M5 : Introduction aux équations différentielles et aux fonctions de plusieurs variables réelles

Chapitre 1 :

Équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre 1

Cours 1-2

Année 2018 - 2019

Contact : A. Tonnoir

antoine.tonnoir@insa-rouen.fr

Introduction : Quelques définitions

1.1 Définition

On appelle **équation différentielle ordinaire (ou EDO)** une équation impliquant une fonction inconnue $y(t)$ et ses dérivées.

Introduction : Quelques définitions

1.1 Définition

On appelle équation différentielle ordinaire (ou EDO) une équation impliquant une fonction inconnue $y(t)$ et ses dérivées. De manière générale, elle s'écrit sous la forme :

$$F(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

où :

- F est une fonction non indépendante de $y^{(n)}(t)$
- n est un entier indiquant l'ordre de l'EDO

Introduction : Quelques définitions

1.1 Définition

On appelle équation différentielle ordinaire (ou EDO) une équation impliquant une fonction inconnue $y(t)$ et ses dérivées. De manière générale, elle s'écrit sous la forme :

$$F(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

où :

- F est une fonction non indépendante de $y^{(n)}(t)$
- n est un entier indiquant l'ordre de l'EDO

On dit que $y(t)$ est solution de l'EDO si c'est une fonction n fois dérivable satisfaisant la relation ci-dessus.

Introduction : Quelques définitions

1.1 Définition

On appelle équation différentielle ordinaire (ou EDO) une équation impliquant une fonction inconnue $y(t)$ et ses dérivées. De manière générale, elle s'écrit sous la forme :

$$F(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

où :
- F est une fonction non indépendante de $y^{(n)}(t)$
- n est un entier indiquant l'ordre de l'EDO

On dit que $y(t)$ est solution de l'EDO si c'est une fonction n fois dérivable satisfaisant la relation ci-dessus.

Exemple : $y''(t) + \sin(y(t)) - t = 0$ est une EDO d'ordre 2.

Introduction : Quelques définitions

1.1 Définition

On appelle équation différentielle ordinaire (ou EDO) une équation impliquant une fonction inconnue $y(t)$ et ses dérivées. De manière générale, elle s'écrit sous la forme :

$$F(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

où :
- F est une fonction non indépendante de $y^{(n)}(t)$
- n est un entier indiquant l'ordre de l'EDO

1.2 Définition

On dit que l'EDO est autonome si la fonction F ne dépend pas de t, c'est à dire si l'EDO s'écrit :

$$F(y(t), y'(t), \cdots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Introduction : Quelques définitions

1.3 Définition

On dit que l'EDO est sous forme normale si elle s'écrit

$$y^{(n)}(t) = G(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(n-1)}(t)) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Introduction : Quelques définitions

1.3 Définition

On dit que l'EDO est sous forme normale si elle s'écrit

$$y^{(n)}(t) = G(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(n-1)}(t)) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Exemples : $y''(t) + \sin(y(t)) - t = 0 \Leftrightarrow y''(t) = \underline{t} - \sin(y(t))$

est une EDO d'ordre 2 sous forme normale non autonome.

Introduction : Quelques définitions

1.3 Définition

On dit que l'EDO est sous forme normale si elle s'écrit

$$y^{(n)}(t) = G(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(n-1)}(t)) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Exemples : $y''(t) + \sin(y(t)) - t = 0 \Leftrightarrow y''(t) = t - \sin(y(t))$

est une EDO d'ordre 2 sous forme normale non autonome.

En revanche, l'EDO : $y^{(3)}(t) = y^2(t) + y'(t)$

est une EDO d'ordre 3 sous forme normale autonome.

N.B. : $y^{(i)}(t)$ est la dérivée i-ème de $y(t)$

$y^i(t)$ est la fonction $y(t)$ à la puissance i

Introduction : Quelques définitions

1.3 Définition

On dit que l'EDO est sous forme normale si elle s'écrit

$$y^{(n)}(t) = G(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(n-1)}(t)) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

1.4 Définition

On dit qu'une EDO est linéaire si elle s'écrit sous la forme :

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t)$$

où $f(t)$ et les $a_i(t)$ sont des fonctions continues de t

Exemple : $y''(t) + t^2 y(t) - t = 0$ est une EDO d'ordre 2 linéaire sous forme normale non autonome.

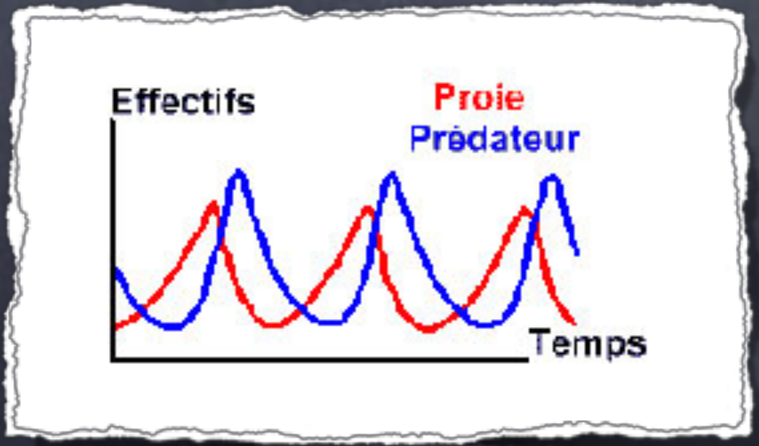
Où trouve-t-on des EDO ?

Les EDO se retrouvent dans divers domaines :

En biologie :

$y'(t) = ay(t) - by^2(t)$ (modèle de Verhulst)

Évolution d'une population de bactérie dans un environnement à ressources limitées



(modèle de Lotka-Volterra)

$$x'(t) = x(t)\big(a - by(t)\big)$$
$$y'(t) = -y(t)\,(c - dx(t))$$

Où trouve-t-on des EDO ?

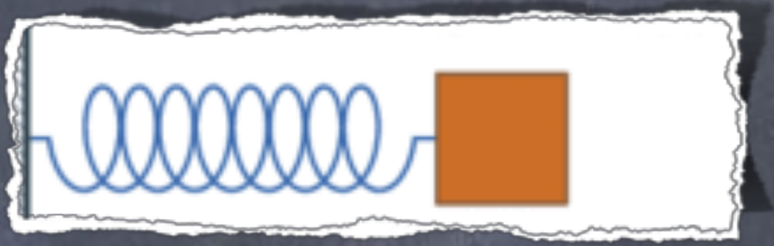
Les EDO se retrouvent dans divers domaines :

En biologie …

En Physique :

$x''(t) = -k(x(t) - x_0)$

(oscillation d'un ressort)



$mx''(t) = \sum F(t, x(t))$

(deuxième loi de Newton)

Où trouve-t-on des EDO ?

Les EDO se retrouvent dans divers domaines :

En biologie …

En Physique …

(électricité, radioactivité, thermodynamique …)

ou encore dans des domaines comme l'économie …

… et bien sur à votre examen !

Au programme (chapitre 1) :

Objectif :

Étudier les EDO linéaire d'ordre 1

$$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Plan :

I. Introduction

II. Cas des EDO linéaires d'ordre 1 sous forme normale

III. Cas des EDO linéaires d'ordre 1 sous forme générale

Au programme (chapitre 1) :

Objectif :

Étudier les EDO linéaire d'ordre 1

$$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Plan :

I. Introduction

II. Cas des EDO linéaires d'ordre 1 sous forme normale

1) Théorème de superposition
2) Cas particulier $a(t) = a$
3) Cas général $a(t)$ non constant

III. Cas des EDO linéaires d'ordre 1 sous forme générale

II. Remarque préliminaire

Mettre sous forme normale

Si dans l'EDO :

(E) $\quad a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

nous avons $\forall t \in I,\ a_1(t) \neq 0$ alors (E) peut se réécrire :

(N) $\quad y'(t) + \dfrac{a_0(t)}{a_1(t)}y(t) = \dfrac{f(t)}{a_1(t)} \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

II. Remarque préliminaire

Mettre sous forme normale

Si dans l'EDO :

$$(E) \qquad a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

nous avons $\forall t \in I,\ a_1(t) \neq 0$ alors (E) peut se réécrire :

$$(N) \qquad y'(t) + \frac{a_0(t)}{a_1(t)}y(t) = \frac{f(t)}{a_1(t)} \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad y'(t) + a(t)y(t) = g(t)$$

où $a(t) = \dfrac{a_0(t)}{a_1(t)}$ et $g(t) = \dfrac{f(t)}{a_1(t)}$

On peut donc dans ce cas toujours se ramener à la forme normale

II. 1) Théorème de superposition

Nous nous intéressons à l'EDO (sous forme normale) :

(N) $\qquad y'(t) + a(t)y(t) = g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

2.1.1 Théorème (de superposition)

Considérons $y_1(t)$ une solution de

$(N_1) \qquad y'(t) + a(t)y(t) = g_1(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

et $y_2(t)$ une solution de

$(N_2) \qquad y'(t) + a(t)y(t) = g_2(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

où $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, alors :

1. $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ est solution de (N)

2. Pour $y_1(t)$ une solution particulière de (N_1), toutes sol. $y(t)$ de (N) est de la forme $y_1(t) + y_2(t)$ où $y_2(t)$ vérifie (N_2)

II. 1) Théorème de superposition

Preuve : au (vrai) tableau !

■

II. 1) Théorème de superposition

Nous nous intéressons à l'EDO (sous forme normale) :

(N) $$y'(t) + a(t)y(t) = g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

2.1.2 Corollaire (du Thm. de superposition)

Toute solution $y(t)$ de (N) est de la forme :

$$y(t) = y_0(t) + y_H(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

où $y_0(t)$ est une solution particulière de (N)

et $y_H(t)$ est solution de l'équation homogène :

(N_H) $$y'(t) + a(t)y(t) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Preuve : Application directe du résultat précédent avec

$$g_1(t) = g(t) \text{ et } g_2(t) = 0$$

∎

II. 1) Théorème de superposition

Nous nous intéressons à l'EDO (sous forme normale) :

(N) $$y'(t) + a(t)y(t) = g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

2.1.2 Corollaire (du Thm. de superposition)

Toute solution $y(t)$ de (N) est de la forme :

$$y(t) = y_0(t) + y_H(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

où $y_0(t)$ est une solution particulière de (N)

et $y_H(t)$ est solution de l'équation homogène :

(N_H) $$y'(t) + a(t)y(t) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Autrement dit, ayant une solution particulière de (N), on détermine toute solution $y(t)$ de (N) grâce à la résolution du problème homogène (N_H)

II. 2) Cas particulier $a(t) = a$

Plaçons nous dans le cas particulier $a(t) = a$ (constante)

(N) $\quad y'(t) + a y(t) = g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

2.2.1 Proposition :

Toute solution $y_H(t)$ du problème homogène :

$(N_H) \quad y'(t) + a y(t) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

est de la forme : $y_H(t) = \lambda e^{-at}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

et cet ensemble de solution forme un espace vectoriel de dimension 1 (c.f. cours de M4)

Preuve : au (vrai) tableau !

∎

II. 2) Cas particulier $a(t) = a$

Plaçons nous dans le cas particulier $a(t) = a$ (constante)

(N) $\quad y'(t) + ay(t) = g(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

2.2.1 Proposition :

Toute solution $y_H(t)$ du problème homogène :

(N_H) $\quad y'(t) + ay(t) = 0 \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

est de la forme : $y_H(t) = \lambda e^{-at}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

et cet ensemble de solution forme un espace vectoriel de dimension 1 (c.f. cours de M4)

Il nous reste donc à voir comment déterminer une solution particulière de (N) !

II. 2) Cas particulier $a(t) = a$

Plaçons nous dans le cas particulier $a(t) = a$ (constante)

(N) $\quad y'(t) + ay(t) = g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Solution particulière si :

- $g(t) = e^{kt}P(t)$ où $P(t)$ est un polynôme et k est un réel

  Une solution particulière est donnée par $y_0(t) = Q(t)e^{kt}$ où $Q(t)$ est le polynôme vérifiant

  $(a+k)Q(t) + Q'(t) = P(t)$ (détails au tableau)

II. 2) Cas particulier $a(t) = a$

Plaçons nous dans le cas particulier $a(t) = a$ (constante)

(N) $\quad y'(t) + a y(t) = g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Solution particulière si :

- $g(t) = e^{kt}P(t)$ où $P(t)$ est un polynôme et k est un réel

  Une solution particulière est donnée par $y_0(t) = Q(t)e^{kt}$ où $Q(t)$ est le polynôme vérifiant

  $(a+k)Q(t) + Q'(t) = P(t)$ (détails au tableau)

Exemple : $\quad y'(t) - y(t) = t^2 + 2 \qquad \forall t \in I = \mathbb{R}$

Déterminer une solution particulière $y_0(t)$

II. 2) Cas particulier $a(t) = a$

Plaçons nous dans le cas particulier $a(t) = a$ (constante)

(N) $\quad y'(t) + ay(t) = g(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Solution particulière si :

- $g(t) = e^{kt}P(t)$ où $P(t)$ est un polynôme et k est un réel

  Solution particulière : $y_0(t) = Q(t)e^{kt}$

- $g(t) = e^{kt}\left(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)\right)$ où α, β et ω sont réels

  Solution particulière : $y_0(t) = e^{kt}\left(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)\right)$

  (détails au tableau)

II. 2) Cas particulier $a(t) = a$

Plaçons nous dans le cas particulier $a(t) = a$ (constante)

(N) $\quad y'(t) + a y(t) = g(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Solution particulière si :

- $g(t) = e^{kt} P(t)$ où $P(t)$ est un polynôme et k est un réel

  Solution particulière : $y_0(t) = Q(t) e^{kt}$

- $g(t) = e^{kt}(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t))$ où α, β et ω sont réels

  Solution particulière : $y_0(t) = e^{kt}(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t))$

(détails au tableau)

Exemple : $y'(t) + y(t) = e^{-t} \cos(t) \quad \forall t \in I = \mathbb{R}$

Déterminer une solution particulière $y_0(t)$

II. 2) Cas particulier a(t) = a

Plaçons nous dans le cas particulier a(t) = a (constante)

(N) $y'(t) + ay(t) = g(t)$ $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Solution particulière si :

- $g(t) = e^{kt}P(t)$ où $P(t)$ est un polynôme et k est un réel

  Solution particulière : $y_0(t) = Q(t)e^{kt}$

- $g(t) = e^{kt}\left(\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)\right)$ où α, β et ω sont réels

  Solution particulière : $y_0(t) = e^{kt}\left(\lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)\right)$

- g(t) est telle que l'on peut déterminer une solution particulière « évidente ».

Exemple : $y'(t) + y(t) = \frac{1}{t} + \ln(t)$ $\forall t \in I = \{t > 0\}$

II. 2) Cas particulier a(t) = a

Plaçons nous dans le cas particulier a(t) = a (constante)

(N) $$y'(t) + ay(t) = g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Méthode de la variation de la constante :

Rappelons que l'ensemble des solutions du problème homogène sont de la forme : $y_H(t) = \lambda e^{-at}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

II. 2) Cas particulier a(t) = a

Plaçons nous dans le cas particulier $a(t) = a$ (constante)

(N) $y'(t) + ay(t) = g(t)$ $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Méthode de la variation de la constante :

Rappelons que l'ensemble des solutions du problème homogène sont de la forme : $y_H(t) = \lambda e^{-at}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

L'idée est alors de chercher une solution particulière de la forme $y_0(t) = \underline{\lambda(t)}e^{-at}$ où $\lambda(t)$ doit alors satisfaire :

$$\lambda'(t) = e^{at}g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

II. 2) Cas particulier $a(t) = a$

Plaçons nous dans le cas particulier $a(t) = a$ (constante)

(N) $$y'(t) + a y(t) = g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Méthode de la variation de la constante :

Rappelons que l'ensemble des solutions du problème homogène sont de la forme : $y_H(t) = \lambda e^{-at}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

L'idée est alors de chercher une solution particulière de la forme $y_0(t) = \lambda(t) e^{-at}$ où $\lambda(t)$ doit alors satisfaire :

$$\lambda'(t) = e^{at} g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda(t) = \int e^{at} g(t) dt \qquad \text{(une primitive)}$$

On obtient ainsi une solution particulière :

$$y_0(t) = e^{-at} \int e^{at} g(t) dt \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

II. 2) Cas particulier $a(t) = a$

Plaçons nous dans le cas particulier $a(t) = a$ (constante)

(N) $$y'(t) + ay(t) = g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Méthode de la variation de la constante :

Rappelons que l'ensemble des solutions du problème homogène sont de la forme : $y_H(t) = \lambda e^{-at}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

L'idée est alors de chercher une solution particulière de la forme $y_0(t) = \lambda(t)e^{-at}$ où $\lambda(t)$ satisfait :

$$\lambda(t) = \int e^{at} g(t)dt \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Exemple : $y'(t) - y(t) = e^{-t^2}(2t+1) \qquad \forall t \in I = \mathbb{R}$

Déterminer une solution particulière $y_0(t)$

II. 2) Cas particulier $a(t) = a$

Plaçons nous dans le cas particulier $a(t) = a$ (constante)

(N) $$y'(t) + a y(t) = g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

2.2.2 Théorème

L'ensemble des solutions de (N) est donné par :

$$y(t) = \lambda e^{-at} + e^{-at} \int e^{at} g(t)\,dt \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

et est appelé l'ensemble des courbes intégrables

II. 2) Cas particulier $a(t) = a$

Plaçons nous dans le cas particulier $a(t) = a$ (constante)

(N) $\qquad y'(t) + ay(t) = g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

2.2.2 Théorème

L'ensemble des solutions de (N) est donné par :

$$y(t) = \lambda e^{-at} + e^{-at} \int e^{at} g(t)dt \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.2.3 Corollaire (problème de Cauchy linéaire)

Le problème (dit de Cauchy), trouver $y(t)$ solution de (N) telle que $y(t_0) = C_0$, admet une unique solution où $t_0 \in I$.

Preuve : au (vrai) tableau ! $\blacksquare$

II. 2) Cas particulier $a(t) = a$

2.2.3 Corollaire (problème de Cauchy linéaire)

Le problème (dit de Cauchy), trouver $y(t)$ solution de (N) telle que $y(t_0) = C_0$, admet une unique solution où $t_0 \in I$.

Exemple : (N) $\quad y'(t) - y(t) = 1 \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

II. 2) Cas particulier $a(t) = a$

2.2.3 Corollaire (problème de Cauchy linéaire)

Le problème (dit de Cauchy), trouver $y(t)$ solution de (N) telle que $y(t_0) = C_0$, admet une unique solution où $t_0 \in I$.

Exemple : (N) $y'(t) - y(t) = 1$ $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Solutions générales : $y(t) = \lambda e^t - 1$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

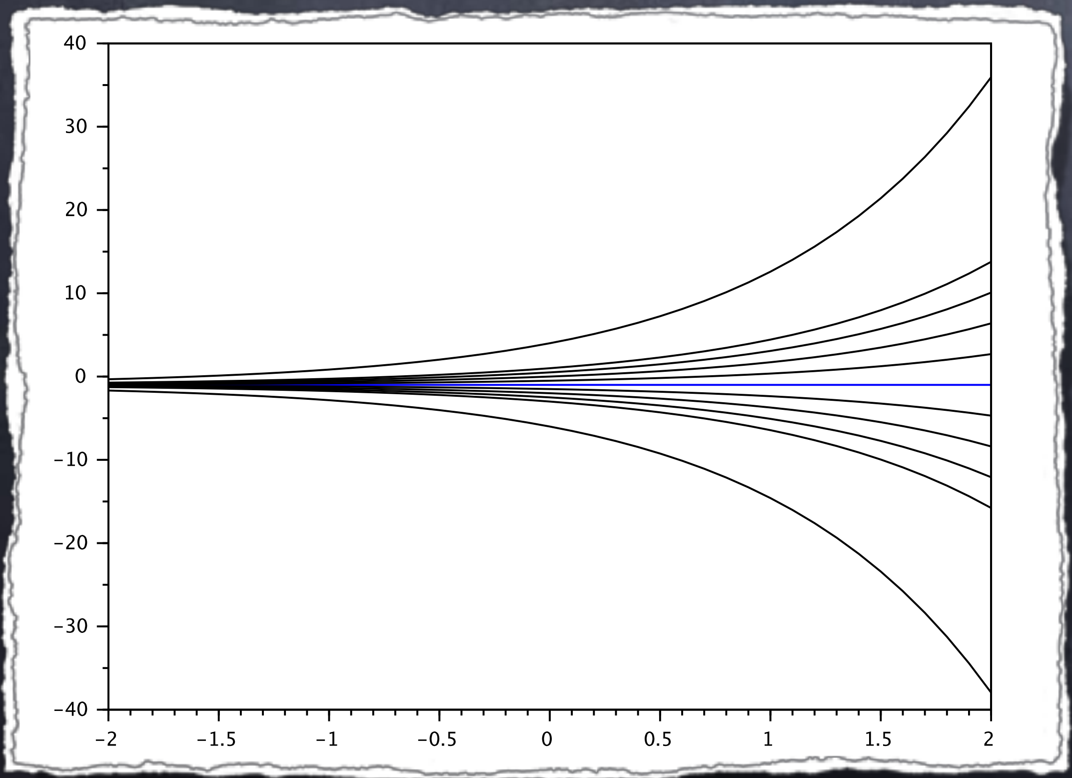
II. 2) Cas particulier $a(t) = a$

2.2.3 Corollaire (problème de Cauchy linéaire)

Le problème (dit de Cauchy), trouver $y(t)$ solution de (N) telle que $y(t_0) = C_0$, admet une unique solution où $t_0 \in I$.

Exemple : (N) $\quad y'(t) - y(t) = 1 \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Solutions générales : $\quad y(t) = \lambda e^t - 1 \quad$ où $\quad \lambda \in \mathbb{R}$



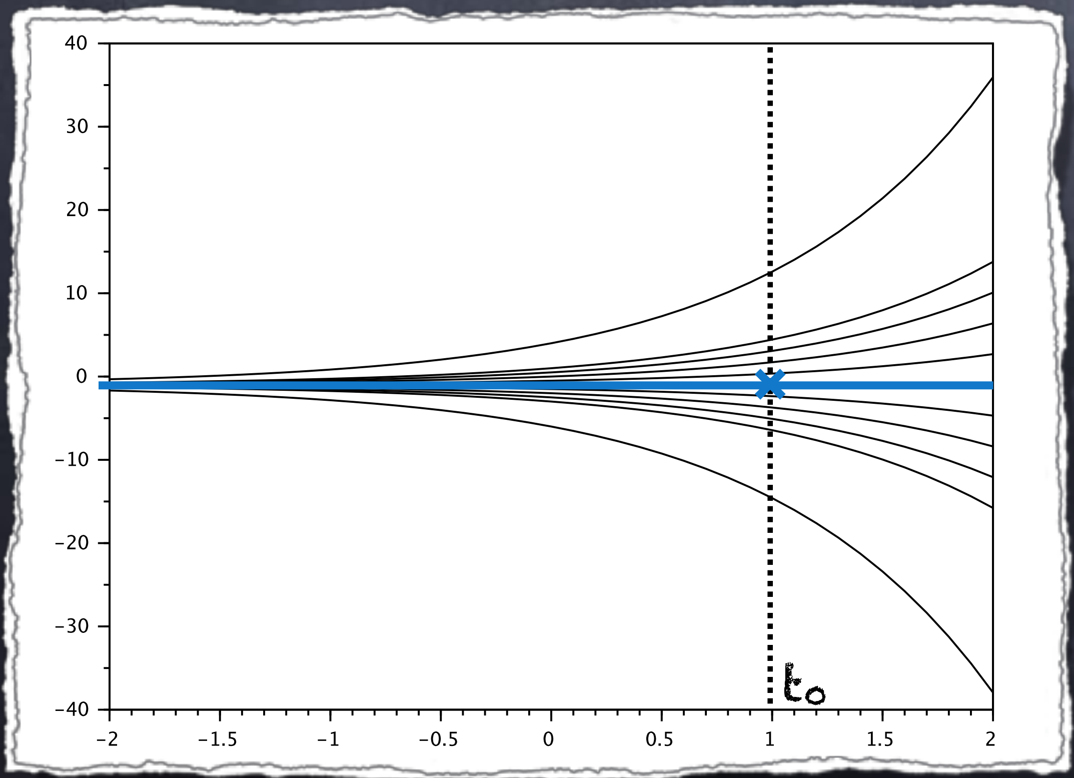
II. 2) Cas particulier $a(t) = a$

2.2.3 Corollaire (problème de Cauchy linéaire)

Le problème (dit de Cauchy), trouver $y(t)$ solution de (N) telle que $y(t_0) = C_0$, admet une unique solution où $t_0 \in I$.

Exemple : (N) $\quad y'(t) - y(t) = 1 \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Solutions générales : $y(t) = \lambda e^t - 1$ où $\lambda \in \mathbb{R}$



Problème de Cauchy :

On fixe $y(t_0) = C_0$

et on détermine ainsi une unique trajectoire

$C_0 = -1$

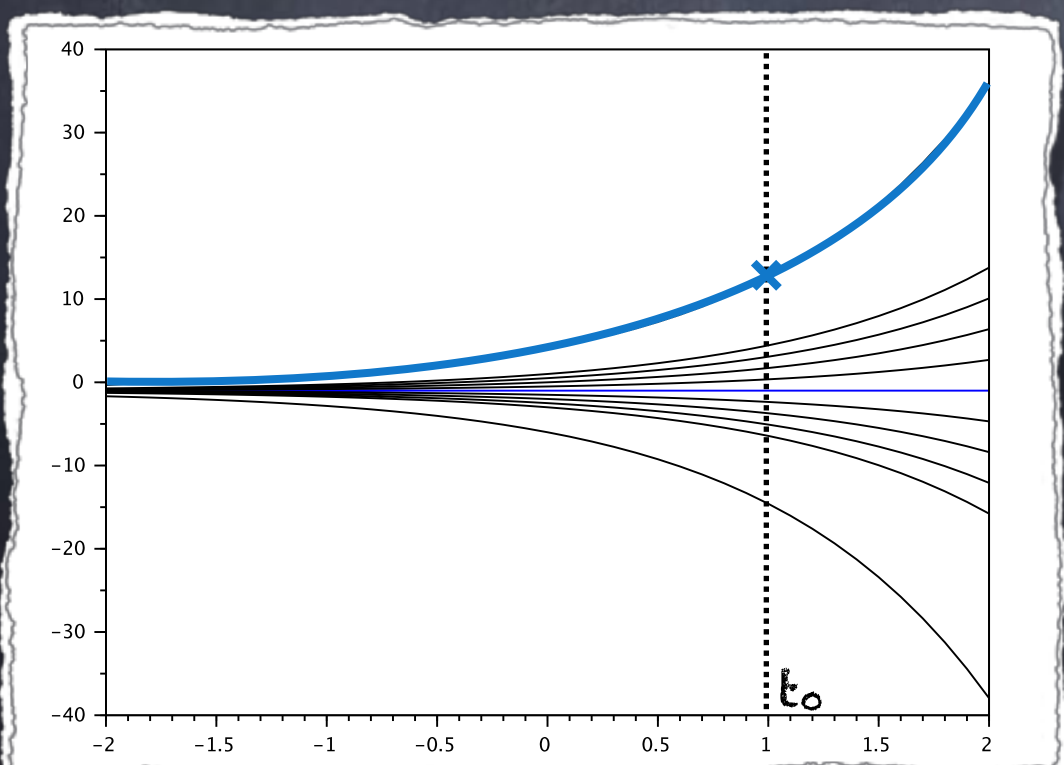
II. 2) Cas particulier $a(t) = a$

2.2.3 Corollaire (problème de Cauchy linéaire)

Le problème (dit de Cauchy), trouver $y(t)$ solution de (N) telle que $y(t_0) = C_0$, admet une unique solution où $t_0 \in I$.

Exemple : (N) $y'(t) - y(t) = 1$ $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Solutions générales : $y(t) = \lambda e^t - 1$ où $\lambda \in \mathbb{R}$



Problème de Cauchy :

On fixe $y(t_0) = C_0$

et on détermine ainsi une unique trajectoire

$C_0 = 10$

II. 3) Cas générale a(t) non constant

On cherche à déterminer les solutions de :

(N) $\quad y'(t) + a(t)y(t) = g(t) \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

2.3.1 Proposition :

Toute solution $y_H(t)$ du problème homogène :

$(N_H) \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0 \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

est de la forme : $y_H(t) = \lambda e^{-A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A(t)$ est une primitive de $a(t)$, c'est à dire $A'(t) = a(t)$.

Preuve : au (vrai) tableau ! $\blacksquare$

II. 3) Cas générale a(t) non constant

On cherche à déterminer les solutions de :

(N) $$y'(t) + a(t)y(t) = g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Méthode de la variation de la constante :

Comme précédemment, on va chercher une solution particulière de la forme $y_0(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ où $\lambda(t)$ vérifie :

$$\lambda'(t) = e^{A(t)}g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

II. 3) Cas générale a(t) non constant

On cherche à déterminer les solutions de :

(N) $\quad y'(t) + a(t)y(t) = g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

Méthode de la variation de la constante :

Comme précédemment, on va chercher une solution particulière de la forme $y_0(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ où $\lambda(t)$ vérifie :

$$\lambda'(t) = e^{A(t)}g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda(t) = \int e^{A(t)}g(t)dt \qquad \text{(une primitive)}$$

On obtient ainsi une solution particulière :

$$y_0(t) = e^{-A(t)} \int e^{A(t)}g(t)dt \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

II. 3) Cas générale a(t) non constant

On cherche à déterminer les solutions de :

(N) $$y'(t) + a(t)y(t) = g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Méthode de la variation de la constante :

Comme précédemment, on va chercher une solution particulière de la forme $y_0(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ où $\lambda(t)$ vérifie :

$$\lambda(t) = \int e^{A(t)} g(t)dt \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

On obtient ainsi une solution particulière :

$$y_0(t) = e^{-A(t)} \int e^{A(t)} g(t)dt \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Exemple : $y'(t) + ty(t) = t \qquad \forall t \in I = \mathbb{R}$

Déterminer l'ensemble des solutions

II. 3) Cas générale a(t) non constant

On cherche à déterminer les solutions de :

(N) $\qquad y'(t) + a(t)y(t) = g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

2.3.2 Théorème

L'ensemble des solutions de (N) est donné par :

$$y(t) = \lambda e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int e^{A(t)} g(t)dt \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

II. 3) Cas générale a(t) non constant

On cherche à déterminer les solutions de :

(N) $\qquad y'(t) + a(t)y(t) = g(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

2.3.2 Théorème

L'ensemble des solutions de (N) est donné par :

$$y(t) = \lambda e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int e^{A(t)} g(t)dt \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.3.3 Corollaire (problème de Cauchy linéaire)

Le problème (dit de Cauchy), trouver $y(t)$ solution de (N) telle que $y(t_0) = C_0$, admet une unique solution où $t_0 \in I$.

Preuve : au (vrai) tableau ! ■

Au programme (chapitre 1) :

Objectif :

Étudier les EDO linéaire d'ordre 1

$$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

Plan :

I. Introduction

II. Cas des EDO linéaires d'ordre 1 sous forme normale

III. Cas des EDO linéaires d'ordre 1 sous forme générale

III. EDO sous forme générale

Considérons l'EDO sous forme générale :

(E) $$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

où on rappelle que $a_1(t)$, $a_0(t)$ et $f(t)$ sont trois fonctions continues sur I.

On suppose de plus que $a_1(t) = 0$ pour $t \in \{t_0, t_1, \cdots, t_n\} \subset I$

III. EDO sous forme générale

Considérons l'EDO sous forme générale :

(E) $$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

où on rappelle que $a_1(t)$, $a_0(t)$ et $f(t)$ sont trois fonctions continues sur I.

On suppose de plus que $a_1(t) = 0$ pour $t \in \{t_0, t_1, \cdots, t_n\} \subset I$

Par conséquent, on a

(N) $$y'(t) + \frac{a_0(t)}{a_1(t)}y(t) = \frac{f(t)}{a_1(t)} \qquad \forall t \in I \setminus \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$$

III. EDO sous forme générale

Considérons l'EDO sous forme générale :

(E) $$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

où on rappelle que $a_1(t)$, $a_0(t)$ et $f(t)$ sont trois fonctions continues sur I.

On suppose de plus que $a_1(t) = 0$ pour $t \in \{t_0, t_1, \cdots, t_n\} \subset I$

Par conséquent, on a

(N) $$y'(t) + \frac{a_0(t)}{a_1(t)}y(t) = \frac{f(t)}{a_1(t)} \qquad \underline{\forall t \in I \setminus \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}}$$

3.1 Proposition :

$y(t)$ est solution de (E) ssi :

- $y(t)$ vérifie (N) pour tout $t \in I \setminus \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$
- $y(t)$ est une fonction C^1 sur tout I
- $y(t)$ vérifie (E) pour tout $t \in \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$

III. EDO sous forme générale

Exemples :

- Déterminer la forme générale des solutions de

(E) $$t^2 y'(t) + y(t) = 1 \qquad \forall t \in I = \mathbb{R}$$

1. Résoudre l'équation sous forme normale pour $t \neq 0$

$$y(t) = \begin{cases} c_1 e^{\frac{1}{t}} + 1 & \text{si } t < 0 \\ c_2 e^{\frac{1}{t}} + 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

(détails au tableau !)

III. EDO sous forme générale

Exemples :

- Déterminer la forme générale des solutions de

(E) $\quad t^2 y'(t) + y(t) = 1 \quad \forall t \in I = \mathbb{R}$

1. Résoudre l'équation sous forme normale pour $t \neq 0$

2. Vérifier que la solution est C^1
(i.e. $y(t)$ est continue et $y'(t)$ dérivable)

$$y(t) = \begin{cases} c_1 e^{\frac{1}{t}} + 1 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

(détails au tableau !)

III. EDO sous forme générale

Exemples :

- Déterminer la forme générale des solutions de

(E) $$t^2 y'(t) + y(t) = 1 \qquad \forall t \in I = \mathbb{R}$$

1. Résoudre l'équation sous forme normale pour $t \neq 0$

2. Vérifier que la solution est C^1
   (i.e. $y(t)$ est continue et $y'(t)$ dérivable)

3. La solution satisfait (E) en $t=0$

$$y(t) = \begin{cases} c_1 e^{\frac{1}{t}} + 1 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

(détails au tableau !)

III. EDO sous forme générale

Exemples :

- Déterminer la forme générale des solutions de

(E) $\quad t^2 y'(t) + y(t) = 1 \quad \forall t \in I = \mathbb{R}$

- Déterminer la forme générale des solutions de

(E) $\quad t y'(t) - 3y(t) = 0 \quad \forall t \in I = \mathbb{R}$

Solution générale : $y(t) = \begin{array}{lll} k_1 t^3 & \text{si} & t > 0 \\ 0 & \text{si} & t = 0 \\ k_2 t^3 & \text{si} & t > 0 \end{array}$

Remarque :

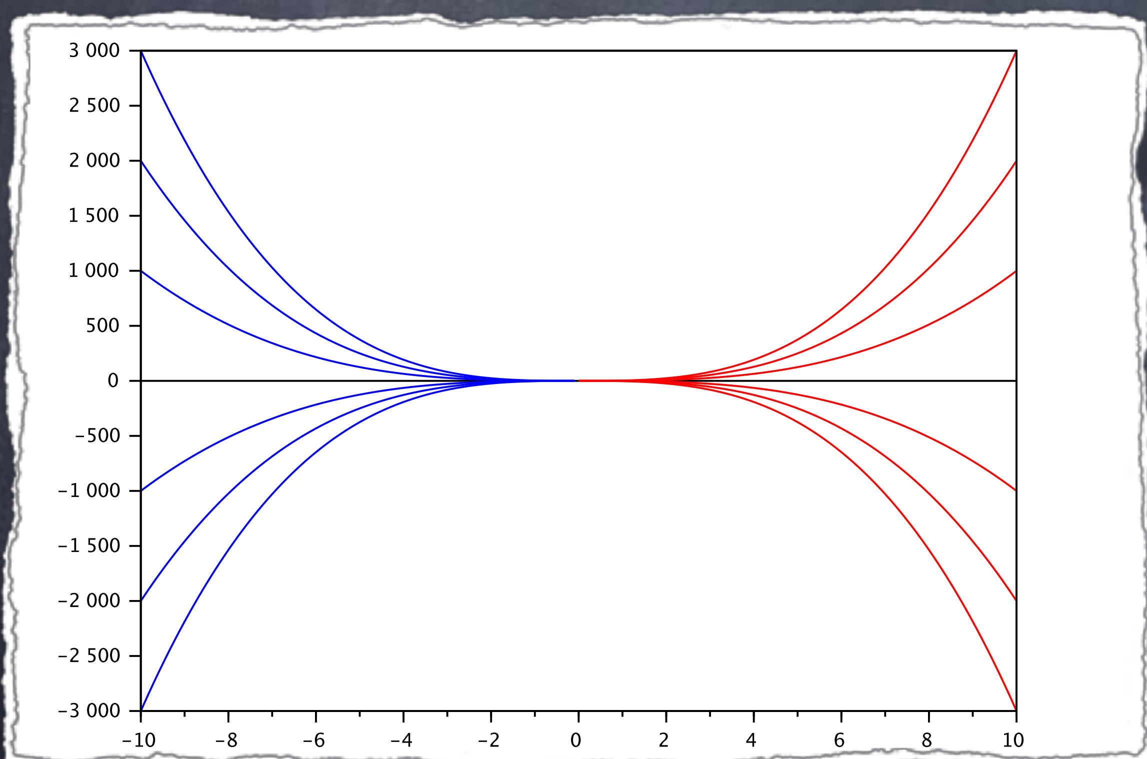
Dans ces deux exemples, on notera que le problème de Cauchy associé peut ne pas admettre de solution, admettre une unique solution, ou une infinité !

III. EDO sous forme générale

Le problème de Cauchy : Trouver $y(t)$ solution de

(E) $$ty'(t) - 3y(t) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

telle que $y(t_0) = C_0$ admet :



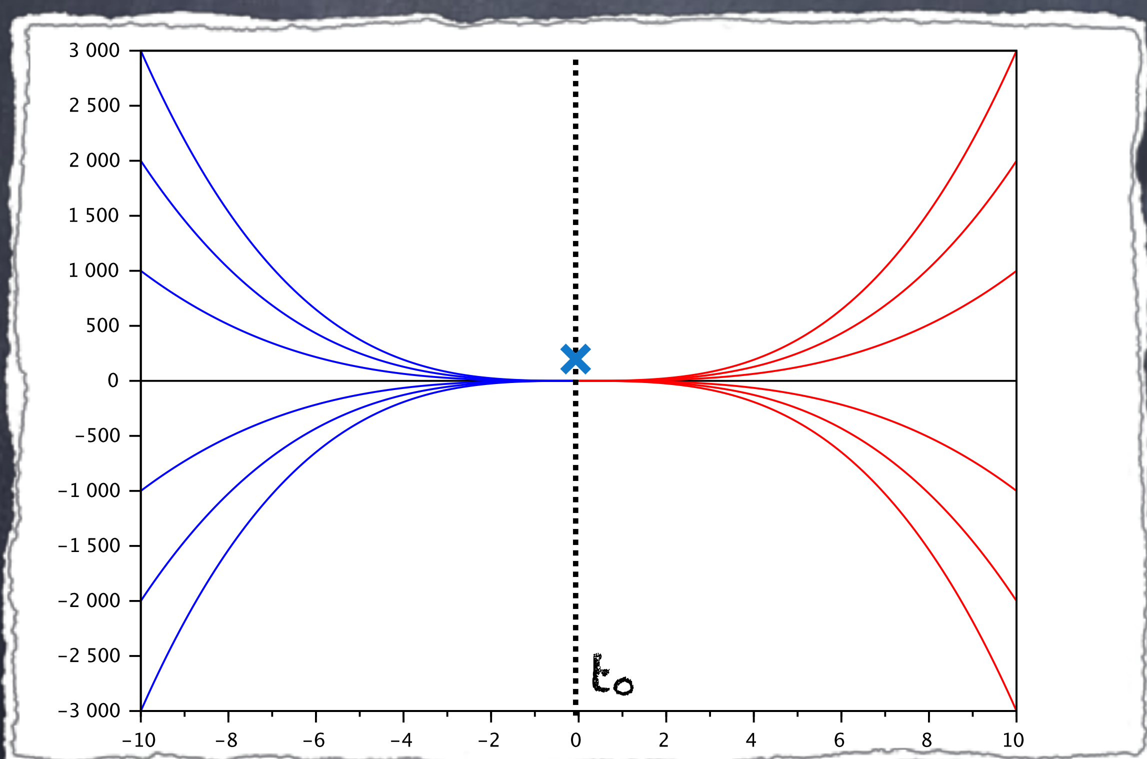
Solution générale de (E) : $y(t) = \begin{cases} k_1t^3 & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \\ k_2t^3 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$

III. EDO sous forme générale

Le problème de Cauchy : Trouver $y(t)$ solution de

(E) $\quad ty'(t) - 3y(t) = 0 \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

telle que $y(t_0) = C_0$ admet :



- aucune solution pour $(t_0, C_0) = (0, 1)$

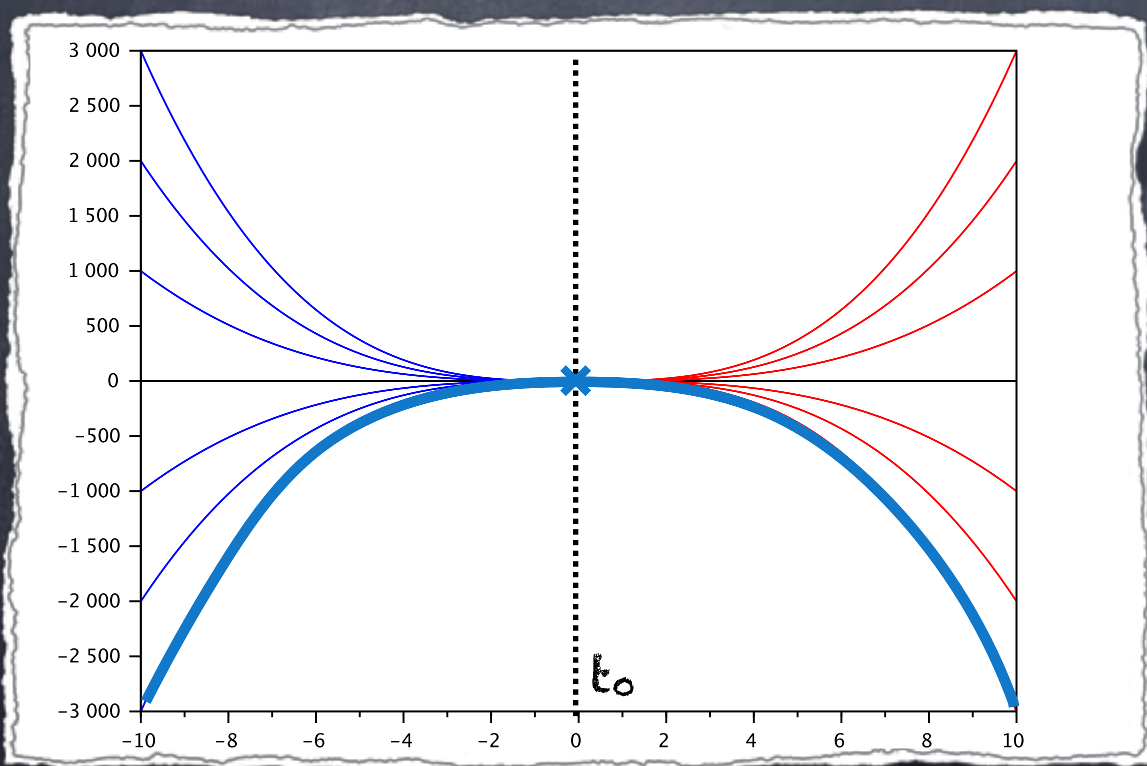
Solution générale de (E) : $y(t) = \begin{cases} k_1 t^3 & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \\ k_2 t^3 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$

III. EDO sous forme générale

Le problème de Cauchy : Trouver $y(t)$ solution de

(E) $\qquad ty'(t) - 3y(t) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$

telle que $y(t_0) = C_0$ admet :



- aucune solution pour $(t_0, C_0) = (0, 1)$
- une infinité de solutions pour $(t_0, C_0) = (0, 0)$

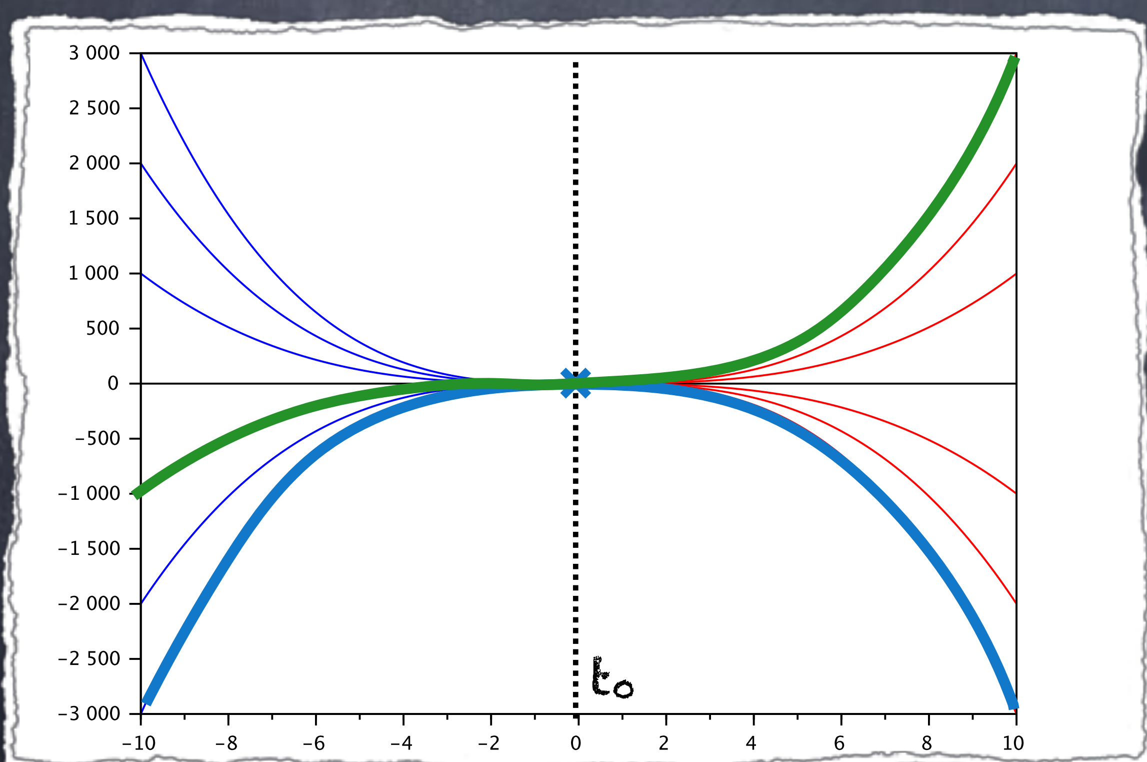
Solution générale de (E) : $y(t) = \begin{cases} k_1 t^3 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ k_2 t^3 & \text{si } t > 0 \end{cases}$

III. EDO sous forme générale

Le problème de Cauchy : Trouver $y(t)$ solution de

(E) $$t y'(t) - 3y(t) = 0 \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

telle que $y(t_0) = C_0$ admet :



- aucune solution pour $(t_0, C_0) = (0, 1)$
- une infinité de solutions pour $(t_0, C_0) = (0, 0)$

Solution générale de (E) : $$y(t) = \begin{cases} k_1 t^3 & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \\ k_2 t^3 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

Plan détaillé chapitre 1

I. Introduction

1) Quelques définitions
2) Où trouve-t-on des EDO ?

II. Cas des EDO linéaires d'ordre 1 sous forme normale

1) Théorème de superposition
2) Cas particulier $a(t) = a$
3) Cas général $a(t)$ non constant

III. Cas des EDO linéaires d'ordre 1 sous forme générale