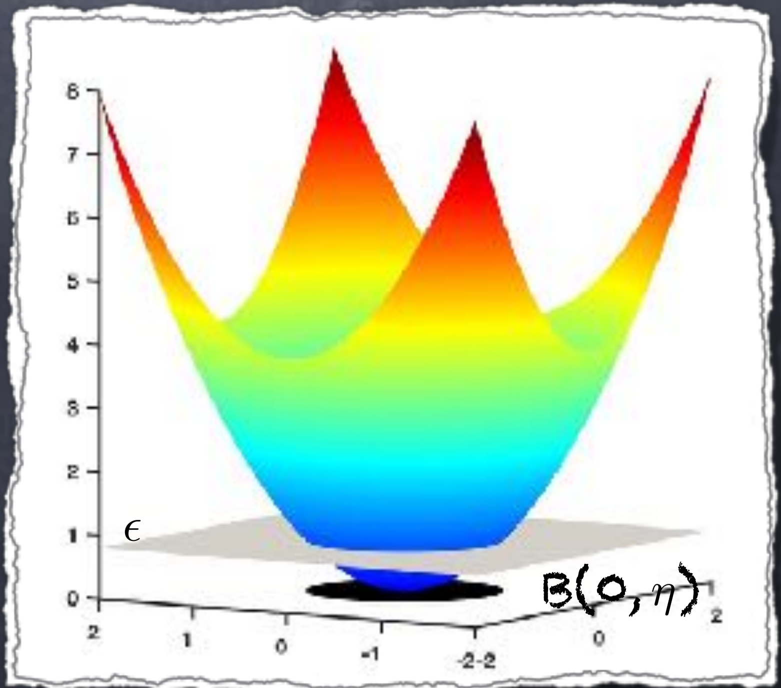
Exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2$ définie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$

Soit $\epsilon > 0$.

Pour $\eta = \sqrt{\epsilon}$ nous avons bien

$$\| \underline{x} \|_2 \leq \eta = \sqrt{\epsilon} \Rightarrow \| \underline{x} \|_2^2 = |x^2 + y^2| \leq \epsilon$$



II. Limite et continuité

2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que f admet une limite en $\underline{a} \in \Omega$ ssi :

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall \underline{x} \in \Omega,$$

$$\| \underline{x} - \underline{a} \| \leq \eta \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| \leq \epsilon$$

Remarque :

De la définition ci-dessus, on déduit que si la limite de f en $\underline{a}$ existe, alors quelque soit la trajectoire $\underline{x}(t)$ tendant vers $\underline{a}$ quand t tend vers 0, on a nécessairement

$$\lim_{t \to 0} f(\underline{x}(t)) = l$$

II. Limite et continuité

2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que f admet une limite en $\underline{a} \in \Omega$ ssi :

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall \underline{x} \in \Omega,$$

$$\| \underline{x} - \underline{a} \| \leq \eta \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| \leq \epsilon$$

2.2 Proposition (critère de non existence de la limite)

Si pour 2 trajectoires $\underline{x_1}(t)$ et $\underline{x_2}(t)$ tendant vers $\underline{a}$ avec t qui tend vers 0 nous avons :

$$\lim_{t \to 0} f(\underline{x_1}(t)) \neq \lim_{t \to 0} f(\underline{x_2}(t))$$

alors f n'admet pas de limite en $\underline{a}$!

Preuve : au (vrai) tableau !

II. Limite et continuité

2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que f admet une limite en $\underline{a} \in \Omega$ ssi :

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall \underline{x} \in \Omega,$$

$$\| \underline{x} - \underline{a} \| \leq \eta \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| \leq \epsilon$$

Exemple : $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ définie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

Montrer que f n'admet pas de limite en (0,0).

(détails au tableau)

II. Limite et continuité

2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que f admet une limite en $\underline{a} \in \Omega$ ssi :

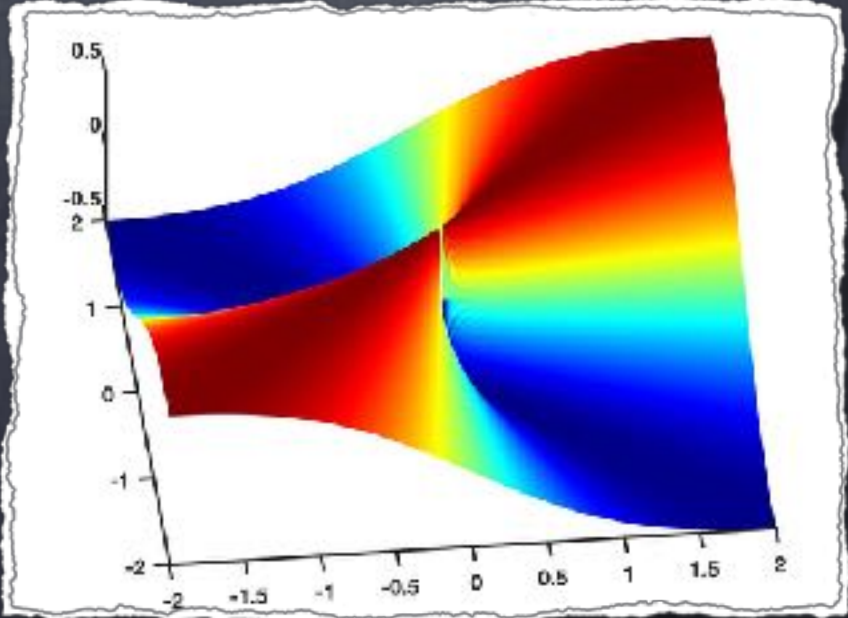
$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall \underline{x} \in \Omega,$$

$$\| \underline{x} - \underline{a} \| \leq \eta \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| \leq \epsilon$$

Exemple : $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ définie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

Montrer que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

(détails au tableau)



II. Limite et continuité

2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que f admet une limite en $\underline{a} \in \Omega$ ssi :

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = l \iff \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall \underline{x} \in \Omega,$$

$$\| \underline{x} - \underline{a} \| \leq \eta \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| \leq \epsilon$$

2.3 Théorème (admis)

Tous les résultats classiques sur le calcul de limite pour des fonctions d'une variable (i.e. somme, différence, produit, quotient, composition) restent valables pour les fonctions de plusieurs variables.

II. Limite et continuité

2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que f admet une limite en $\underline{a} \in \Omega$ ssi :

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall \underline{x} \in \Omega,$$

$$\| \underline{x} - \underline{a} \| \leq \eta \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| \leq \epsilon$$

2.4 Définition

On dira qu'une fonction f est continue en $\underline{a} \in \Omega$ si la limite de f en $\underline{a}$ existe et est égale à $f(\underline{a})$.

On dira qu'une fonction f est continue sur Ω si elle est continue en chaque point $\underline{a} \in \Omega$

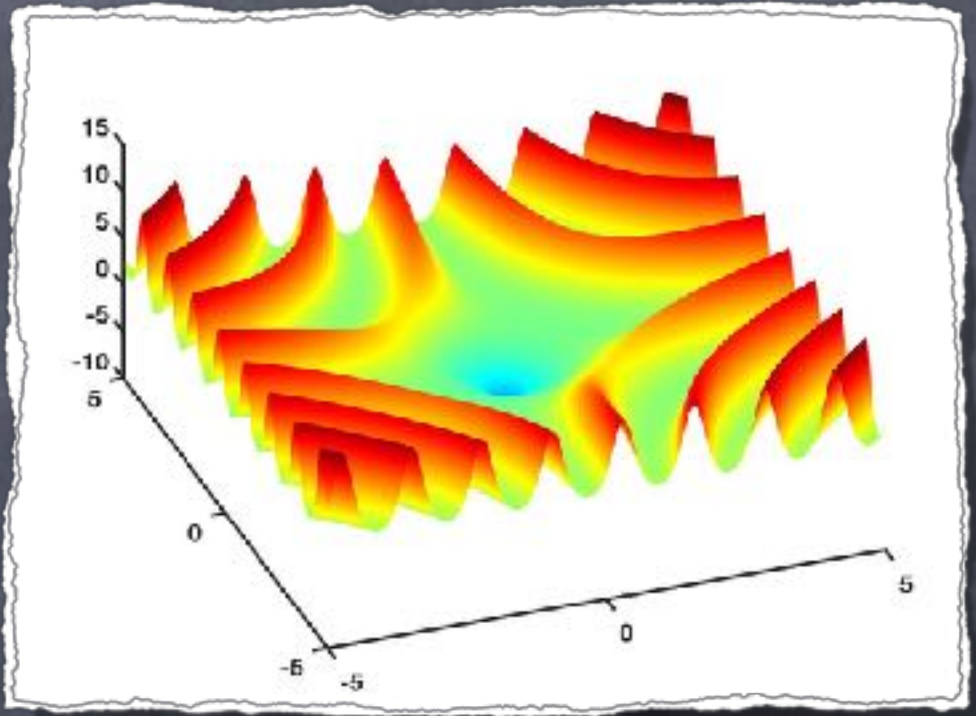
II. Limite et continuité

Exemples :

- $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{e^{\sin(xy)}}$

Montrer que f est continu sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

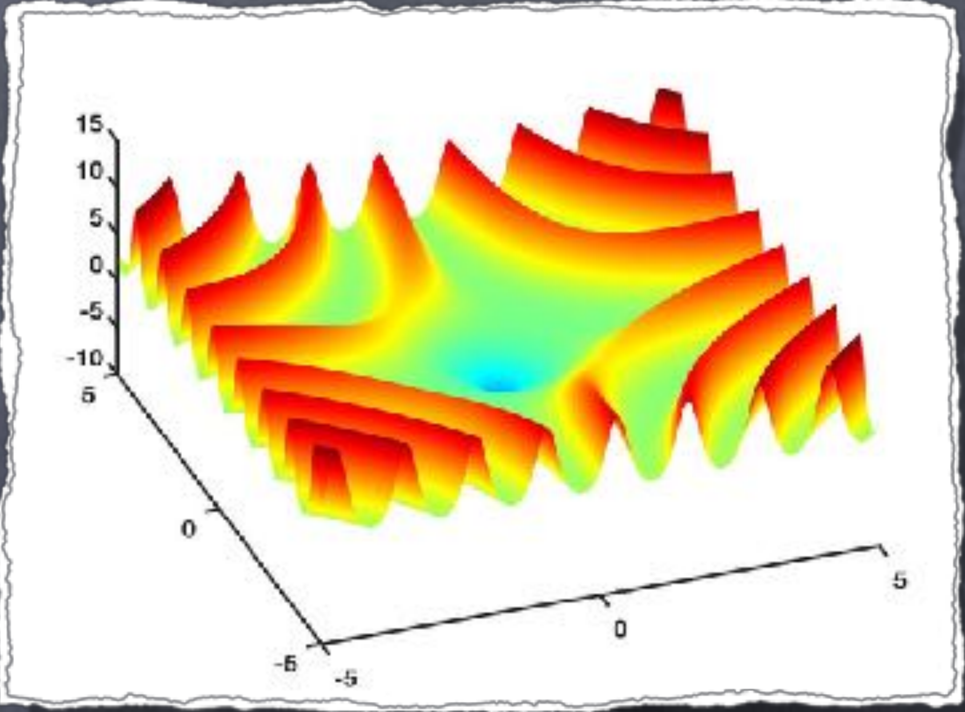
(détails au tableau)



II. Limite et continuité

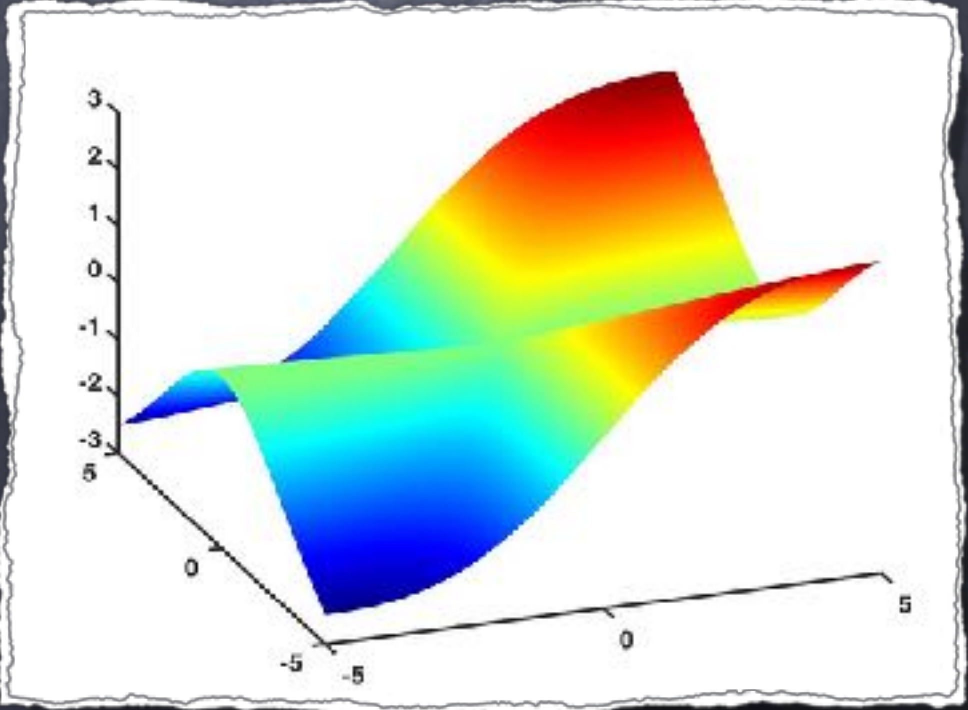
Exemples :

- $$f(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{e^{\sin(xy)}}$$



Montrer que f est continu sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$
(détails au tableau)

- $$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$



Montrer que f est continu sur $\mathbb{R}^2$
(détails au tableau)

Au programme (chapitre 3) :

Objectif :

Étudier les fonctions de plusieurs variables scalaires

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Plan :

I. Un peu de topologie sur $\mathbb{R}^n$

II. Limite et continuité

III. Dérivées partielles, différentielle et fonctions C^1

1) Définition des dérivées partielles

2) Différentielle d'une fonction

3) Fonctions C^1

IV. Ma première équation aux dérivées partielles

III. 1) Dérivées partielles

Soit f une fonction définie un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

3.1.1 Définition

On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à x_i en $\underline{a} \in \Omega$ si l'application partielle $\varphi_i(x_i)$ définie par

$$x_i \to \varphi_i(x_i) = f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots, a_n)$$

est dérivable en $x_i = a_i$. Alors, on note :

$$\partial_{x_i} f(\underline{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = \varphi_i'(a_i)$$

III. 1) Dérivées partielles

Soit f une fonction définie un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

3.1.1 Définition

On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à x_i en $\underline{a} \in \Omega$ si l'application partielle $\varphi_i(x_i)$ définie par

$$x_i \to \varphi_i(x_i) = f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots, a_n)$$

est dérivable en $x_i = a_i$. Alors, on note :

$$\partial_{x_i} f(\underline{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = \varphi_i'(a_i)$$

Remarque :

Un dérivée partielle n'est finalement rien de plus qu'une dérivée usuelle selon 1 variable :

$$\partial_{x_i} f(\underline{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{a} + t\underline{e_i}) - f(\underline{a})}{t}$$

III. 1) Dérivées partielles

Soit f une fonction définie un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

3.1.1 Définition

On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à x_i en $\underline{a} \in \Omega$ si l'application partielle $\varphi_i(x_i)$ définie par

$$x_i \to \varphi_i(x_i) = f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots, a_n)$$

est dérivable en $x_i = a_i$. Alors, on note :

$$\partial_{x_i} f(\underline{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = \varphi_i'(a_i)$$

3.1.2 Définition

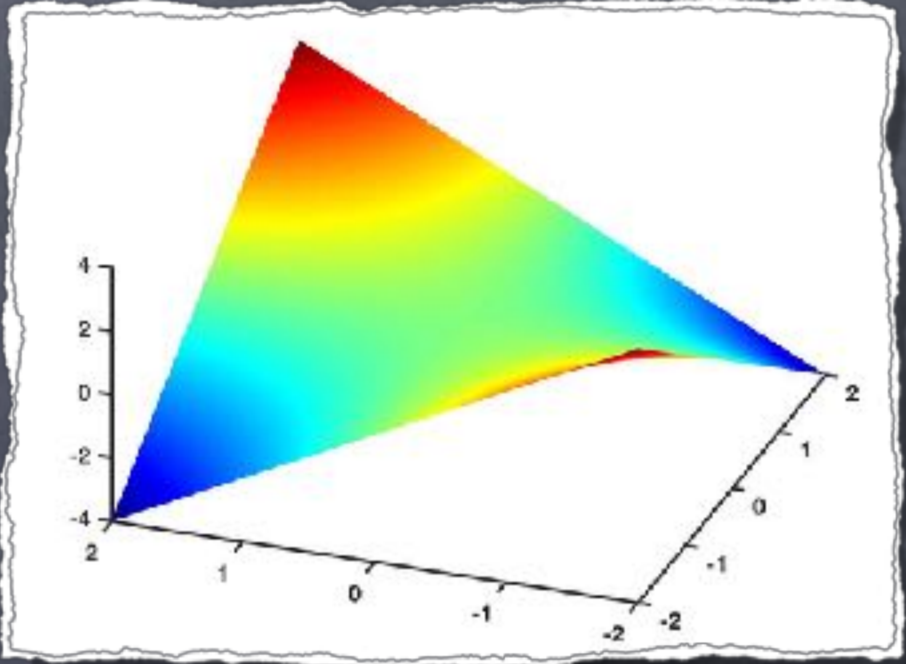
On dit que f admet une fonction dérivée partielle par rapport à x_i sur tout Ω si f admet une dérivée partielle par rapport à x_i pour tout $\underline{a} \in \Omega$

III. 1) Dérivées partielles

Exemples :

- $f(x,y) = xy$

Montrer que f admet des dérivées partielles $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
(détails au tableau)

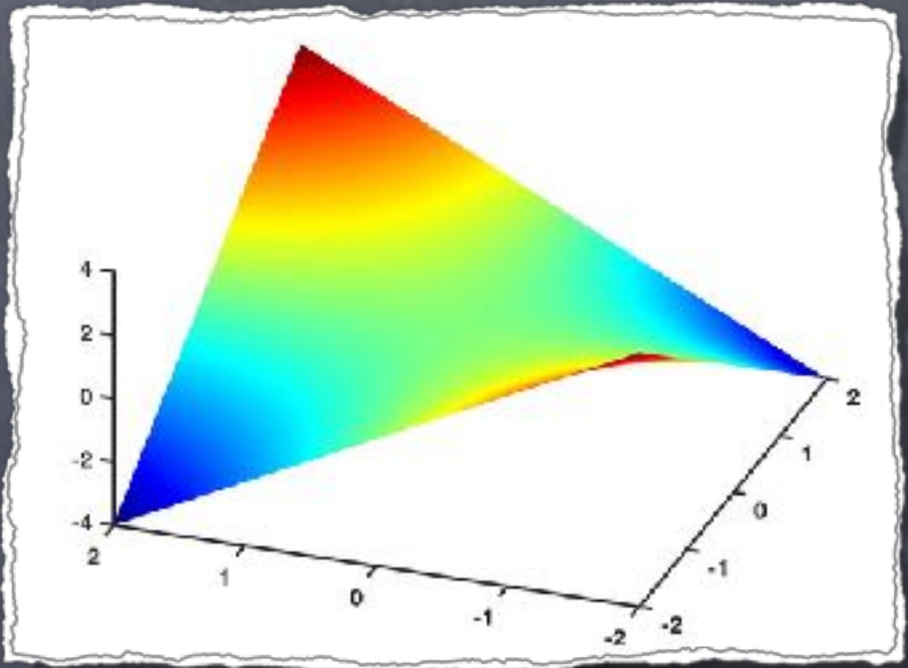


III. 1) Dérivées partielles

Exemples :

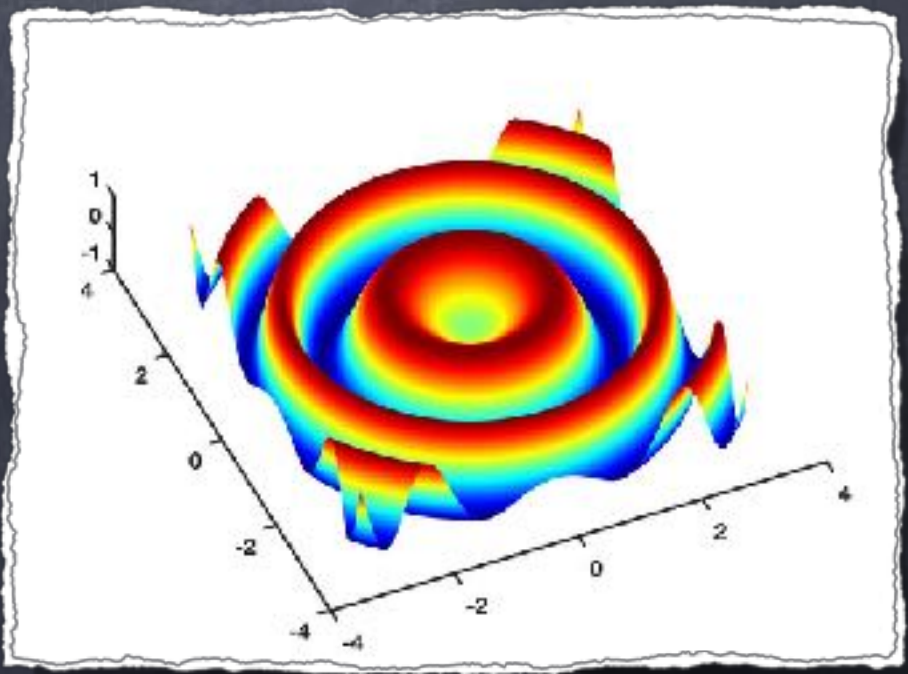
- $f(x,y) = xy$

Montrer que f admet des dérivées partielles $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ (détails au tableau)



- $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$

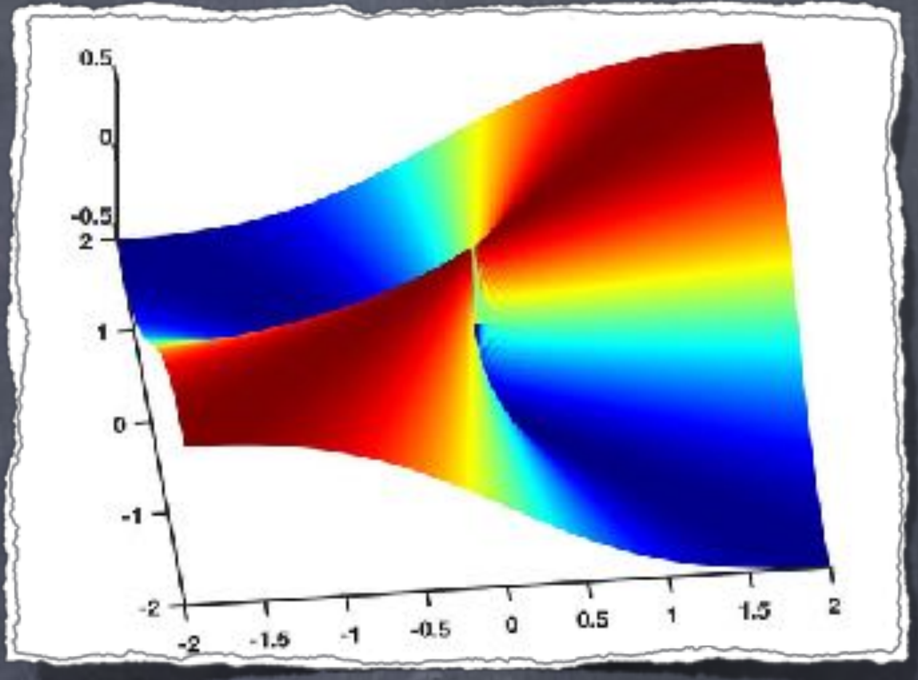
Montrer que f admet des dérivées partielles $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ (détails au tableau)



III. 1) Dérivées partielles

Un exemple particulier :

- $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

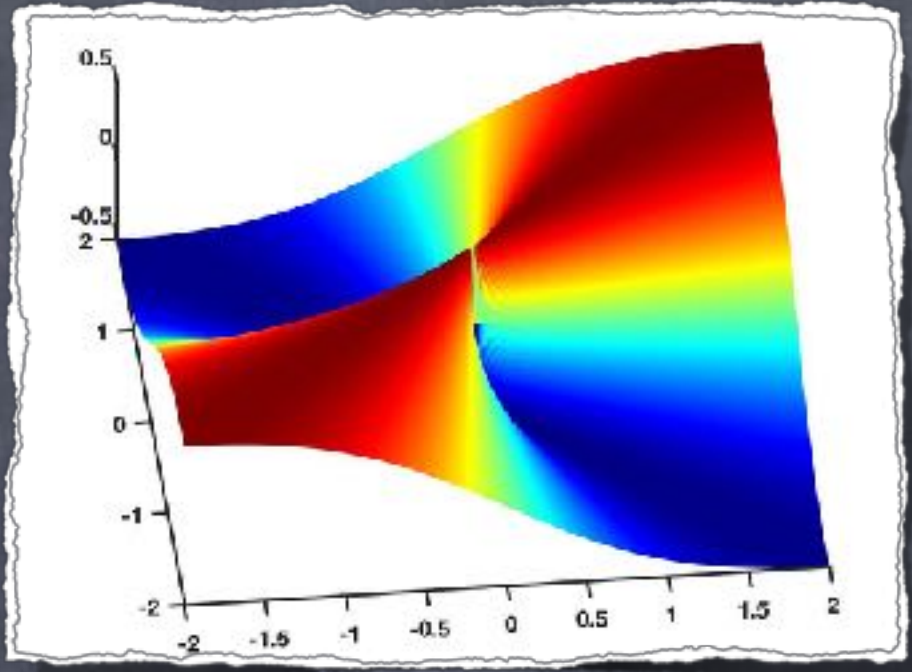


Montrer que f admet des dérivées partielles $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ (détails au tableau)

III. 1) Dérivées partielles

Un exemple particulier :

- $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



Montrer que f admet des dérivées partielles $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2}$ (détails au tableau)

Remarque :

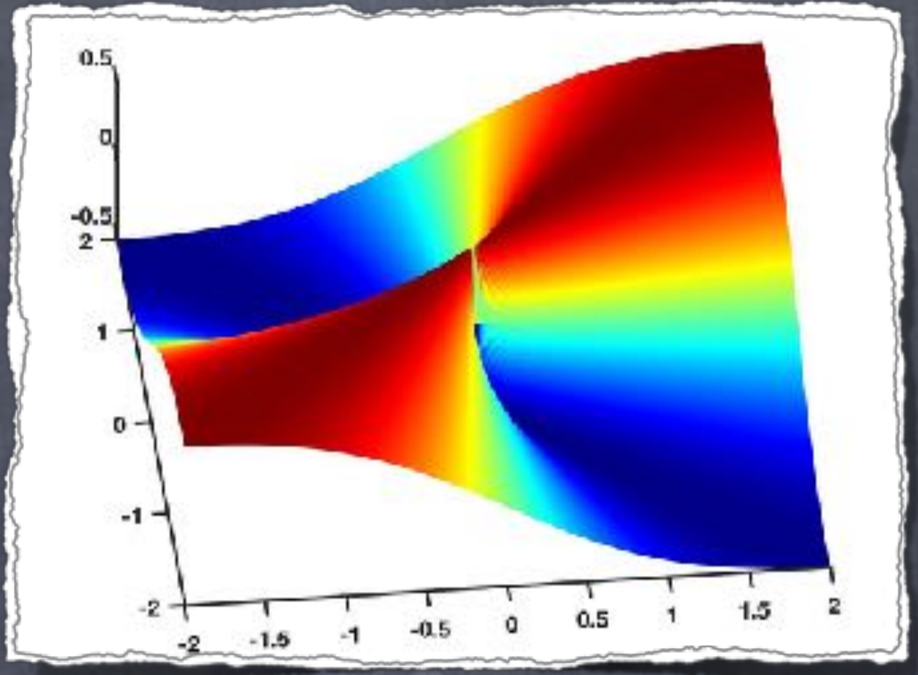
La fonction admet des dérivées partielles partout sans être continue en (0,0) !

III. 1) Dérivées partielles

Un exemple particulier :

- $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f admet des dérivées partielles $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2}$ (détails au tableau)



Remarque :

La fonction admet des dérivées partielles partout sans être continue en (0,0) !

En fait, l'existence de dérivées partielles en (0,0) assure uniquement que le long des axes (abscisse et ordonnée), f est continue.

III. 2) Différentielle d'une fonction

3.2.1 Définition

On dit que f est différentiable en $\underline{a} \in \Omega$ s'il existe $d_a f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n, \quad f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + d_a f(\underline{h}) + \| \underline{h} \| \, \epsilon_a(\underline{h})$$

où $\epsilon_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon_a(\underline{h}) \underset{\underline{h} \to \underline{0}}{\to} 0$.

III. 2) Différentielle d'une fonction

3.2.1 Définition

On dit que f est différentiable en $\underline{a} \in \Omega$ s'il existe $d_a f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n, \quad f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + d_a f(\underline{h}) + \| \underline{h} \| \, \epsilon_a(\underline{h})$$

où $\epsilon_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon_a(\underline{h}) \underset{\underline{h} \to \underline{0}}{\to} 0$.

L'application linéaire $d_a f$ est appelé différentielle de f et est de la forme : $d_a f(\underline{h}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \alpha_i$ où $\alpha_i \in \mathbb{R}$

III. 2) Différentielle d'une fonction

3.2.1 Définition

On dit que f est différentiable en $\underline{a} \in \Omega$ s'il existe $d_a f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n, \quad f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + d_a f(\underline{h}) + \| \underline{h} \| \, \epsilon_a(\underline{h})$$

où $\epsilon_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon_a(\underline{h}) \underset{\underline{h}\to\underline{0}}{\to} 0.$

L'application linéaire $d_a f$ est appelé différentielle de f et est de la forme : $d_a f(\underline{h}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \alpha_i$ où $\alpha_i \in \mathbb{R}$

Remarque :

On peut noter que cette notion généralise la définition de la dérivée pour les fonction d'une variable :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad \Leftrightarrow \quad f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \epsilon_a(h)|h|$$

III. 2) Différentielle d'une fonction

3.2.1 Définition

On dit que f est différentiable en $\underline{a} \in \Omega$ s'il existe $d_a f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n, \; f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + d_a f(\underline{h}) + \| \underline{h} \| \, \epsilon_a(\underline{h})$$

où $\epsilon_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon_a(\underline{h}) \underset{\underline{h} \to \underline{0}}{\to} 0$.

L'application linéaire $d_a f$ est appelé différentielle de f et est de la forme : $d_a f(\underline{h}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \alpha_i$ où $\alpha_i \in \mathbb{R}$

3.2.2 Proposition

Si f est différentiable en $\underline{a}$, alors elle est continue en $\underline{a}$

Preuve : au (vrai) tableau ! $\blacksquare$

III. 2) Différentielle d'une fonction

3.2.3 Proposition

Si f est différentiable en $\underline{a}$, pour $t \in \mathbb{R}$ et $\forall \underline{v} \neq \underline{0} \in \mathbb{R}^n$ la dérivée directionnelle :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{a} + t\underline{v}) - f(\underline{a})}{t} = d_a f(\underline{v})$$

est bien définie.

Preuve : au (vrai) tableau !

$\blacksquare$

III. 2) Différentielle d'une fonction

3.2.3 Proposition

Si f est différentiable en $\underline{a}$, pour $t \in \mathbb{R}$ et $\forall \underline{v} \neq \underline{0} \in \mathbb{R}^n$ la dérivée directionnelle :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{a} + t\underline{v}) - f(\underline{a})}{t} = d_a f(\underline{v})$$

est bien définie.

3.2.4 Corollaire

Si f est différentiable en $\underline{a}$, alors ses dérivées partielles en $\underline{a}$ sont bien définies.

Preuve : au (vrai) tableau !

III. 2) Différentielle d'une fonction

3.2.5 Proposition

Si f est différentiable en $\underline{a}$, alors $d_a f$ est donnée par :

$$d_a f(\underline{h}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \, \partial_{x_i} f(\underline{a})$$

Preuve : au (vrai) tableau !

■

III. 2) Différentielle d'une fonction

3.2.5 Proposition

Si f est différentiable en $\underline{a}$, alors $d_{\underline{a}}f$ est donnée par :

$$d_{\underline{a}}f(\underline{h}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \, \partial_{x_i} f(\underline{a})$$

Preuve : au (vrai) tableau !

$\blacksquare$

Remarque :

Avec la différentielle, on a une approximation à l'ordre 1 de la fonction f :

$$f(\underline{a}+\underline{h}) \sim f(\underline{a}) + \sum_{i=1}^{n} h_i \, \partial_{x_i} f(\underline{a}) \qquad \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \| \underline{h} \| \sim 0$$

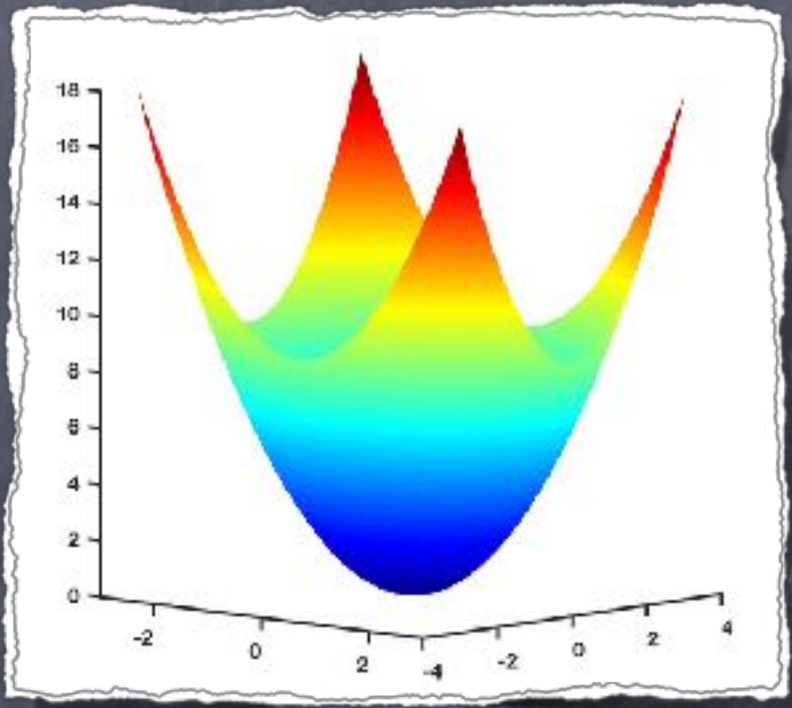
III. 2) Différentielle d'une fonction

Exemples :

- $f(x,y) = x^2 + y^2$

Montrer que f est différentiable en (1,1)

(détails au tableau)



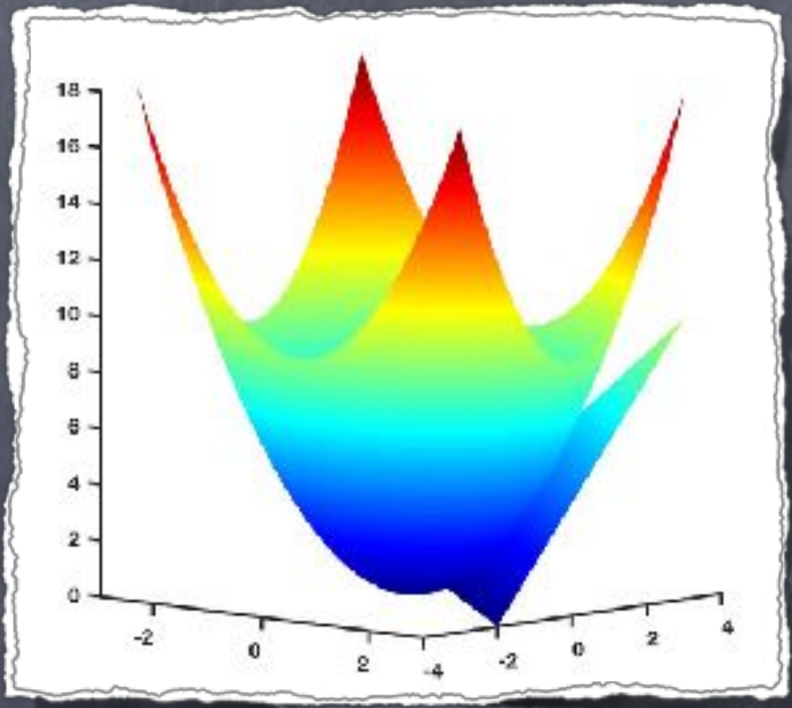
III. 2) Différentielle d'une fonction

Exemples :

- $f(x,y) = x^2 + y^2$

Montrer que f est différentiable en (1,1)

(détails au tableau)



Remarque :

Grâce à la différentielle, on peut obtenir l'équation du plan tangent approchant f au point (1,1) :

$$g(\underline{x}) = f(\underline{a}) + d_{\underline{a}}f(\underline{x} - \underline{a})$$

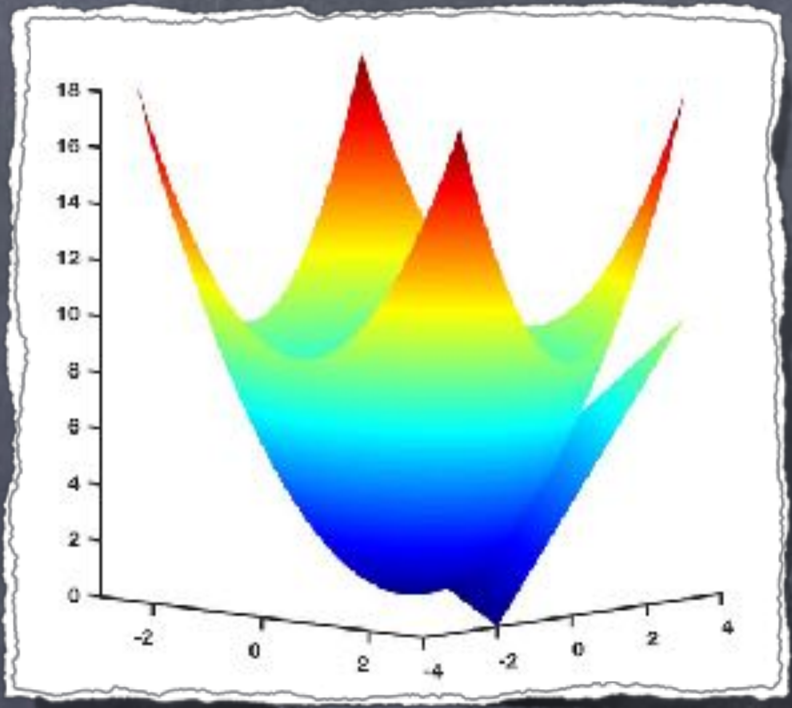
III. 2) Différentielle d'une fonction

Exemples :

- $f(x,y) = x^2 + y^2$

Montrer que f est différentiable en (1,1)

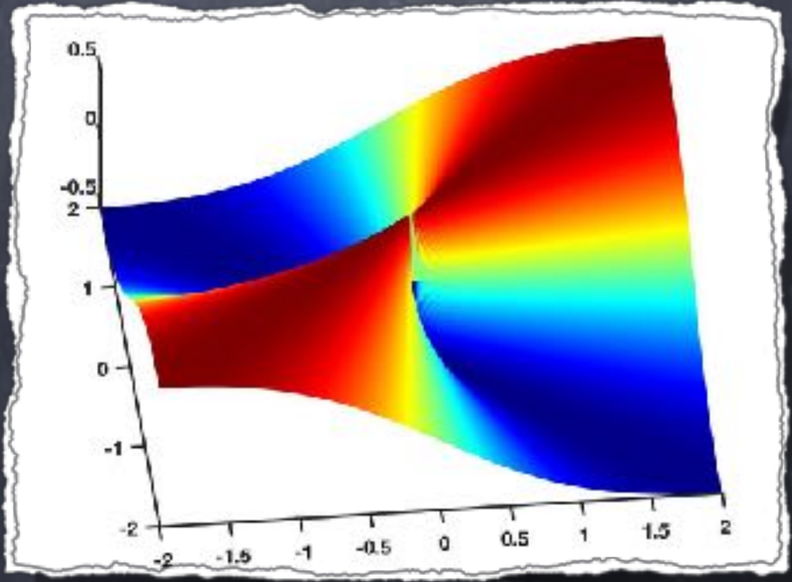
(détails au tableau)



- $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas différentiable en (0,0)

(détails au tableau)



III. 3) Fonctions C^1

3.3.1 Définition

On dit que f est de classe C^1 sur Ω si ses dérivées partielles existent et sont continues sur Ω.

III. 3) Fonctions C^1

3.3.1 Définition

On dit que f est de classe C^1 sur Ω si ses dérivées partielles existent et sont continues sur Ω.

3.2.4 Théorème (admis)

Si f est de classe C^1 alors elle est différentiable sur Ω.

Le principal intérêt de cette classe de fonction et qu'en général, il sera plus simple de montrer qu'une fonction est C^1 plutôt que différentiable.

III. 3) Fonctions C^1

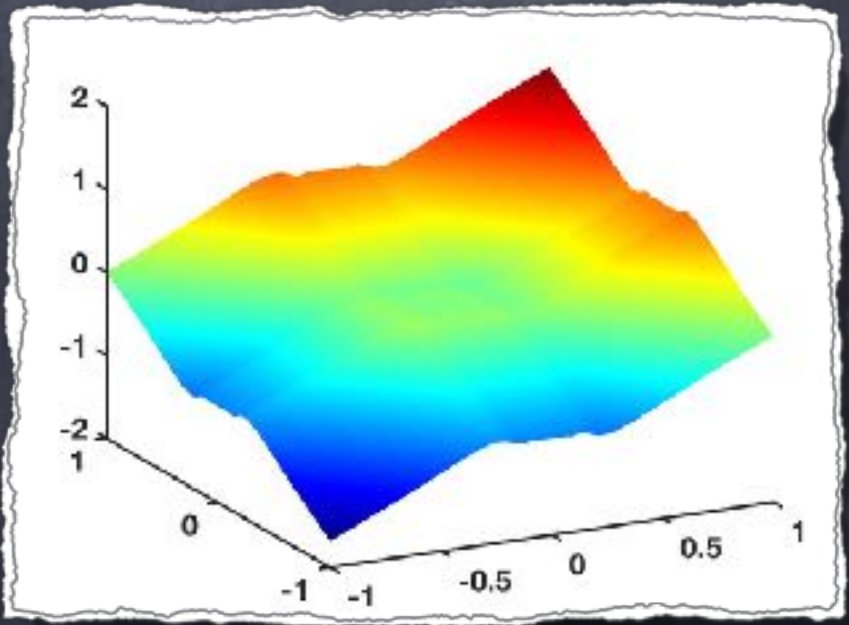
Remarque :

Une fonction peut être différentiable sans être C^1

Exemple (admis) :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) + y^2 \sin(\frac{1}{y}) & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } y = 0 \\ y^2 \sin(\frac{1}{y}) & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est différentiable sans être C^1



Au programme (chapitre 3) :

Objectif :

Étudier les fonctions de plusieurs variables scalaires

$$f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Plan :

I. Un peu de topologie sur $\mathbb{R}^n$

II. Limite et continuité

III. Dérivées partielles, différentielle et fonctions C^1

IV. Ma première équation aux dérivées partielles

IV. Ma première EDP

4 Définition

On appelle équations aux dérivées partielles (ou EDP) une équation dont la solution est une fonction f de plusieurs variables et impliquant les dérivées partielles de f.

IV. Ma première EDP

4 Définition

On appelle équations aux dérivées partielles (ou EDP) une équation dont la solution est une fonction f de plusieurs variables et impliquant les dérivées partielles de f.

Exemple : $\partial_t p(x,t) + c\,\partial_x p(x,t) = 0$ définie $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

IV. Ma première EDP

4 Définition

On appelle équations aux dérivées partielles (ou EDP) une équation dont la solution est une fonction f de plusieurs variables et impliquant les dérivées partielles de f.

Exemple : $\partial_t p(x,t) + c\,\partial_x p(x,t) = 0$ définie $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

L'étude de ces équations est un (très) vaste domaine de recherche qui dépasse de loin le but de ce cours. Néanmoins, il est intéressant de savoir que les EDP modélisent beaucoup de phénomènes physiques et se retrouvent dans de nombreuses applications….

IV. Ma première EDP

4 Définition

On appelle équations aux dérivées partielles (ou EDP) une équation dont la solution est une fonction f de plusieurs variables et impliquant les dérivées partielles de f.

Exemple : $\partial_t p(x,t) + c\,\partial_x p(x,t) = 0$ définie $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

L'exemple ci-dessus s'appelle l'équation de transport.

Pour cette équation, on vérifie aisément que les solutions générales sont de la forme : $p(x,t) = p(x - ct)$

IV. Ma première EDP

4 Définition

On appelle équations aux dérivées partielles (ou EDP) une équation dont la solution est une fonction f de plusieurs variables et impliquant les dérivées partielles de f.

Exemple : $\partial_t p(x,t) + c\,\partial_x p(x,t) = 0$ définie $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

L'exemple ci-dessus s'appelle l'équation de transport.

Pour cette équation, on vérifie aisément que les solutions générales sont de la forme : $p(x,t) = p(x-ct)$

En ajoutant une condition initiale $p(x, t=0) = p_0(x)$ on obtient un problème de Cauchy ayant comme solution

$$p(x,t) = p_0(x-ct)$$

Plan détaillé du chapitre 3

I. Un peu de topologie sur $\mathbb{R}^n$

II. Limite et continuité

III. Dérivées partielles, différentielle et fonctions C^1

1) Définition des dérivées partielles

2) Différentielle d'une fonction

3) Fonctions C^1

IV. Ma première équation aux dérivées partielles