M5 : Introduction aux équations différentielles et aux fonctions de plusieurs variables réelles

Chapitre 2 :

EDO linéaires d'ordre 2

Cours 3-4

Année 2018 - 2019

Contact : A. Tonnoir

antoine.tonnoir@insa-rouen.fr

Dans l'épisode précédent ...

Au chapitre précédent, nous avons étudié les EDO linéaire d'ordre 1

(E) $\qquad a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Plan :

I. Introduction

II. Cas des EDO linéaires d'ordre 1 sous forme normale

1) Théorème de superposition

2) Cas particulier $a(t) = a$

3) Cas général $a(t)$ non constant

III. Cas des EDO linéaires d'ordre 1 sous forme générale

Au programme (chapitre 2) :

Objectif :

Étudier les EDO linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$(E) \qquad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Plan :

I. Théorème de superposition

II. Solution générale du problème homogène

III. Déterminer une solution particulière

IV. Quelques mots sur le cas de coefficients non constants

I. Théorème de superposition

Nous nous intéressons à l'EDO :

(E) $\quad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Remarque :

On supposera que $a_2 \neq 0$ car sinon l'EDO n'est pas d'ordre 2

On rappelle que la fonction $y(t)$ est solution de (E) ssi :

- $y(t)$ satisfait (E) pour tout $t \in I$
- $y(t)$ est de classe C^2 sur I

I. Théorème de superposition

Nous nous intéressons à l'EDO :

(E) $\qquad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

1.1 Théorème (de superposition)

Considérons $y_1(t)$ une solution de

(E_1) $\qquad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f_1(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

et $y_2(t)$ une solution de

(E_2) $\qquad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f_2(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

où $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, alors :

1. $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ est solution de (E)

2. Pour $y_1(t)$ une solution particulière de (E_1), toutes sol. $y(t)$ de (E) est de la forme $y_1(t) + y_2(t)$ où $y_2(t)$ vérifie (E_2)

I. Théorème de superposition

Preuve : au (vrai) tableau !

I. Théorème de superposition

Nous nous intéressons à l'EDO :

(E) $$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

1.2 Corollaire (du Thm. de superposition)

Toute solution $y(t)$ de (E) est de la forme :

$$y(t) = y_0(t) + y_H(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

où $y_0(t)$ est une solution particulière de (E)

et $y_H(t)$ est solution de l'équation homogène :

(E_H) $$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Preuve : Application directe du résultat précédent avec

$$f_1(t) = f(t) \text{ et } f_2(t) = 0$$

∎

I. Théorème de superposition

Nous nous intéressons à l'EDO :

(E) $$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

1.2 Corollaire (du Thm. de superposition)

Toute solution $y(t)$ de (E) est de la forme :

$$y(t) = y_0(t) + y_H(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

où $y_0(t)$ est une solution particulière de (E)

et $y_H(t)$ est solution de l'équation homogène :

(E_H) $$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Comme pour les EDO d'ordre 1, ayant une solution particulière de (E), on déterminera toute solution $y(t)$ de (E) grâce à la résolution du problème homogène.

Au programme (chapitre 2) :

Objectif :

Étudier les EDO linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

(E) $\qquad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Plan :

I. Théorème de superposition

II. Solution générale du problème homogène

1) Solutions complexes de l'équation homogène
2) Solutions réelles de l'équation homogène

III. Déterminer une solution particulière

IV. Quelques mots sur le cas de coefficients non constants

II. 1) Solutions complexes de (E_H)

Considérons l'équation homogène :

(E_H) $$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

où les coefficients $(a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{C}$

On cherche donc une fonction : $y(t) : t \in I \to y(t) \in \mathbb{C}$

II. 1) Solutions complexes de (E_H)

Considérons l'équation homogène :

(E_H) $\quad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

où les coefficients $(a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{C}$

On cherche donc une fonction : $y(t) : t \in I \to y(t) \in \mathbb{C}$

2.1.1 Définition

On appelle polynôme caractéristique associé à l'équation homogène (E_H) le polynôme défini par

$$P(r) = a_2 r^2 + a_1 r + a_0 \quad \text{où } r \in \mathbb{C}$$

II. 1) Solutions complexes de (E_H)

Considérons l'équation homogène :

(E_H) $\quad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

où les coefficients $(a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{C}$

On cherche donc une fonction : $y(t) : t \in I \to y(t) \in \mathbb{C}$

2.1.1 Définition

On appelle polynôme caractéristique associé à l'équation homogène (E_H) le polynôme défini par

$$P(r) = a_2 r^2 + a_1 r + a_0 \quad \text{où } r \in \mathbb{C}$$

Intuitivement, on comprend que ce polynôme vient de la recherche de solution de (E_H) de la forme $y(t) = e^{rt}$ qui impose $P(r) = 0$ pour avoir $y(t)$ solution de (E_H)

II. 1) Solutions complexes de (E_H)

Considérons l'équation homogène :

(E_H) $\quad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

2.1.2 Théorème (sol. homogènes complexes)

Soit $\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2$. On note r_1 et r_2 les racines du polynôme caractéristique $P(r) = a_2r^2 + a_1r + a_0$

- Si $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow r_1 \neq r_2$ alors les solutions homogènes de (E_H) sont de la forme : $y_H(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}$
- Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2$ alors les solutions homogènes de (E_H) sont de la forme : $y_H(t) = (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{r_1 t}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}$

Preuve : au (vrai) tableau ! ∎

II. 1) Solutions complexes de (E_H)

Considérons l'équation homogène :

(E_H) $\quad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

2.1.2 Théorème (sol. homogènes complexes)

Soit $\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2$. On note r_1 et r_2 les racines du polynôme caractéristique $P(r) = a_2r^2 + a_1r + a_0$

- Si $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow r_1 \neq r_2$ alors les solutions homogènes de (E_H) sont de la forme : $y_H(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}$
- Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2$ alors les solutions homogènes de (E_H) sont de la forme : $y_H(t) = (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{r_1 t}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}$

Exemple : $y''(t) + y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Déterminer l'ensemble des solutions complexes.

II. 1) Solutions complexes de (E_H)

Considérons l'équation homogène :

(E_H) $\qquad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

2.1.2 Théorème (sol. homogènes complexes)

Soit $\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2$. On note r_1 et r_2 les racines du polynôme caractéristique $P(r) = a_2r^2 + a_1r + a_0$

- Si $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow r_1 \neq r_2$ alors les solutions homogènes de (E_H) sont de la forme : $y_H(t) = \lambda_1 e^{r_1t} + \lambda_2 e^{r_2t}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}$
- Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2$ alors les solutions homogènes de (E_H) sont de la forme : $y_H(t) = (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{r_1t}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}$

Remarque : L'ensemble des solutions complexes de (E_H) forme un espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) de dimension 2.

II. 2) Solutions réelles de (E_H)

Considérons l'équation homogène :

(E_H) $$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

où les coefficients $(a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{R}$

II. 2) Solutions réelles de (E_H)

Considérons l'équation homogène :

(E_H) $\quad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

2.2.1 Théorème (sol. homogènes réelles)

Soit $\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2$. On note r_1 et r_2 les racines du polynôme caractéristique $P(r) = a_2r^2 + a_1r + a_0$

- Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow r_1 \in \mathbb{R} \neq r_2 \in \mathbb{R}$ alors les solutions homogènes sont de la forme : $y_H(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}$
- Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$ alors les solutions homogènes sont de la forme : $y_H(t) = (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{r_1 t}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}$
- Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow r_1 = \overline{r_2} \in \mathbb{C}$ alors les solutions homogènes sont de la forme : $y_H(t) = e^{\alpha t}(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t))$ où $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}$ et $r_1 = \alpha + i\beta$

II. 2) Solutions réelles de (E_H)

Preuve :

- Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow r_1 \in \mathbb{R} \neq r_2 \in \mathbb{R}$

  On procède exactement comme pour le cas complexe.

$\blacksquare$

II. 2) Solutions réelles de (E_H)

Preuve :

- Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow r_1 \in \mathbb{R} \neq r_2 \in \mathbb{R}$

  On procède exactement comme pour le cas complexe.

- Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$

  Idem

$\blacksquare$

II. 2) Solutions réelles de (E_H)

Preuve :

- Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow r_1 \in \mathbb{R} \neq r_2 \in \mathbb{R}$

  On procède exactement comme pour le cas complexe.

- Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$

  Idem

- Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow r_1 = \overline{r_2} \in \mathbb{C}$

  Détails au (vrai) tableau

$\blacksquare$

II. 2) Solutions réelles de (E_H)

2.2.1 Théorème (sol. homogènes réelles)

Soit $\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2$. On note r_1 et r_2 les racines du polynôme caractéristique $P(r) = a_2r^2 + a_1r + a_0$

- Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow r_1 \in \mathbb{R} \neq r_2 \in \mathbb{R}$ alors les solutions homogènes sont de la forme : $y_H(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}$
- Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$ alors les solutions homogènes sont de la forme : $y_H(t) = (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{r_1 t}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}$
- Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow r_1 = \overline{r_2} \in \mathbb{C}$ alors les solutions homogènes sont de la forme : $y_H(t) = e^{\alpha t}(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t))$ où $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}$ et $r_1 = \alpha + i\beta$

Remarque : L'ensemble des solutions réelles de (E_H) forme un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) de dimension 2.

II. 2) Solutions réelles de (E_H)

Considérons l'équation homogène :

(E_H) $$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Exemples :

- $y''(t) + \omega^2 y(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

Déterminer l'ensemble des solutions réelles

Solutions : $y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \qquad (A, B) \in \mathbb{R}$

II. 2) Solutions réelles de (E_H)

Considérons l'équation homogène :

(E_H) $\quad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Exemples :

- $y''(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Déterminer l'ensemble des solutions réelles

Solutions : $y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \quad (A, B) \in \mathbb{R}$

- $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Déterminer l'ensemble des solutions réelles

Solutions : $y(t) = Ae^{t} + Be^{2t} \quad (A, B) \in \mathbb{R}$

Au programme (chapitre 2) :

Objectif :

Étudier les EDO linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$(E) \qquad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Plan :

I. Théorème de superposition

II. Solution générale du problème homogène

III. Déterminer une solution particulière

1) Cas particulier de fonction f(t)
2) Variation de la constante ?
3) Problème de Cauchy

IV. Quelques mots sur le cas de coefficients non constants

III. 1) Cas particulier de f(t)

Nous nous intéressons à l'EDO : $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$

(E) $\quad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

III. 1) Cas particulier de $f(t)$

Nous nous intéressons à l'EDO : $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$

(E) $a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Solution particulière si :

- $f(t) = e^{kt} P(t)$ où $P(t)$ est un polynôme et $k \in \mathbb{K}$

  Une solution particulière est donnée par $y_0(t) = Q(t) e^{kt}$ où $Q(t)$ est un polynôme vérifiant

  $$a_2 Q''(t) + (a_1 + 2k a_2) Q'(t) + (a_2 k^2 + a_1 k + a_0) Q(t) = P(t)$$

  (détails au tableau)

III. 1) Cas particulier de f(t)

Nous nous intéressons à l'EDO : $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$

(E) $\quad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Solution particulière si :

- $f(t) = e^{kt}P(t)$ où $P(t)$ est un polynôme et $k \in \mathbb{K}$

  Une solution particulière est donnée par $y_0(t) = Q(t)e^{kt}$ où $Q(t)$ est un polynôme vérifiant

  $$a_2 Q''(t) + (a_1 + 2ka_2)Q'(t) + (a_2 k^2 + a_1 k + a_0)Q(t) = P(t)$$

  (détails au tableau)

Exemple : $y''(t) - y(t) = t^2 + 2 \quad \forall t \in I = \mathbb{R}$

Déterminer une solution particulière $y_0(t)$

III. 1) Cas particulier de f(t)

Nous nous intéressons à l'EDO :

(E) $\qquad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Solution particulière si :

- $f(t) = e^{kt}P(t)$ où $P(t)$ est un polynôme et $k \in \mathbb{K}$

  Solution particulière : $y_0(t) = Q(t)e^{kt}$

  où : $a_2 Q''(t) + (a_1 + 2ka_2)Q'(t) + (a_2k^2 + a_1k + a_0)Q(t) = P(t)$

- $f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ où $(\omega, A, B) \in \mathbb{R}$

  Solution particulière : $y_0(t) = \mathrm{Re}\left(Q(t)e^{i\omega t}\right)$

  (détails au tableau)

III. 1) Cas particulier de f(t)

Nous nous intéressons à l'EDO :

(E) $\quad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Solution particulière si :

- $f(t) = e^{kt}P(t)$ où $P(t)$ est un polynôme et $k \in \mathbb{K}$

  Solution particulière : $y_0(t) = Q(t)e^{kt}$

  où : $a_2 Q''(t) + (a_1 + 2ka_2)Q'(t) + (a_2k^2 + a_1k + a_0)Q(t) = P(t)$

- $f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ où $(\omega, A, B) \in \mathbb{R}$

  Solution particulière : $y_0(t) = \mathrm{Re}\left(Q(t)e^{i\omega t}\right)$

Exemple : $\quad y''(t) + y(t) = 2\cos(t) \qquad \forall t \in I = \mathbb{R}$

Déterminer une solution particulière $y_0(t)$

III. 1) Cas particulier de f(t)

Nous nous intéressons à l'EDO :

(E) $$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Solution particulière si :

- $f(t) = e^{kt}P(t)$ où $P(t)$ est un polynôme et $k \in \mathbb{K}$

  Solution particulière : $y_0(t) = Q(t)e^{kt}$

  où : $a_2 Q''(t) + (a_1 + 2ka_2)Q'(t) + (a_2k^2 + a_1k + a_0)Q(t) = P(t)$

- $f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ où $(\omega, A, B) \in \mathbb{R}$

  Solution particulière : $y_0(t) = \mathrm{Re}\left(Q(t)e^{i\omega t}\right)$

- $f(t)$ est telle que on peut déterminer une solution particulière « évidente »

III. 2) Variation de la constante ?

Nous nous intéressons à l'EDO :

(E) $$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Quid de la méthode de la variation de la constante ?

Si $y_H(t)$ est une solution de l'équation homogène, nous avons vu qu'une idée est de chercher une solution particulière de la forme $y_0(t) = \lambda(t) y_H(t)$

III. 2) Variation de la constante ?

Nous nous intéressons à l'EDO :

(E) $$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Quid de la méthode de la variation de la constante ?

Si $y_H(t)$ est une solution de l'équation homogène, nous avons vu qu'une idée est de chercher une solution particulière de la forme $y_0(t) = \lambda(t) y_H(t)$

Dans ce cas, pour que $y_0(t)$ vérifie (E), on montre que $\lambda(t)$ doit satisfaire l'EDO suivante :

$$a_2 y_H(t) \lambda''(t) + (2a_2 y_H'(t) + a_1 y_H(t))\lambda'(t) = f(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

III. 2) Variation de la constante ?

Nous nous intéressons à l'EDO :

(E) $\qquad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Quid de la méthode de la variation de la constante ?

Si $y_H(t)$ est une solution de l'équation homogène, nous avons vu qu'une idée est de chercher une solution particulière de la forme $y_0(t) = \lambda(t) y_H(t)$

Dans ce cas, pour que $y_0(t)$ vérifie (E), on montre que $\lambda(t)$ doit satisfaire l'EDO suivante :

$$a_2 y_H(t)\lambda''(t) + (2a_2 y_H'(t) + a_1 y_H(t))\lambda'(t) = f(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

soit en posant $\mu(t) = \lambda'(t)$ l'EDO d'ordre 1 :

$$a_2 y_H(t)\mu'(t) + (2a_2 y_H'(t) + a_1 y_H(t))\mu(t) = f(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

III. 2) Variation de la constante ?

Nous nous intéressons à l'EDO :

(E) $\quad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Quid de la méthode de la variation de la constante ?

Si $y_H(t)$ est une solution de l'équation homogène, alors $y_0(t) = \lambda(t) y_H(t)$ est une solution particulière de (E) si $\mu(t) = \lambda'(t)$ vérifie l'EDO d'ordre 1 :

(O) $\quad a_2 y_H(t)\mu'(t) + (2a_2 y_H'(t) + a_1 y_H(t))\mu(t) = f(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

3.2.1 Proposition (admis)

L'EDO (O) admet une solution, et par conséquent, on déduit que (E) admet au moins une solution.

III. 3) Le problème de Cauchy

Nous nous intéressons à l'EDO :

(E) $\quad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

3.3.1 Théorème (problème de Cauchy linéaire)

Le problème (dit de Cauchy), trouver $y(t)$ solution de (E) telle que $y(t_0) = C_0$ et $y'(t_0) = C_0'$, où $t_0 \in I$ admet une unique solution.

Preuve : au (vrai) tableau

$\blacksquare$

III. 3) Le problème de Cauchy

Nous nous intéressons à l'EDO :

(E) $\qquad a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

3.3.1 Théorème (problème de Cauchy linéaire)

Le problème (dit de Cauchy), trouver $y(t)$ solution de (E) telle que $y(t_0) = C_0$ et $y'(t_0) = C_0'$, où $t_0 \in I$ admet une unique solution.

Remarque :

À la différence des EDO d'ordre 1, nous avons besoin ici de deux conditions pour déterminer de manière unique la solution. Ceci vient du fait que l'ensemble des solutions du problème homogène est un espace vectoriel de dimension 2.

III. 3) Le problème de Cauchy

Exemple :

Déterminer la solution du problème de Cauchy :

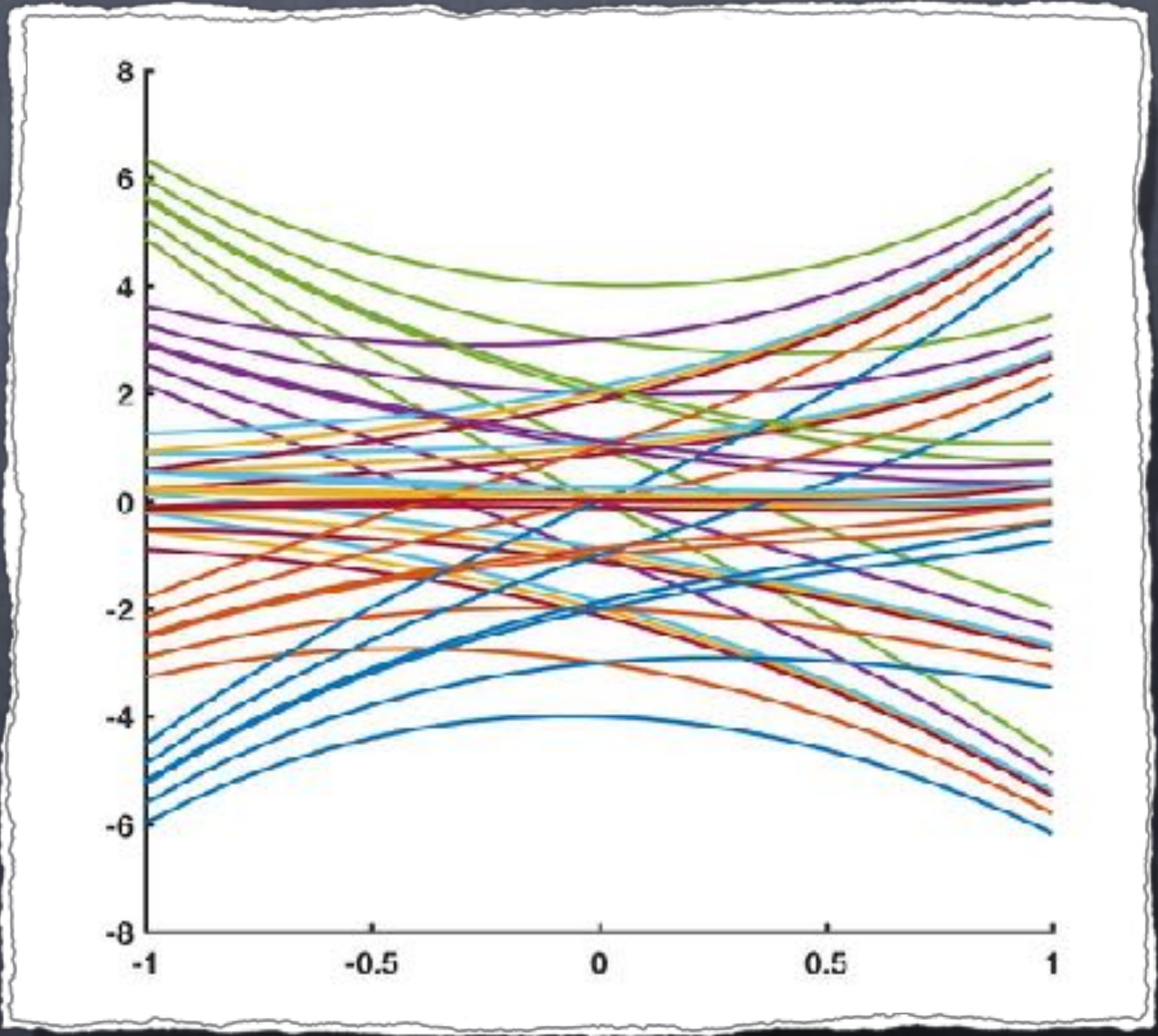
(E) $\quad y''(t) - y(t) = te^t \quad \forall t \in I = \mathbb{R}$

où $y(0) = y'(0) = 0$

Solutions générales de (E) :

$$y(t) = \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{4}\right)e^t + \lambda e^t + \mu e^{-t}$$

$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$



III. 3) Le problème de Cauchy

Exemple :

Déterminer la solution du problème de Cauchy :

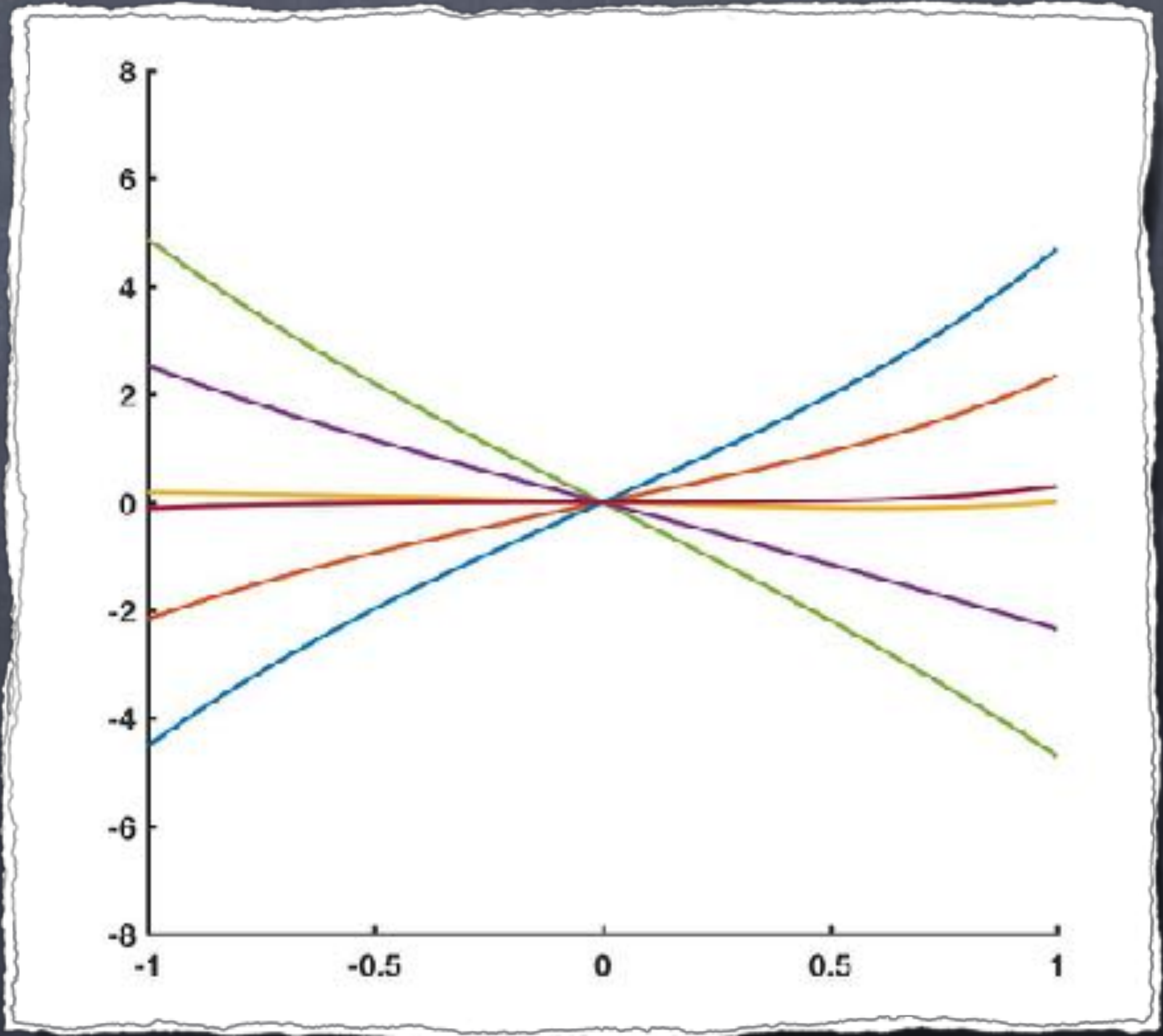
(E) $y''(t) - y(t) = te^t$ $\quad \forall t \in I = \mathbb{R}$

où $y(0) = y'(0) = 0$

Solutions vérifiant : $y(0) = 0$

$$y(t) = \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{4}\right)e^t + \lambda e^t - \lambda e^{-t}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$



III. 3) Le problème de Cauchy

Exemple :

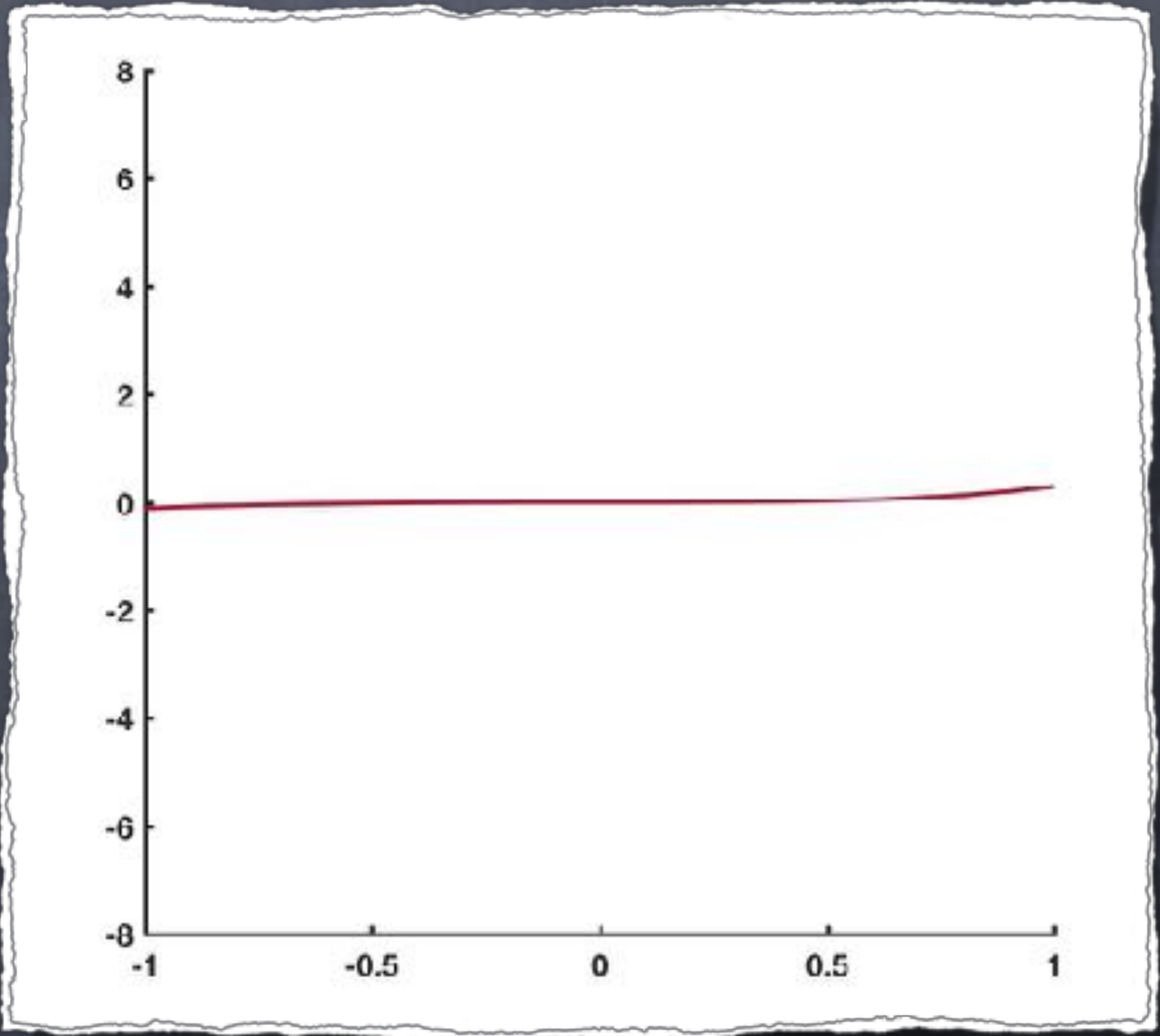
Déterminer la solution du problème de Cauchy :

(E) $\quad y''(t) - y(t) = te^t \qquad \forall t \in I = \mathbb{R}$

où $y(0) = y'(0) = 0$

Unique solution du problème :

$$y(t) = \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{4}\right)e^t + \frac{1}{8}e^t - \frac{1}{8}e^{-t}$$



vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$

Au programme (chapitre 2) :

Objectif :

Étudier les EDO linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

(E) $$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Plan :

I. Théorème de superposition

II. Solution générale du problème homogène

III. Déterminer une solution particulière

IV. Quelques mots sur le cas de coefficients non constants

IV. Cas de coefficients non constants

Considérons l'EDO suivante :

(E) $\quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

où on rappelle que $a(t)$, $b(t)$ et $f(t)$ sont trois fonctions continues sur I.

IV. Cas de coefficients non constants

Considérons l'EDO suivante :

(E) $\quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

4.1 Théorème (de superposition, admis)

Considérons $y_1(t)$ une solution de

(E_1) $\quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f_1(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

et $y_2(t)$ une solution de

(E_2) $\quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f_2(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

où $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, alors :

1. $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ est solution de (E)

2. Pour $y_1(t)$ une solution particulière de (E_1), toutes sol. $y(t)$ de (E) est de la forme $y_1(t) + y_2(t)$ où $y_2(t)$ vérifie (E_2)

IV. Cas de coefficients non constants

Considérons l'EDO suivante :

(E) $\quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

4.2 Corollaire (du Thm. de superposition)

Toute solution $y(t)$ de (E) est de la forme :

$$y(t) = y_0(t) + y_H(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

où $y_0(t)$ est une solution particulière de (E)

et $y_H(t)$ est solution de l'équation homogène :

(E_H) $\quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Comme précédemment, ayant une solution particulière de (E), on pourra déterminer toute solution $y(t)$ de (E) grâce à la résolution du problème homogène, MAIS...

IV. Cas de coefficients non constants

Considérons l'EDO suivante :

(E) $\quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Dans ce cas, il n'existe pas de méthode générale pour déterminer les solutions du problème homogène :

$(E_H) \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

IV. Cas de coefficients non constants

Considérons l'EDO suivante :

(E) $$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

4.3 Théorème (admis)

L'ensemble des solutions du problème homogène :

(E_H) $$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

forme un espace vectoriel de dimension 2.

IV. Cas de coefficients non constants

Considérons l'EDO suivante :

(E) $\quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

4.3 Théorème (admis)

L'ensemble des solutions du problème homogène :

$(E_H) \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

forme un espace vectoriel de dimension 2.

Par conséquent, si $y_H^1(t)$ et $y_H^2(t)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de (E_H), on déduit toutes les solutions de (E_H) ainsi : $y_H(t) = \lambda y_H^1(t) + \mu y_H^2(t)$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}$

Rappel (linéairement indépendant) (cf. cours M4) :

$\forall (A,B) \in \mathbb{K}, \quad A y_H^1(t) + B y_H^2(t) = 0 \iff A = B = 0$

IV. Cas de coefficients non constants

Considérons l'EDO suivante :

(E) $\quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

4.3 Théorème (admis)

L'ensemble des solutions du problème homogène :

$(E_H) \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

forme un espace vectoriel de dimension 2.

Par conséquent, si $y_H^1(t)$ et $y_H^2(t)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de (E_H), on déduit toutes les solutions de (E_H) ainsi : $y_H(t) = \lambda y_H^1(t) + \mu y_H^2(t)$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}$

L'objectif est donc de pouvoir déterminer 2 solutions linéairement indépendantes de (E_H)

IV. Cas de coefficients non constants

Considérons l'EDO suivante :

(E) $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

4.3 Théorème (admis)

L'ensemble des solutions du problème homogène :

(E_H) $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

forme un espace vectoriel de dimension 2.

4.4 Corollaire (admis)

Le problème de Cauchy trouver $y(t)$ solution de

(E) $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

et vérifiant $y(t_0) = C_0$ et $y'(t_0) = C'_0$ où $t_0 \in I$ admet une unique solution.

IV. Cas de coefficients non constants

Considérons l'EDO suivante :

(E) $\qquad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

4.4 Corollaire (admis)

Le problème de Cauchy trouver $y(t)$ solution de

(E) $\qquad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

et vérifiant $y(t_0) = C_0$ et $y'(t_0) = C_0'$ où $t_0 \in I$ admet une unique solution.

De manière générale, comme on ne sait a priori pas trouver « à la main » la solution du problème de Cauchy, on se tourne vers des méthodes dites numériques pour en calculer une approximation.
(voir cours de M10)

Plan détaillé chapitre 2

I. Théorème de superposition

II. Solution générale du problème homogène

1) Solutions complexes de l'équation homogène
2) Solutions réelles de l'équation homogène

III. Déterminer une solution particulière

1) Cas particulier de fonction $f(t)$
2) Variation de la constante ?
3) Problème de Cauchy

IV. Quelques mots sur le cas de coefficients non constants