

# GM 5 : Géophysique, problème inverse et vaches noires...

GM 5 Année 2020 - 2021

Contact : A. Tonnoir

[antoine.tonnoir@insa-rouen.fr](mailto:antoine.tonnoir@insa-rouen.fr)



RÉGION  
NORMANDIE



UNION EUROPÉENNE

# Un peu de contexte...

Ce cours est issu d'un travail collaboratif entre :

- Le LMI (A.T., C. Gout, C. Le Guyader)
- Le CEREMA (C. Fauchard, S. Taoum, ...)
- L'IFSTAR (Y. Fargier)

Il présente une partie des résultats du projet TÉLÉDETAC  
Téledétection par Drone du Trait de Côte

Objectifs de ce cours :



- Présenter la modélisation d'un problème concret
- Mettre en oeuvre une méthode de résolution avec les outils que vous connaissez.

# Un peu de contexte...

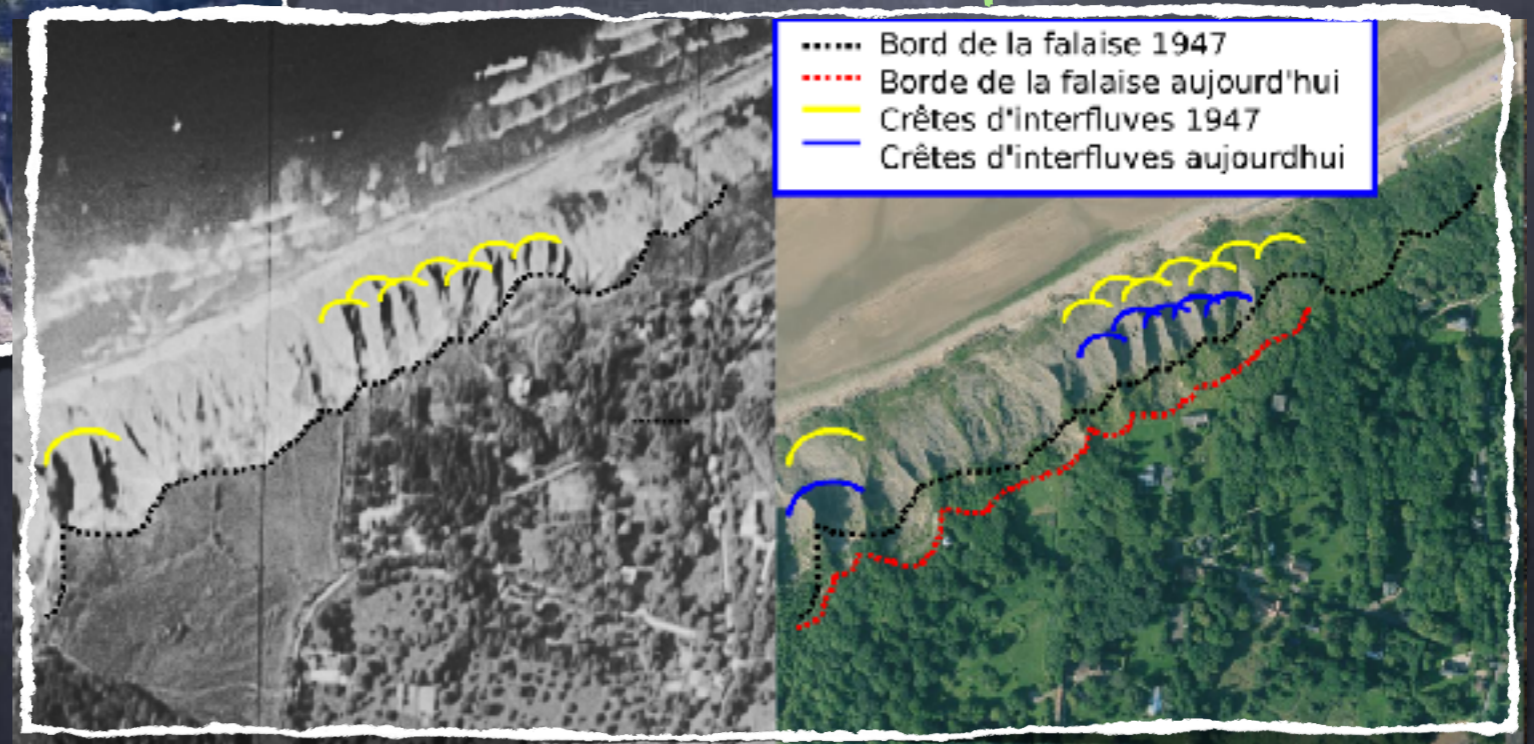
## Objectifs du projet T EL EDETAC :

 tudier l'évolution du trait de côte et mieux comprendre à l'échelle locale à les phénomènes d'érosion des falaises

Le site des vaches noires



et son évolution qualitative  
dans le temps



# Un peu de contexte...

---

## Objectifs du projet T EL EDETAC :

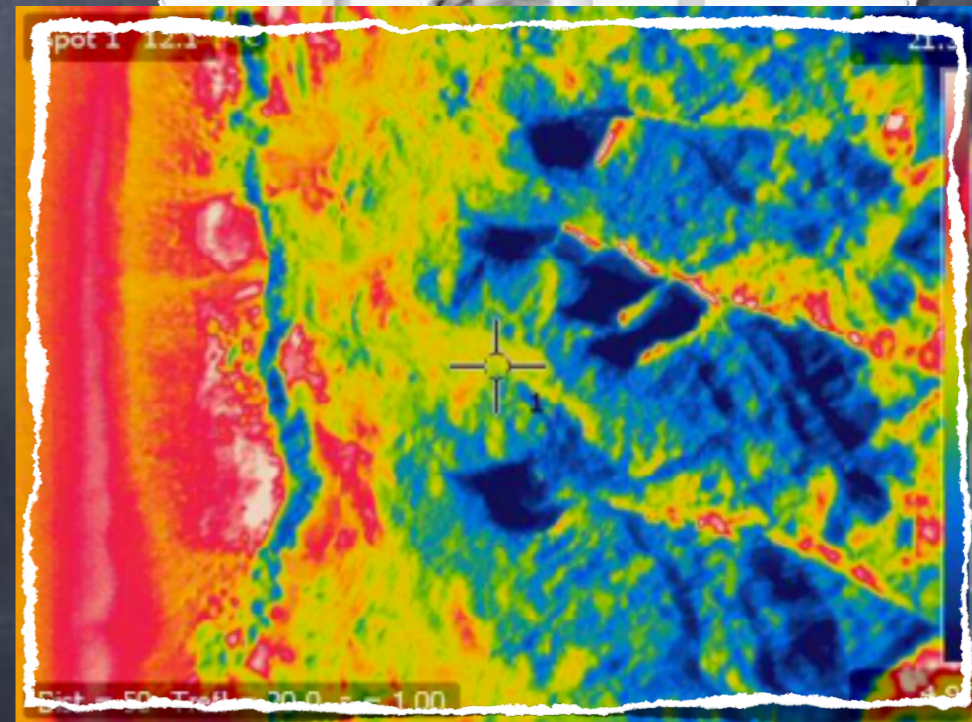
 tudier l'évolution du trait de côte et mieux comprendre à l'échelle locale à les phénomènes d'érosion des falaises

...   l'aide :

-   d'observations par drone



Domaine visible



Domaine infrarouge

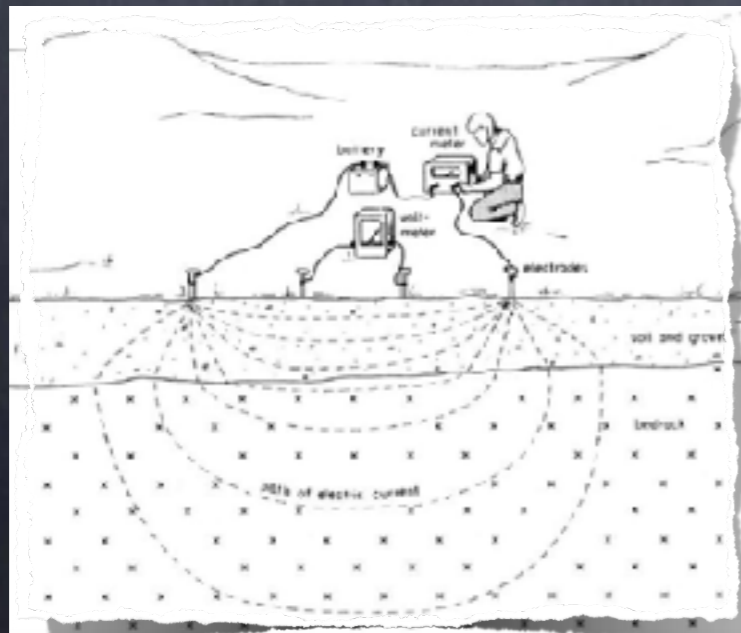
# Un peu de contexte...

## Objectifs du projet TÉLÉDETAC :

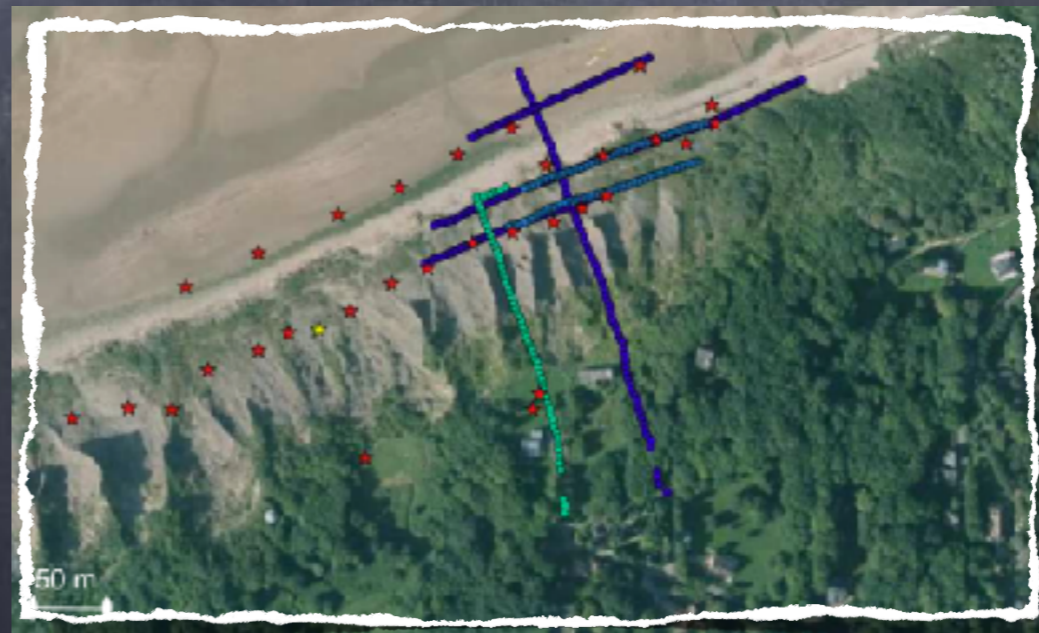
  tudier l'évolution du trait de côte et mieux comprendre à l'échelle locale à les phénomènes d'érosion des falaises

...    l'aide :

-    d'observations par drone
-    de mesures géophysiques de résistivité électrique



Mesures de RE



Points de mesures

# Un peu de contexte...

## Objectifs du projet TÉLÉDETAC :

Étudier l'évolution du trait de côte et mieux comprendre à l'échelle locale à les phénomènes d'érosion des falaises

Plus spécifiquement, on souhaite :

- ① établir un Modèle Numérique de Terrain (MNT)
- ② modéliser les expériences de mesures de résistivité
- ③ déterminer à l'aide des mesures de résistivité la structure de sous-sol

# Au programme...

## Plan :

I. Un peu de contexte...

II. Exploitation des données et MNT

III. Le problème direct

IV. Le problème inverse

# Au programme...

## Plan :

I. Un peu de contexte...

II. Exploitation des données et MNT

a) Des photos aux coordonnées

b) Des coordonnées au maillage

c) Résumé

III. Le problème direct

IV. Le problème inverse



# I. a) Des photos aux coordonnées...

---

Données brutes :

Les données obtenues par drone sont une série de photos aériennes (hautes résolutions)



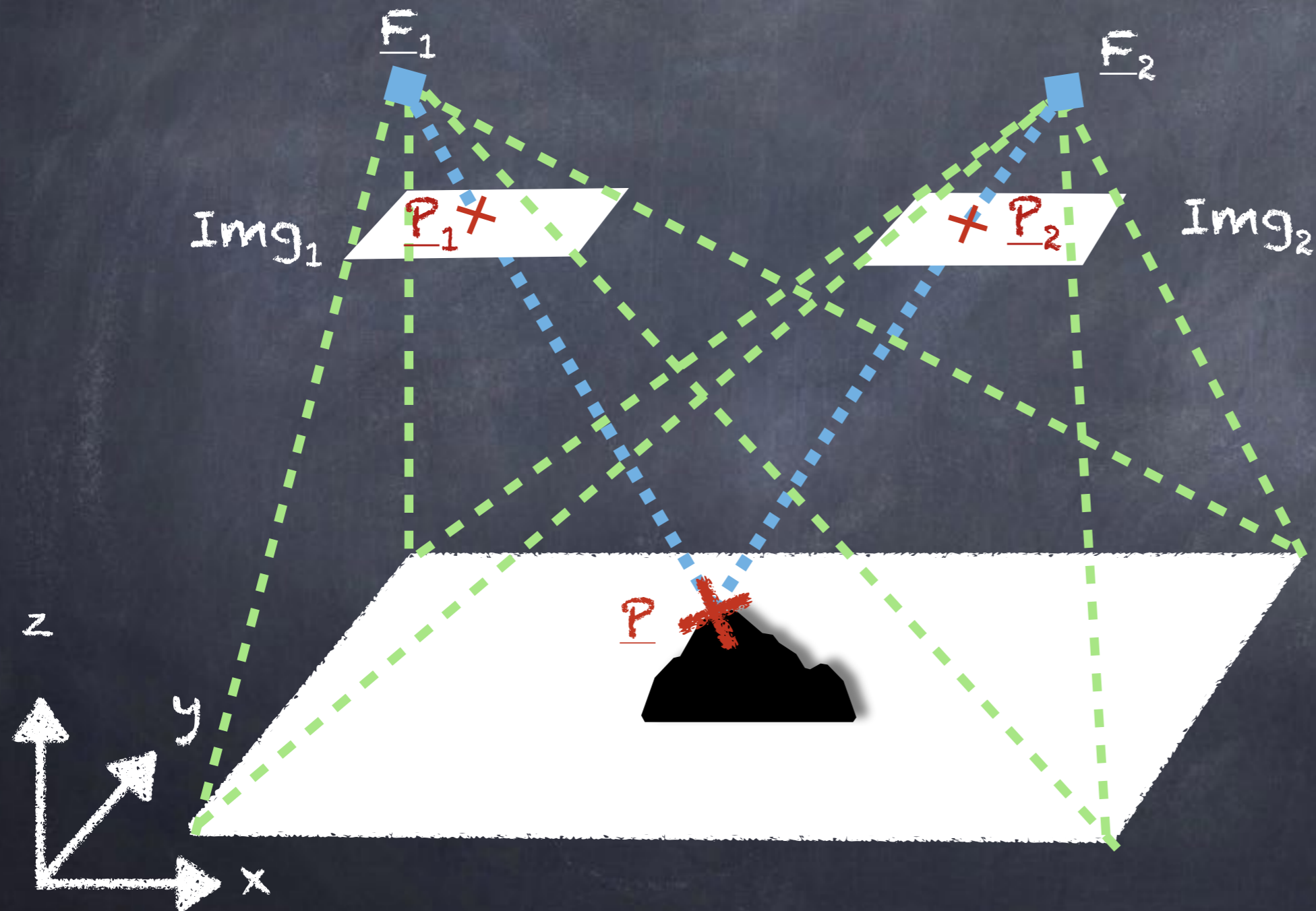
**Problème :** Déduire de ces photos la topographie

→ La Photogrammétrie !

# I. a) Des photos aux coordonnées...

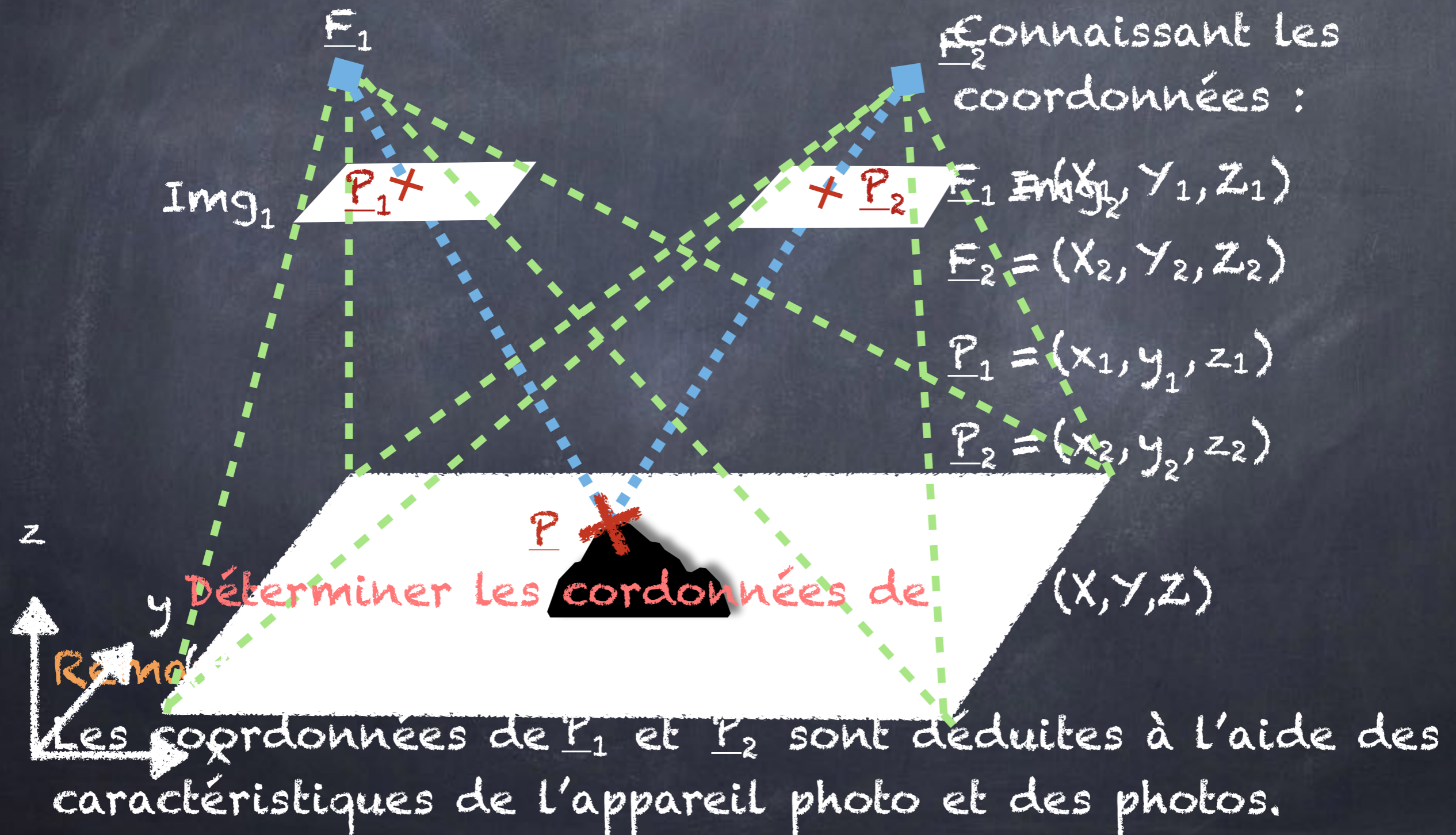
---

Principe de la photogrammétrie :



# I. a) Des photos aux coordonnées...

Principe de la photogrammétrie :



# I. a) Des photos aux coordonnées...

---

Notons qu'il faut également

- ① savoir reconnaître les points  $P_1$  et  $P_2$  qui représentent le même point  $P$  sur les images  $Img_1$  et  $Img_2$ .
- ② prendre en compte la distorsion de l'image due à l'appareil photo.

Pour en apprendre davantage, voir [ici](#) ou [la](#) !

Pour les vaches noires, en quelques chiffres :

- ① 40 photos hautes résolutions
- ② 23 millions de points
- ③ résolution de 555 pts / m<sup>2</sup>



# I. b) Des coordonnées aux maillages...

## Structure des données de mesures topographiques

480751.9	6917527	49.20177
480751.2	6917529	51.77935
480751.5	6917528	50.02393
480752.2	6917528	50.89463
480738.4	6917560	36.01216
480738.8	6917560	35.97265
480738.7	6917560	36.18085

:

monFichier.xyz

Coordonnées (Lambert)

X

Y

Z

**Objectif :**

Construire un maillage volumique 3D dont un bord correspond à la topographie des falaises

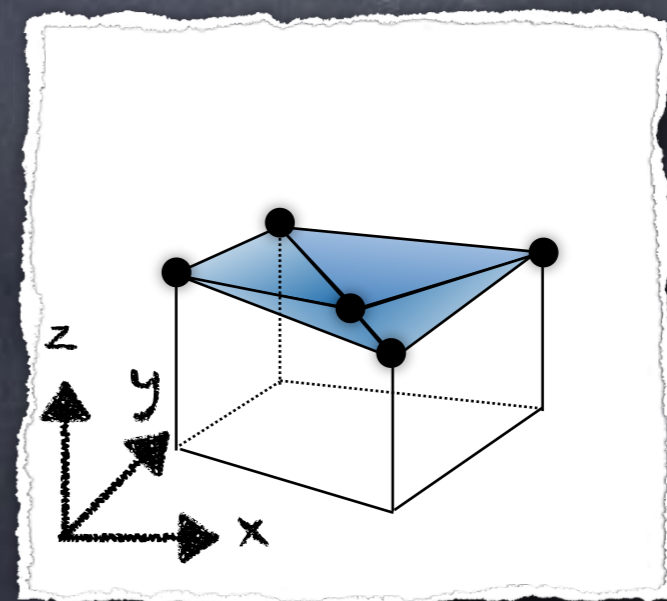
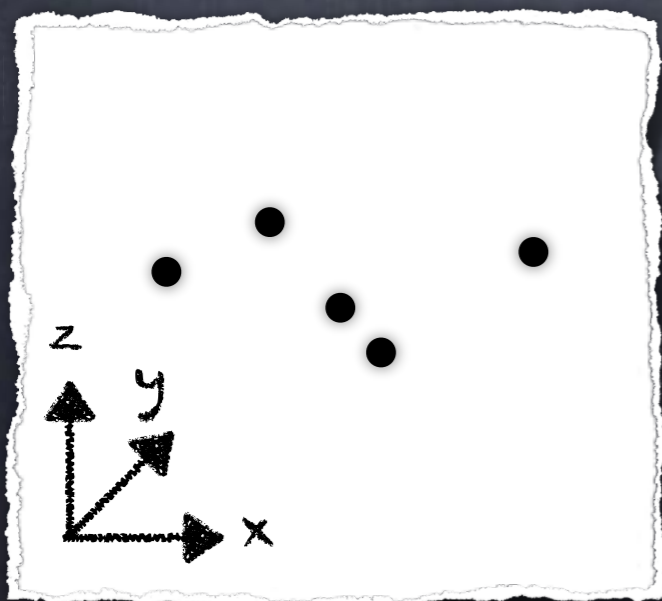
# I. b) Des coordonnées aux maillages...

---

## Remarque :

Dans la littérature, il existe des algorithmes de reconstruction de surface à partir des points, générant un maillage de « peau » (voir par exemple [BPA](#)).

Néanmoins, ces algorithmes ne sont en général pas prévus pour « fermer » une surface et générer le maillage volumique.

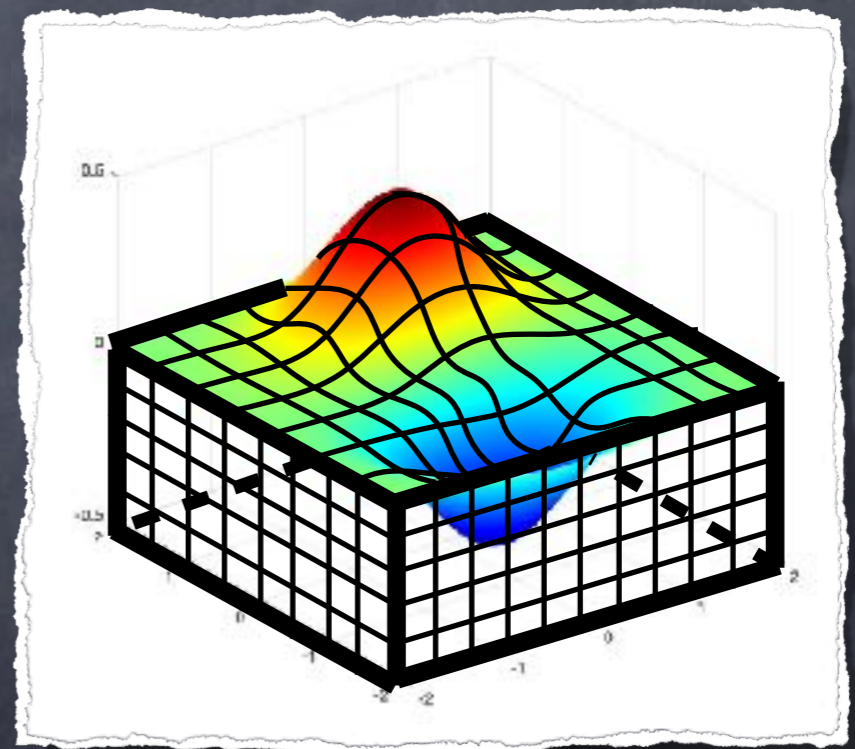
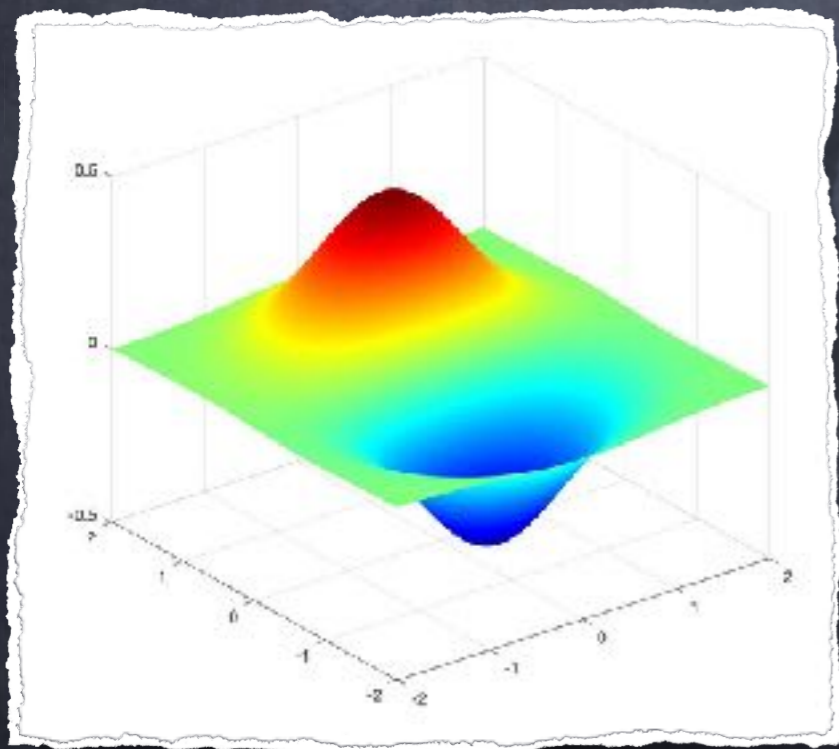


# I. b) Des coordonnées aux maillages...

---

Un problème intermédiaire

Considérons tout d'abord le cas où on souhaite construire un maillage volumique sous une surface  $S$  définie par  $S = \{z = f(x, y), (x, y) \in [a, b] \times [c, d]\}$

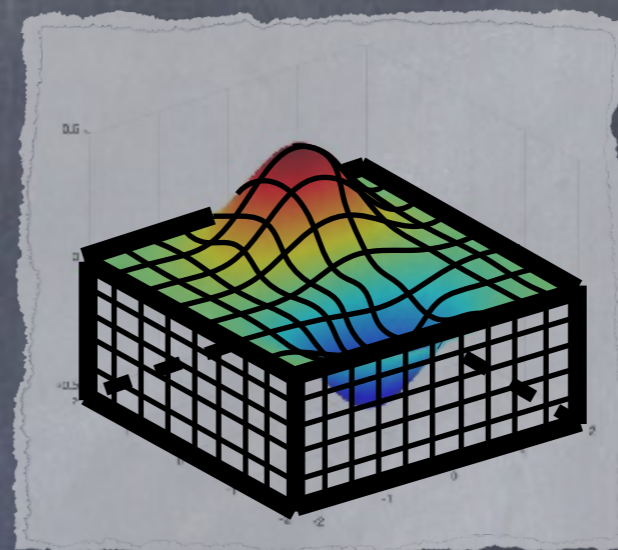
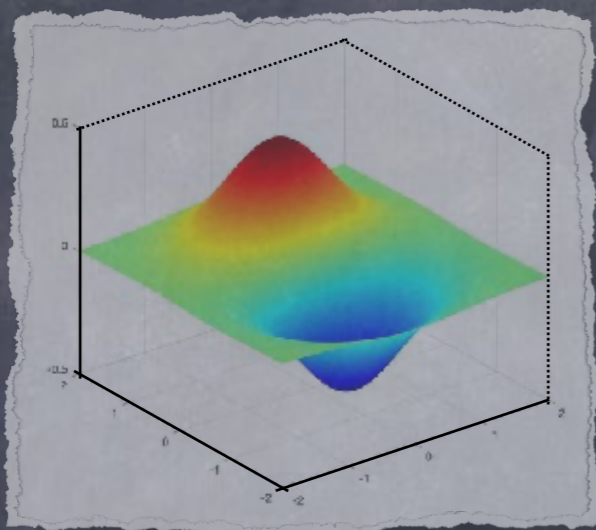


Dans des logiciels de maillage comme GMSH, la difficulté est de prendre en compte la topologie de  $S$  pour définir un bord du domaine.

# I. b) Des coordonnées aux maillages...

Un problème intermédiaire

$$z = f(x, y)$$



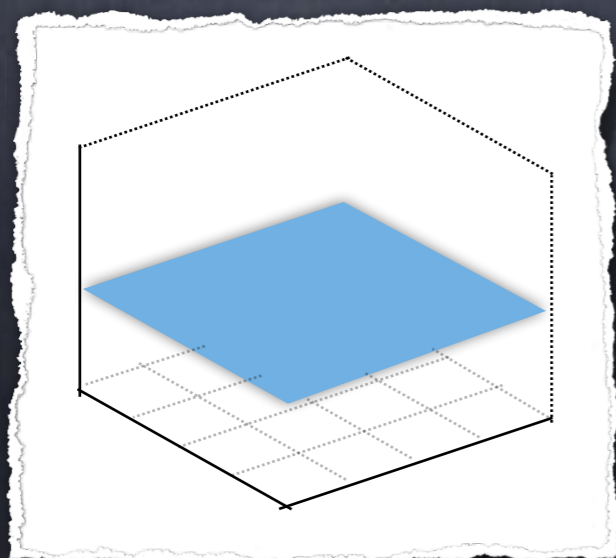
$$z \in [z_m, f(x, y)]$$

$$zf(x, y)$$

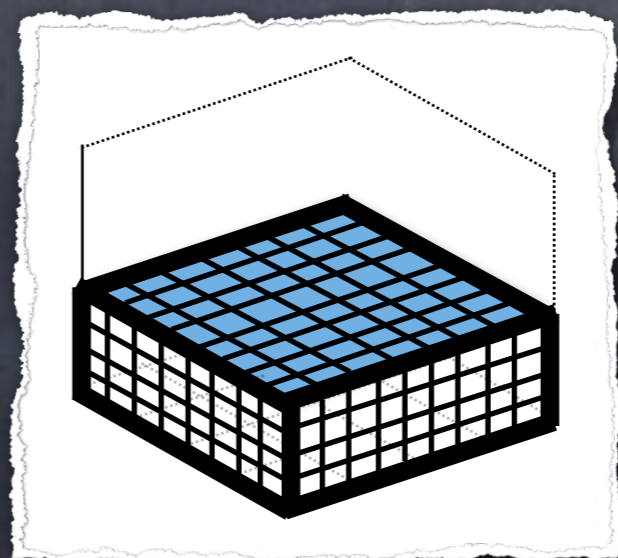


$$zf(x, y) + z_m(1 - z)$$

$$z = 1$$



GMSH



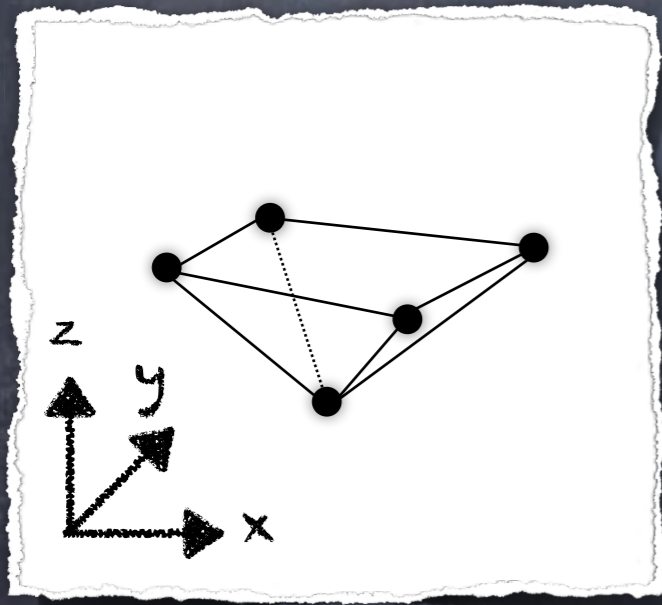
$$z \in [0, 1]$$



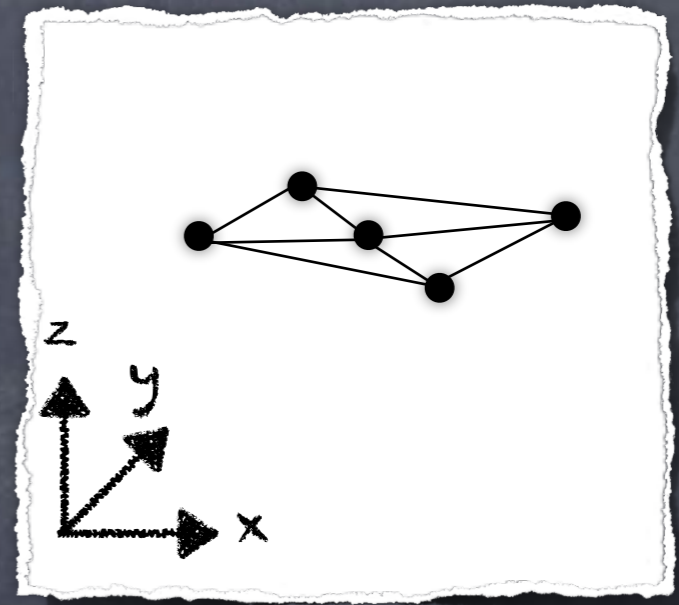
# I. b) Des coordonnées aux maillages...

## Remarque :

Dans l'approche qu'on vient de décrire, il peut exister des situations problématiques :



$$zf(x, y) + z_m(1 - z)$$



Triangle plat !

Cependant, ce type de situation n'apparaît que si  $f$  varie très vite (à l'échelle d'une maille) ou si le maillage est trop grossier.

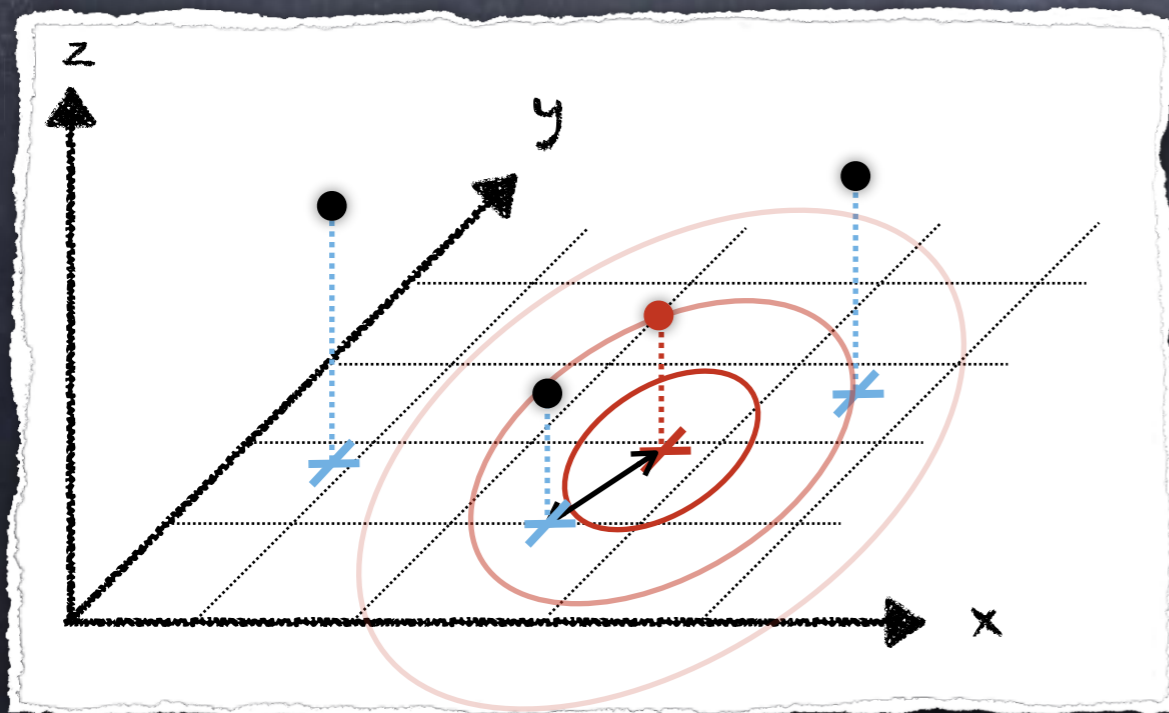
# I. b) Des coordonnées aux maillages...

Retour à notre problème initial :

À défaut d'une fonction  $f(x,y)$ , on a un ensemble de coordonnées  $(x,y,z)$ .

Pour se ramener au cas précédent, il suffit de considérer une **interpolation**  $p(x,y)$  (polynôme par morceau).

Approximation  $P_0$



On choisit la valeur  $z$  du plus **proche voisin**

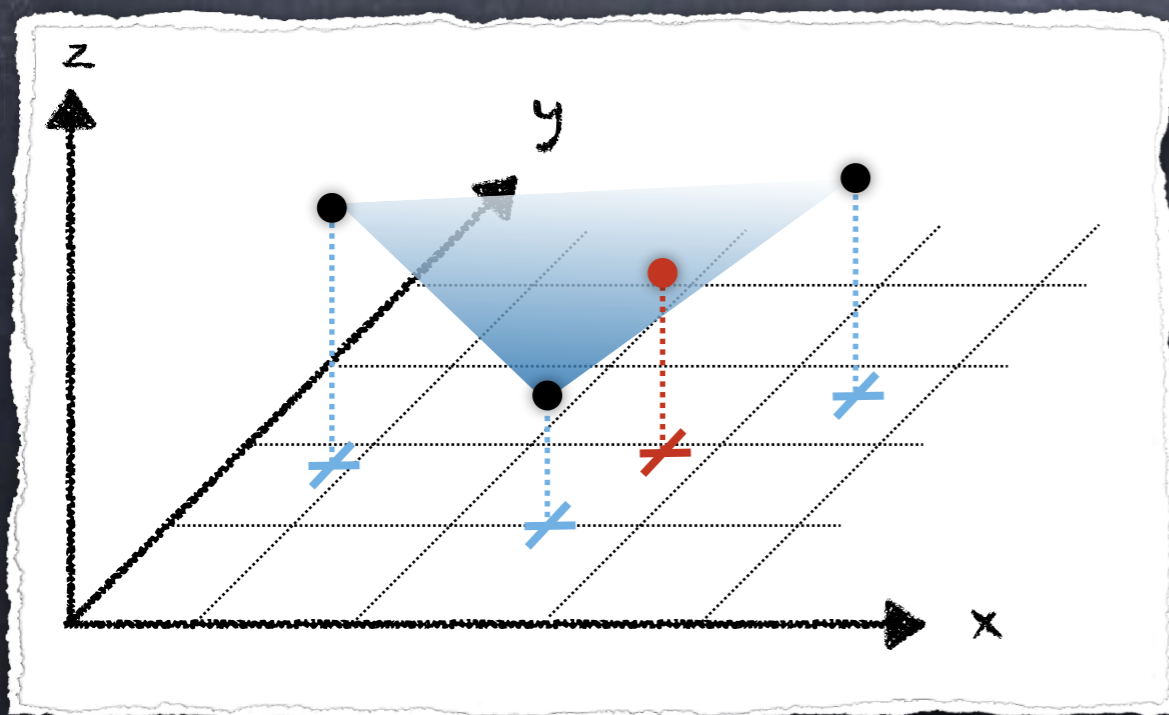
# I. b) Des coordonnées aux maillages...

Notre problème initial :

À défaut d'une fonction  $f(x,y)$ , on a un ensemble de coordonnées  $(x,y,z)$ .

Pour se ramener au cas précédent, il suffit de considérer une **interpolation**  $p(x,y)$  (polynôme par morceau).

Approximation  $P_1$



On choisit  $z = p(x,y)$  où  $P$  décrit le plan passant par les **3 plus proches voisins**

(détails au (vrai) tableau)

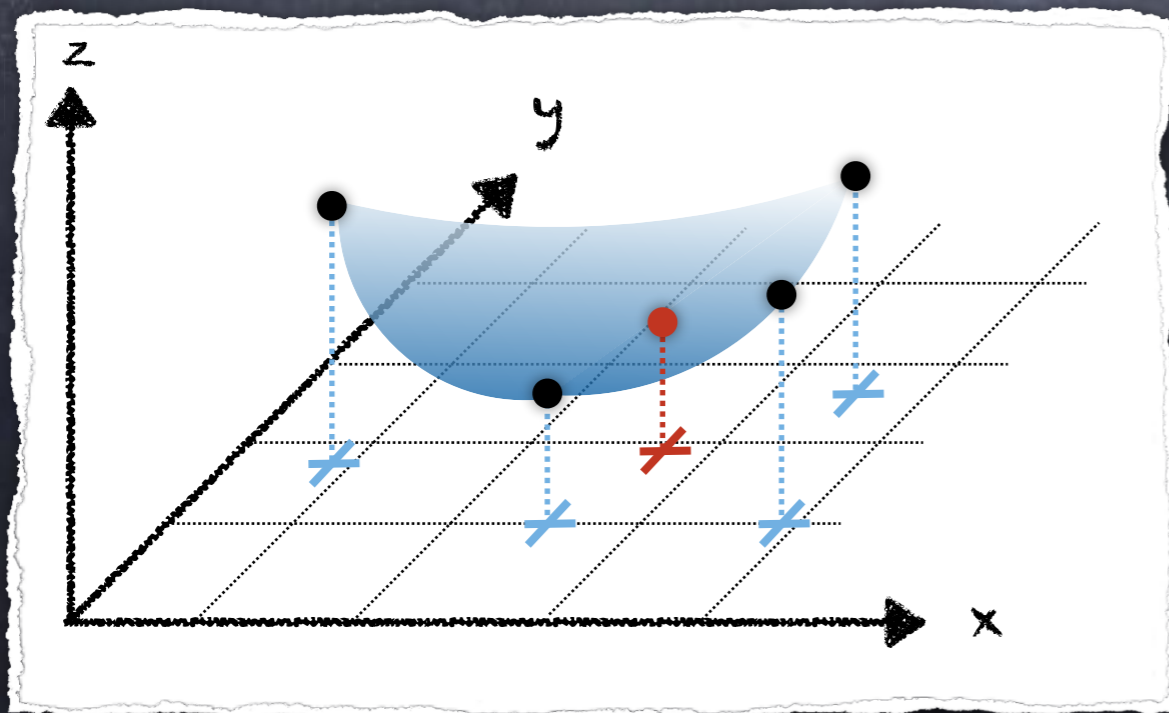
# I. b) Des coordonnées aux maillages...

Notre problème initial :

À défaut d'une fonction  $f(x,y)$ , on a un ensemble de coordonnées  $(x,y,z)$ .

Pour se ramener au cas précédent, il suffit de considérer une **interpolation**  $p(x,y)$  (polynôme par morceau).

Approximation  $P_k$  (ordre supérieure)



Pour déterminer  $p(x,y)$ , on a besoin des **d plus proches voisins**.

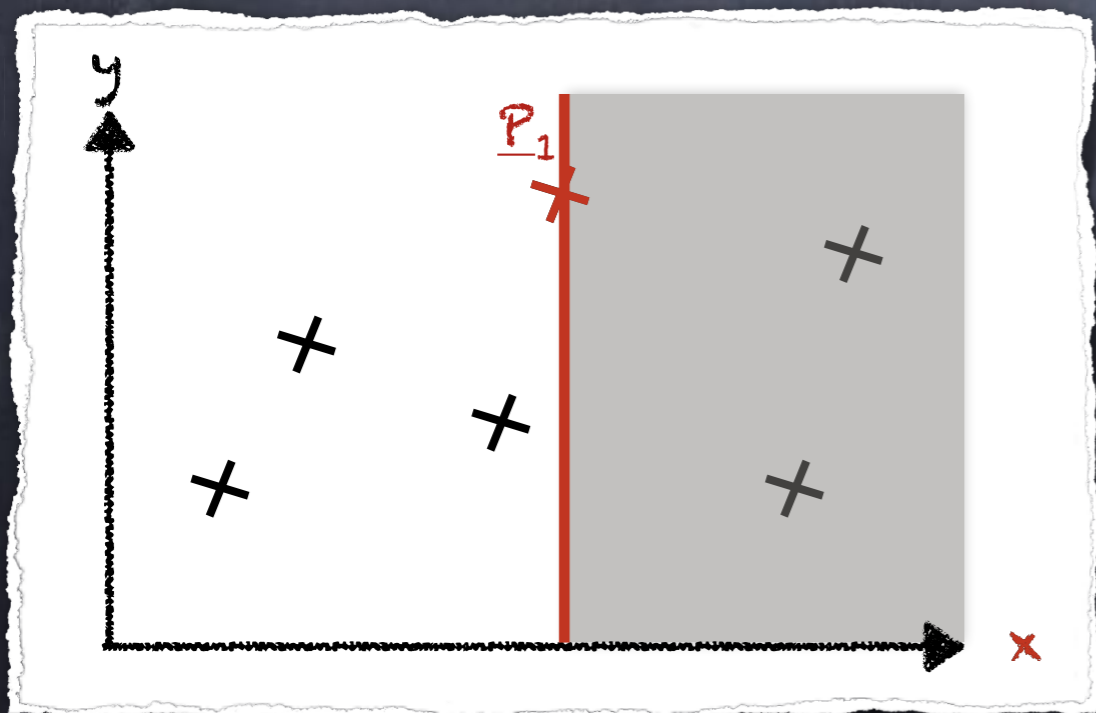
# I. b) Des coordonnées aux maillages...

## Problème :

Dans une liste de 23 million de points, comment déterminer efficacement le(s) plus proche(s) voisin(s) ?

On a besoin d'une structure de données adaptée :  
Les Arbres - 2D (ou plus généralement  $kD$ )

Exemple de construction d'un arbre 2D :



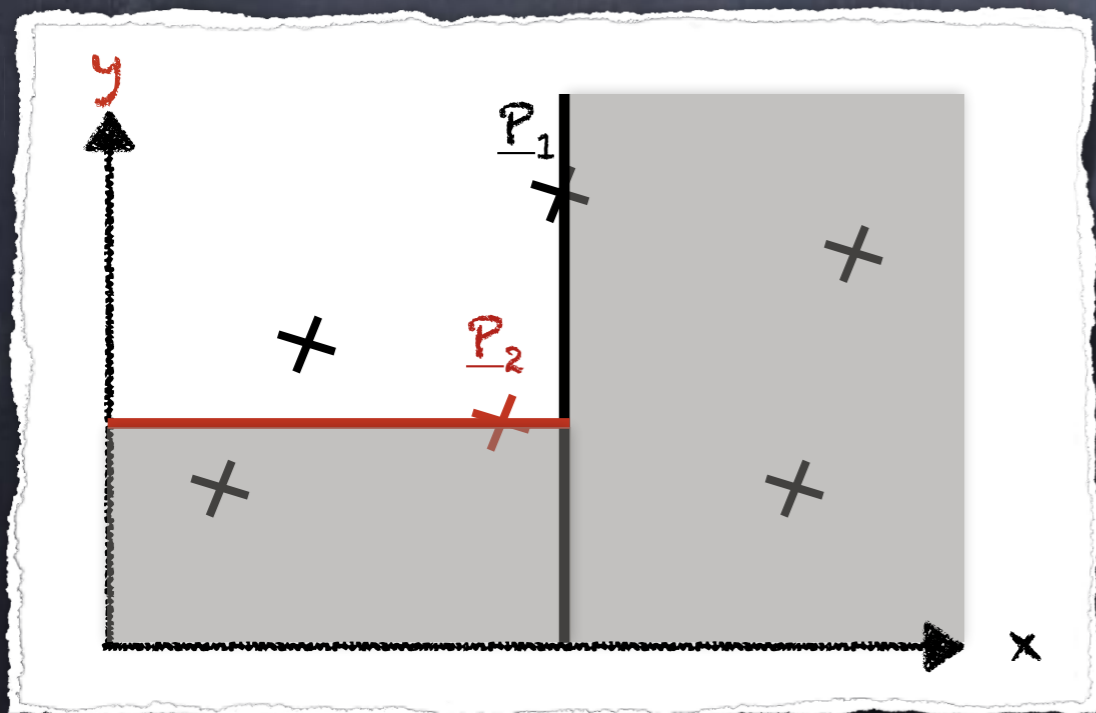
# I. b) Des coordonnées aux maillages...

## Problème :

Dans une liste de 23 million de points, comment déterminer efficacement le(s) plus proche(s) voisin(s) ?

On a besoin d'une structure de données adaptée :  
Les Arbres - 2D (ou plus généralement  $kD$ )

Exemple de construction d'un arbre 2D :



# I. b) Des coordonnées aux maillages...

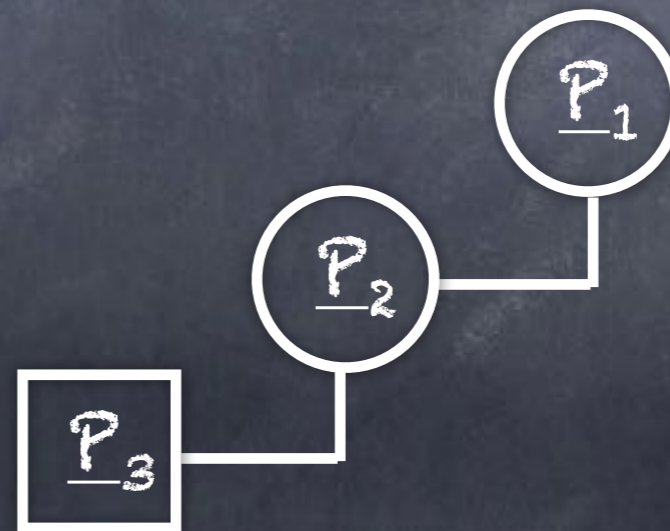
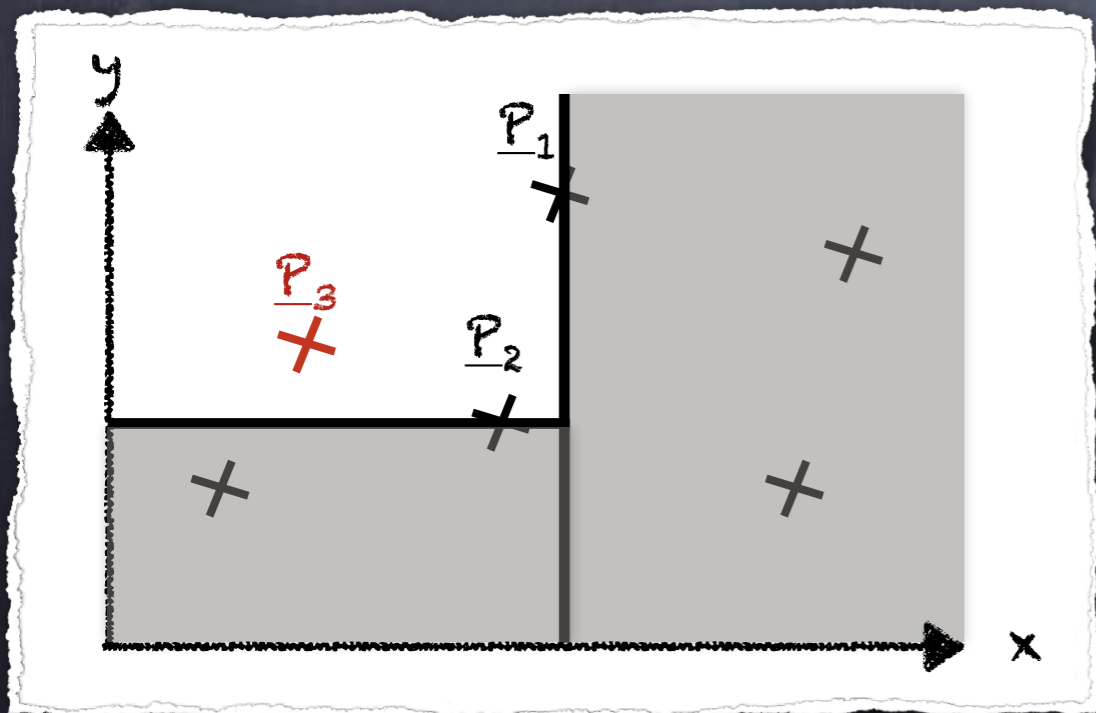
## Problème :

Dans une liste de 23 million de points, comment déterminer efficacement le(s) plus proche(s) voisin(s) ?

On a besoin d'une structure de données adaptée :

Les Arbres - 2D (ou plus généralement kD)

Exemple de construction d'un arbre 2D :



# I. b) Des coordonnées aux maillages...

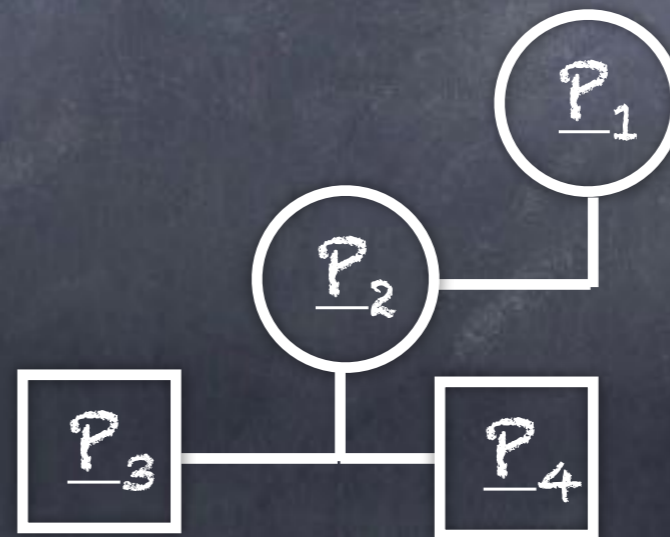
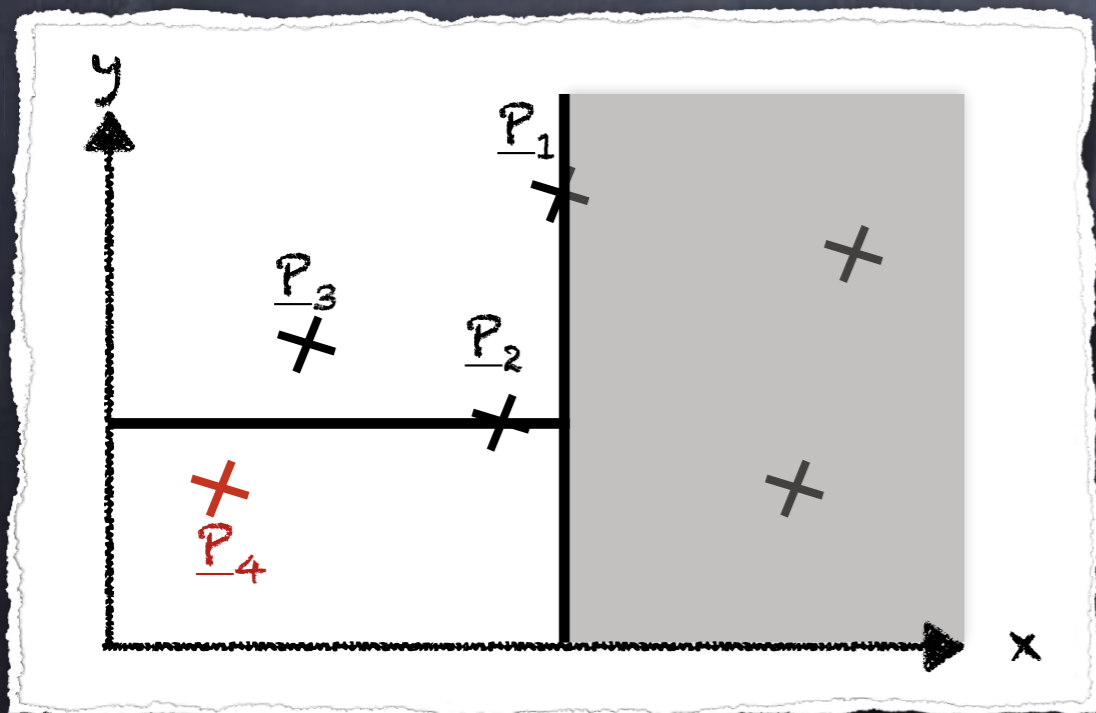
## Problème :

Dans une liste de 23 million de points, comment déterminer efficacement le(s) plus proche(s) voisin(s) ?

On a besoin d'une structure de données adaptée :

Les Arbres - 2D (ou plus généralement kD)

Exemple de construction d'un arbre 2D :





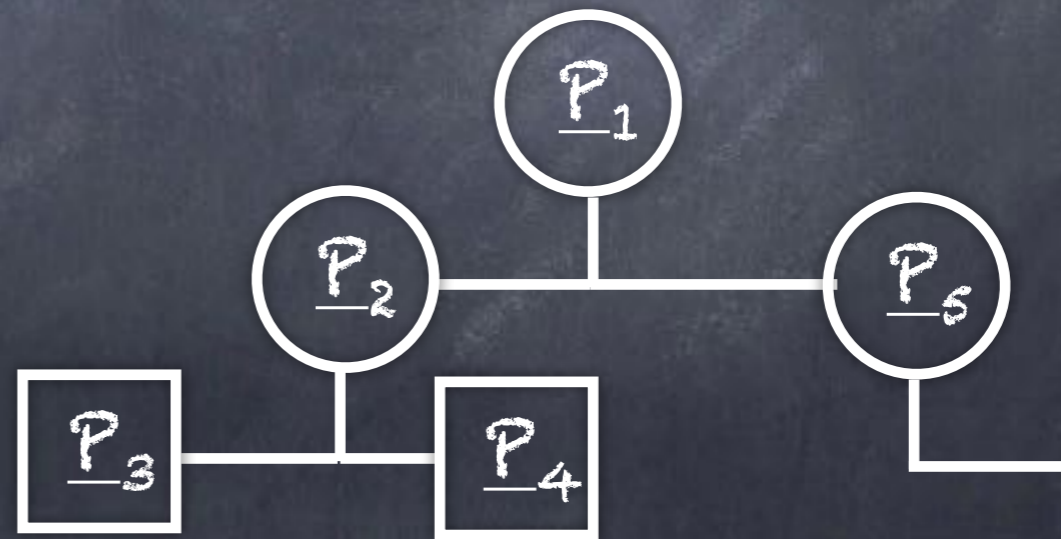
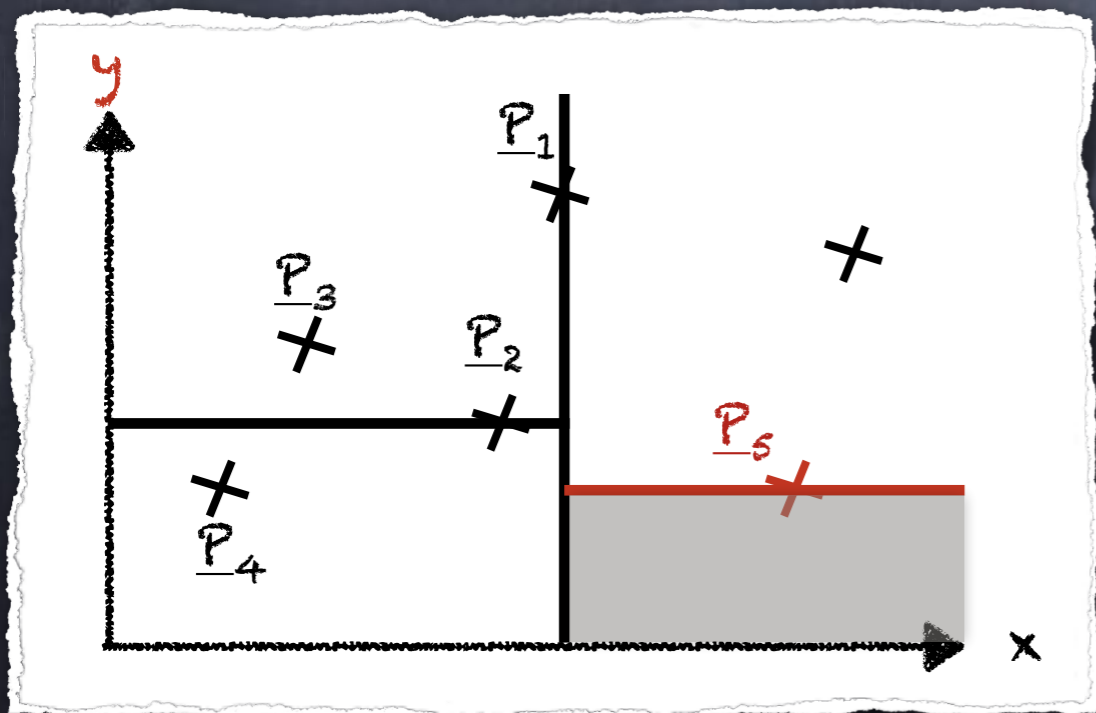
# I. b) Des coordonnées aux maillages...

## Problème :

Dans une liste de 23 million de points, comment déterminer efficacement le(s) plus proche(s) voisin(s) ?

On a besoin d'une structure de données adaptée :  
Les Arbres - 2D (ou plus généralement kD)

Exemple de construction d'un arbre 2D :



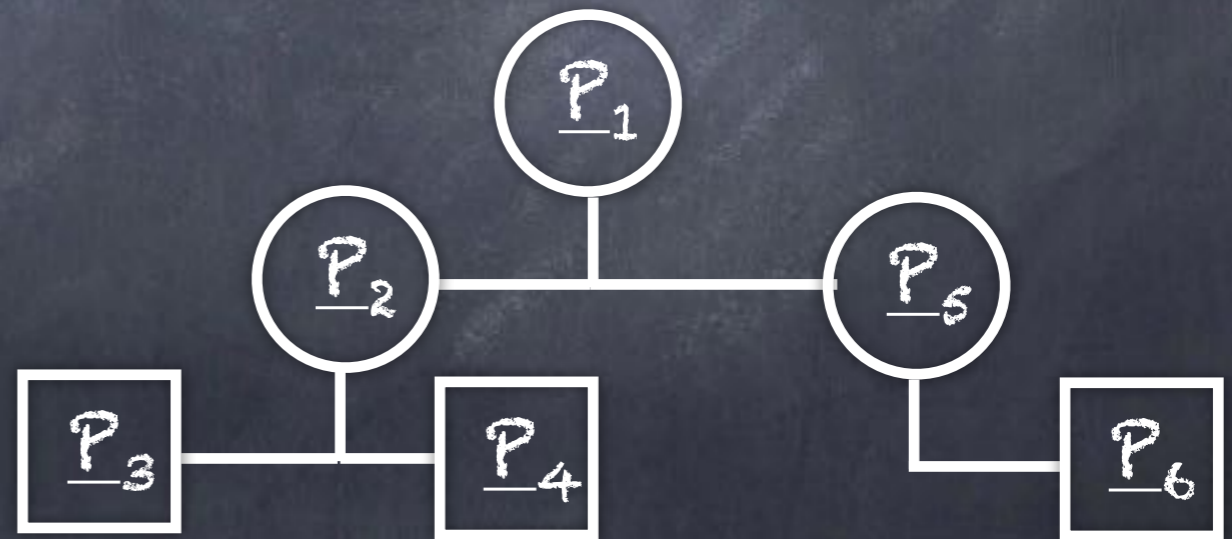
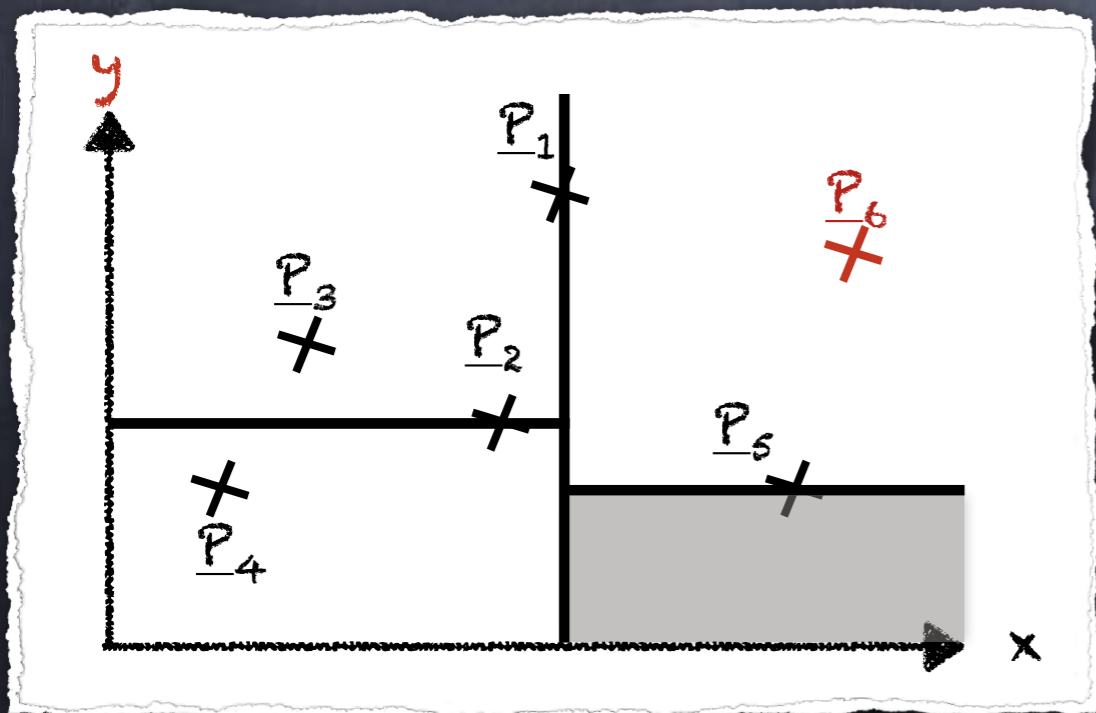
# I. b) Des coordonnées aux maillages...

## Problème :

Dans une liste de 23 million de points, comment déterminer efficacement le(s) plus proche(s) voisin(s) ?

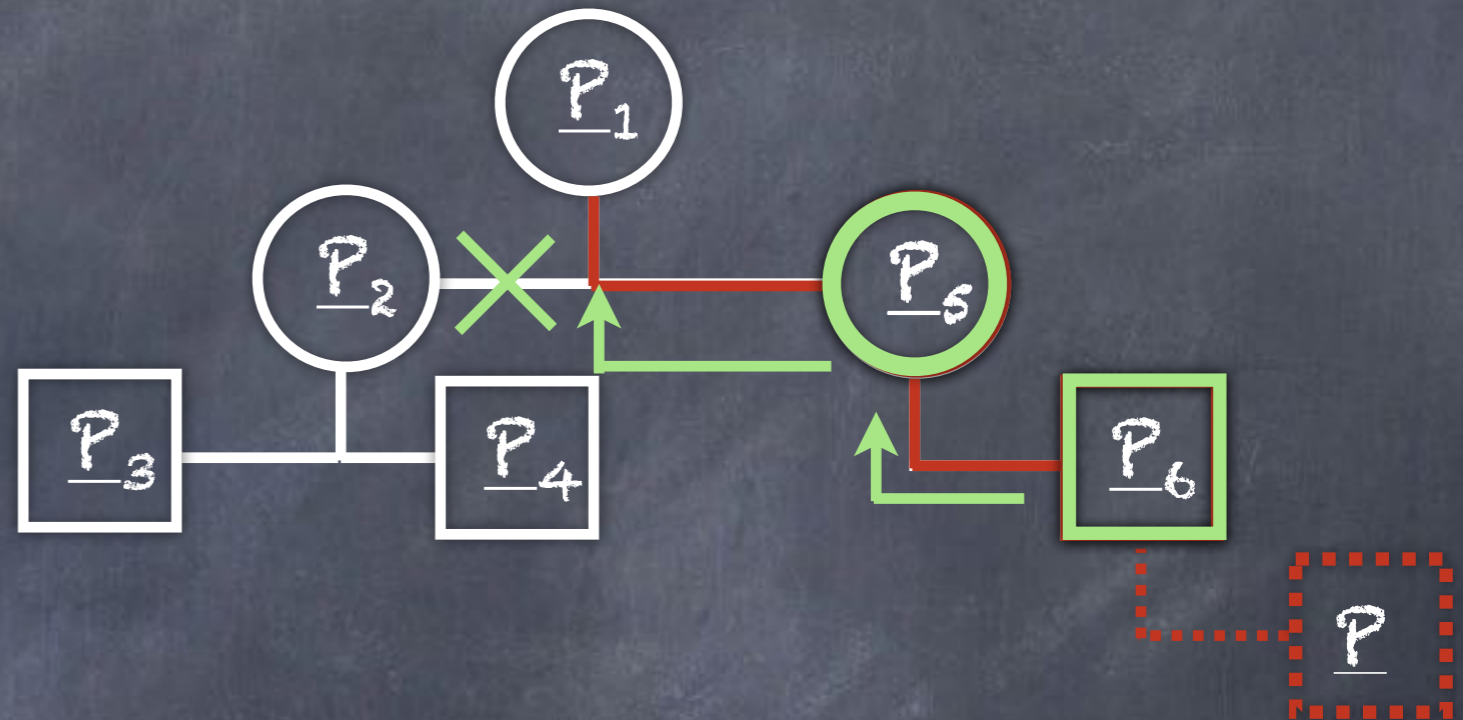
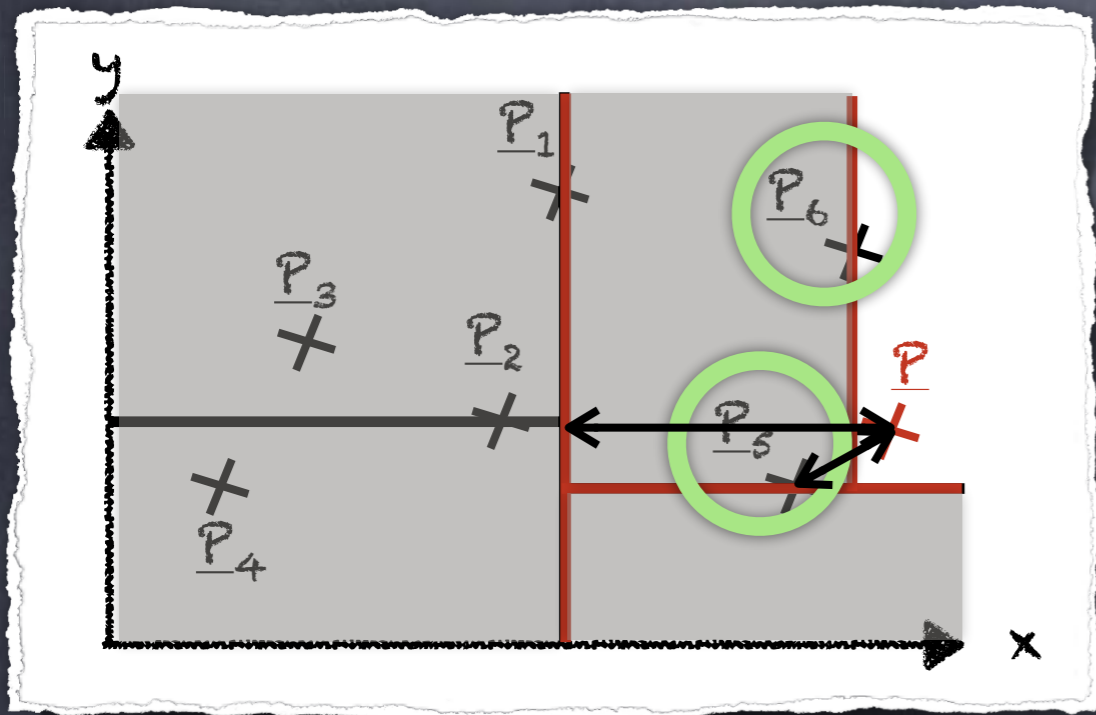
On a besoin d'une structure de données adaptée :  
Les Arbres - 2D (ou plus généralement kD)

Exemple de construction d'un arbre 2D :



# I. b) Des coordonnées aux maillages...

Détermination du plus proche voisin

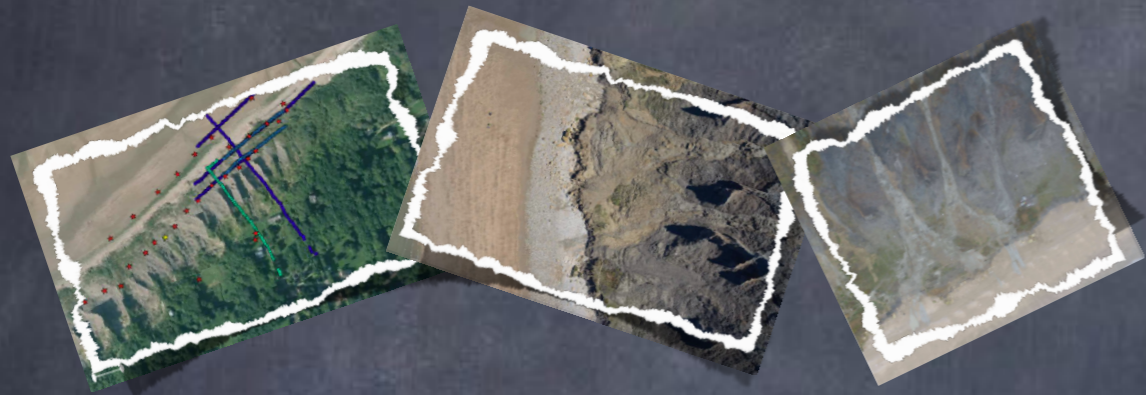


1. Déterminer la position de  $\underline{P}$  dans l'arbre.
2. On remonte l'arbre pour déterminer le point le plus proche

Plus proche voisin :  ~~$\underline{P}_6$~~   $\underline{P}_5$

# I. c) Résumé

En conclusion sur la première partie :



Photos

Photogrammétrie

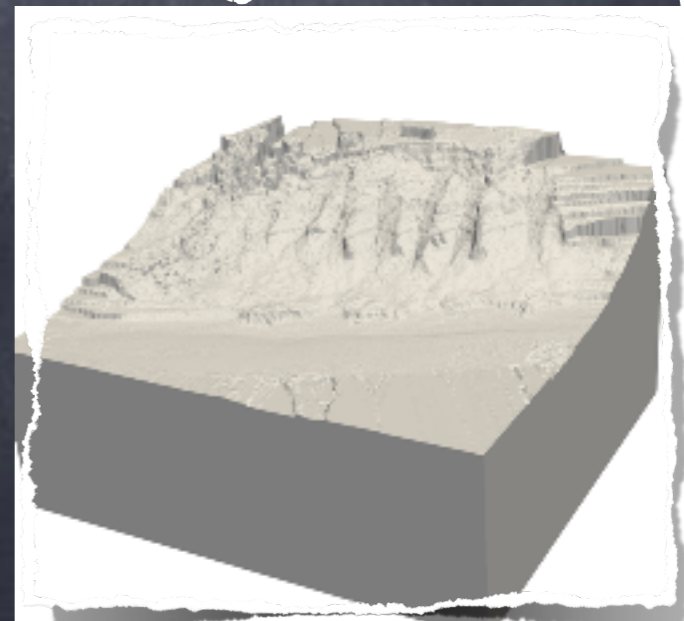


Nuage de points

Déformation maillage +  
Interpolation



Maillage volumique



# Au programme...

## Plan :

I. Un peu de contexte...

II. Exploitation des données et MNT

III. Le problème direct

a) Un peu de modélisation

b) Résolution du problème direct

c) Résumé

IV. Le problème inverse

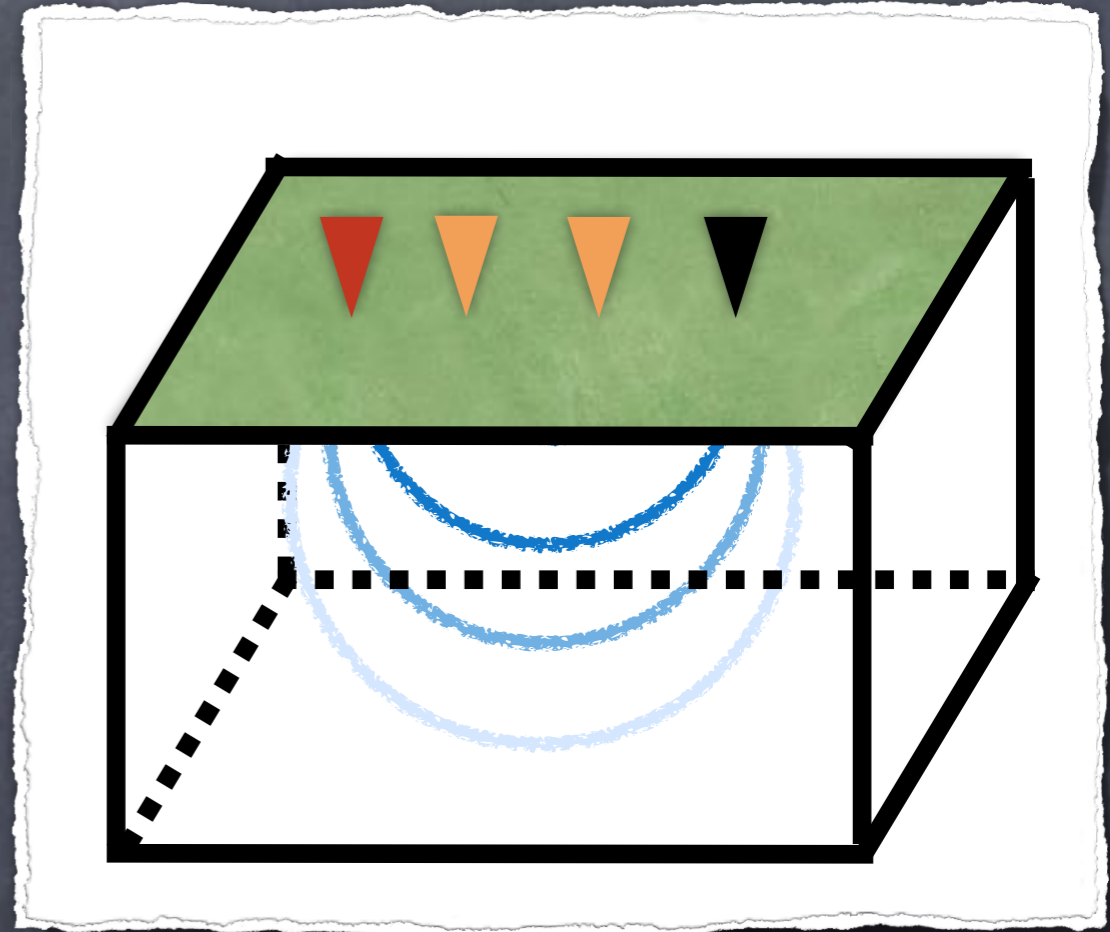
## II. a) Un peu de modélisation

---

### Principe des mesures de résistivité électrique

L'idée est d'injecter un courant entre deux électrodes plantées dans le sol.

On mesure alors le potentiel (tension) en différents points.



## II. a) Un peu de modélisation

### Principe des mesures de résistivité électrique

Notons :

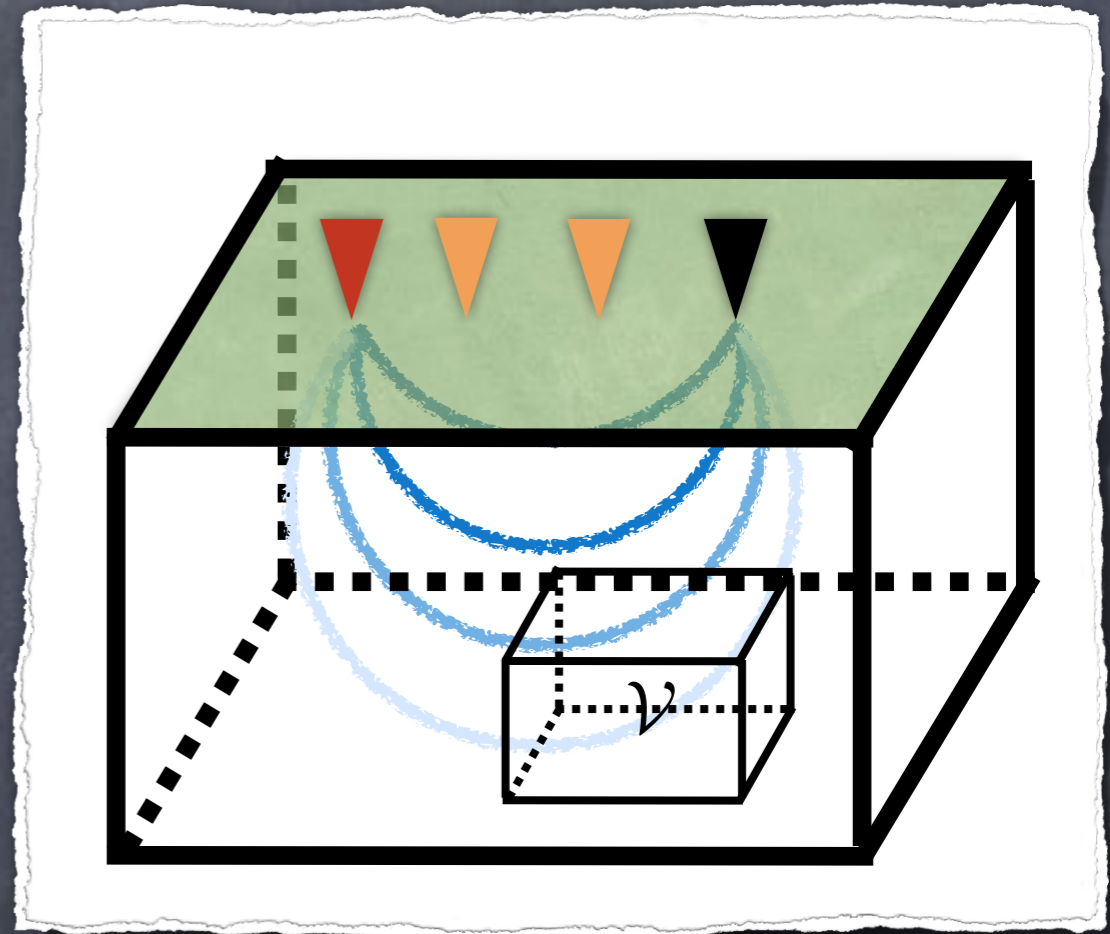
- ⊙  $\underline{E}$  le champ électrique
- ⊙  $\sigma$  la conductivité électrique
- ⊙  $\underline{J}$  la densité de courant
- ⊙  $V$  le potentiel

On a alors :

- ⊙  $\underline{E} = -\underline{\nabla}V$  (Tension  $\Leftrightarrow$  différence de potentiels)

- ⊙  $\underline{J} = \sigma \underline{E}$  (Loi d'Ohm généralisé  $I = (1/R) U$ )

- ⊙  $\int_{\partial V} \underline{J} \cdot \underline{\nu} d\Gamma = 0 \Leftrightarrow \int_V \text{div}(\underline{J}) dV = 0$  (Loi de conservation)



## II. a) Un peu de modélisation

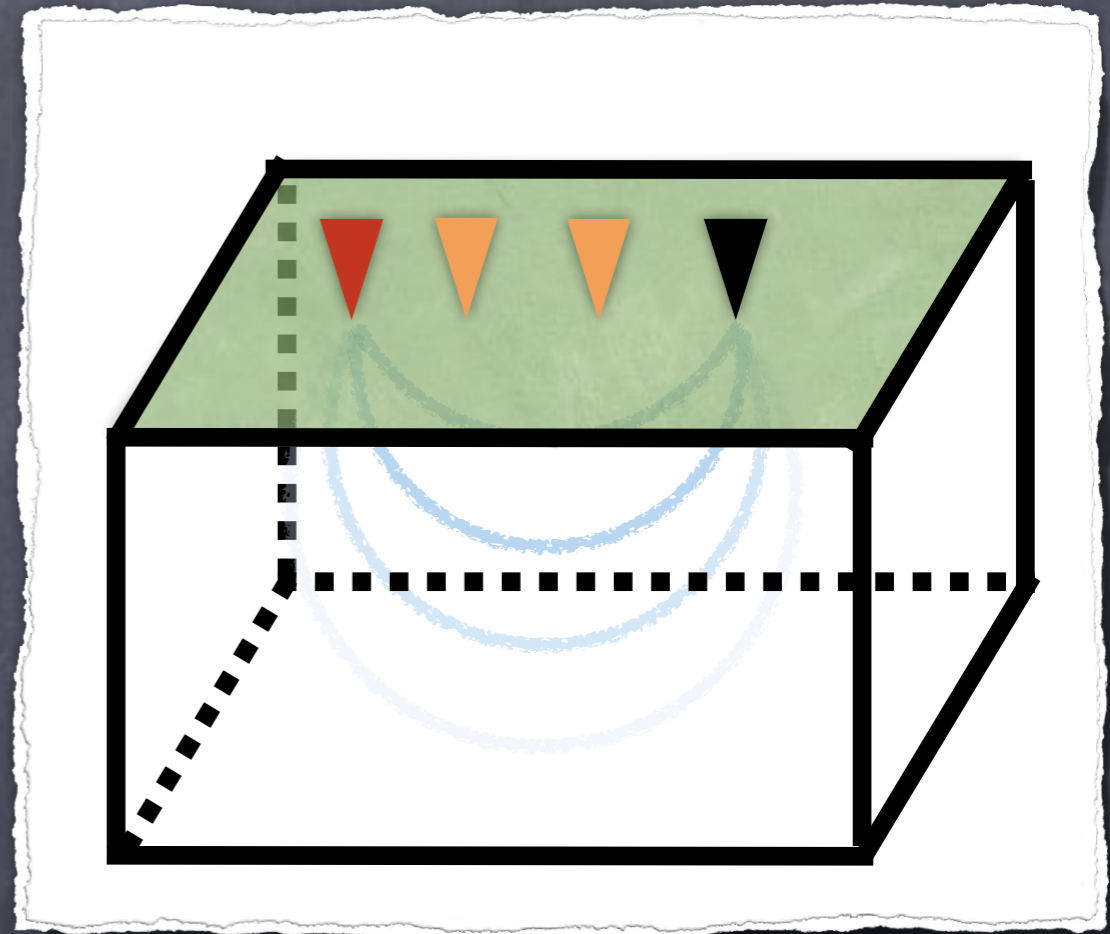
### Principe des mesures de résistivité électrique

Notons :

- ⊙  $\underline{E}$  le champ électrique
- ⊙  $\sigma$  la conductivité électrique
- ⊙  $\underline{J}$  la densité de courant
- ⊙  $V$  le potentiel

On a alors :

$$\left. \begin{array}{l} \text{⊙ } \underline{E} = -\underline{\nabla}V \\ \text{⊙ } \underline{J} = \sigma \underline{E} \end{array} \right\} \longrightarrow \underline{J} = -\sigma \underline{\nabla}V$$
$$\left. \begin{array}{l} \text{⊙ } \underline{J} = -\sigma \underline{\nabla}V \\ \text{⊙ } \underline{\text{div}}(\underline{J}) = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow -\underline{\text{div}}(\sigma \underline{\nabla}V) = 0$$





## II. a) Un peu de modélisation

Formulation du problème (dit direct)

Equation volumique :

$$\underline{-\operatorname{div}(\sigma \underline{\nabla} V) = f \text{ dans } \Omega}$$

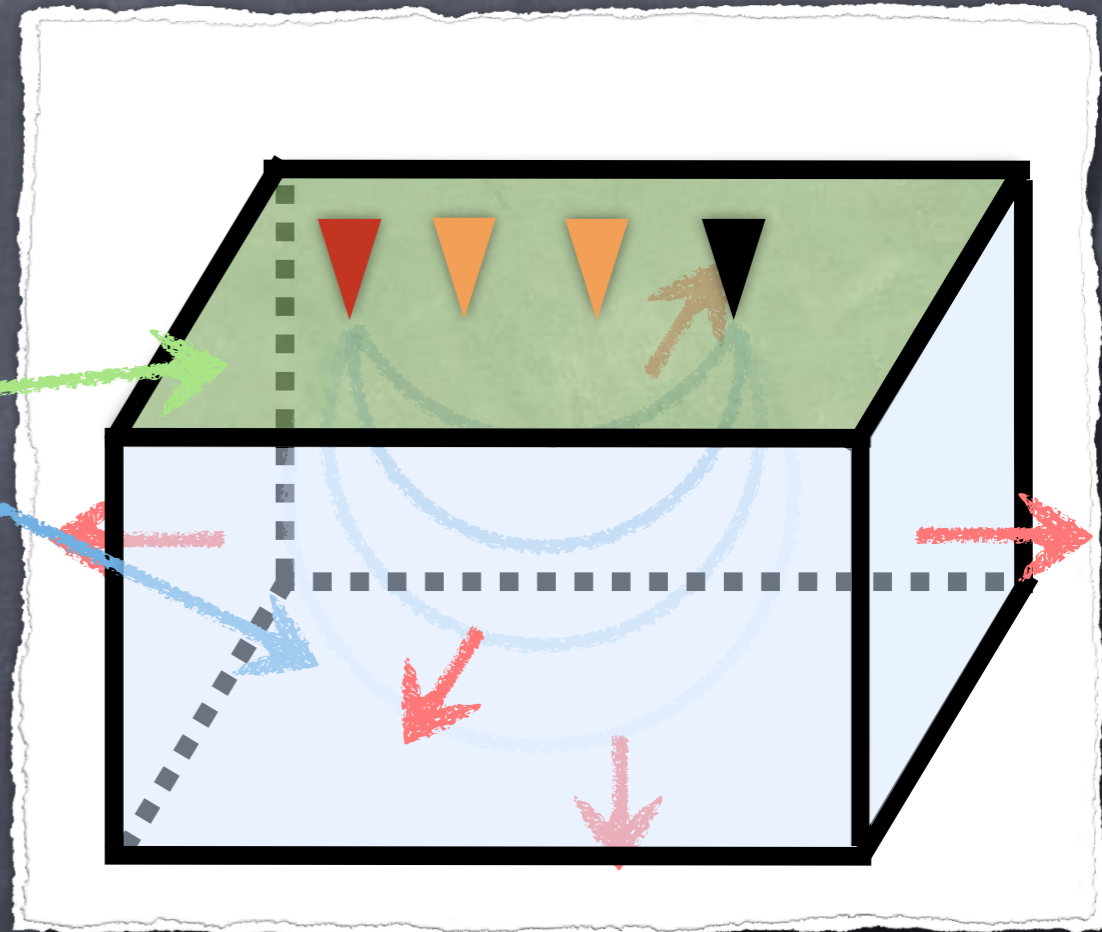
où  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, z \leq S\}$

et  $f$  représente le terme source.

Conditions aux bords :

$$\underline{\sigma \underline{\nabla} V \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ (isolant parfait)}}$$

où  $\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, z = S\} (=S)$



~~Problème bien posé ?~~

Non !

IL manque des conditions à l'infini !

## II. a) Un peu de modélisation

Formulation du problème (dit direct)

Equation volumique :

$$-\text{div}(\sigma \underline{\nabla} V) = f \text{ dans } \Omega$$

où  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, z \leq S\}$

et  $f$  représente le terme source.

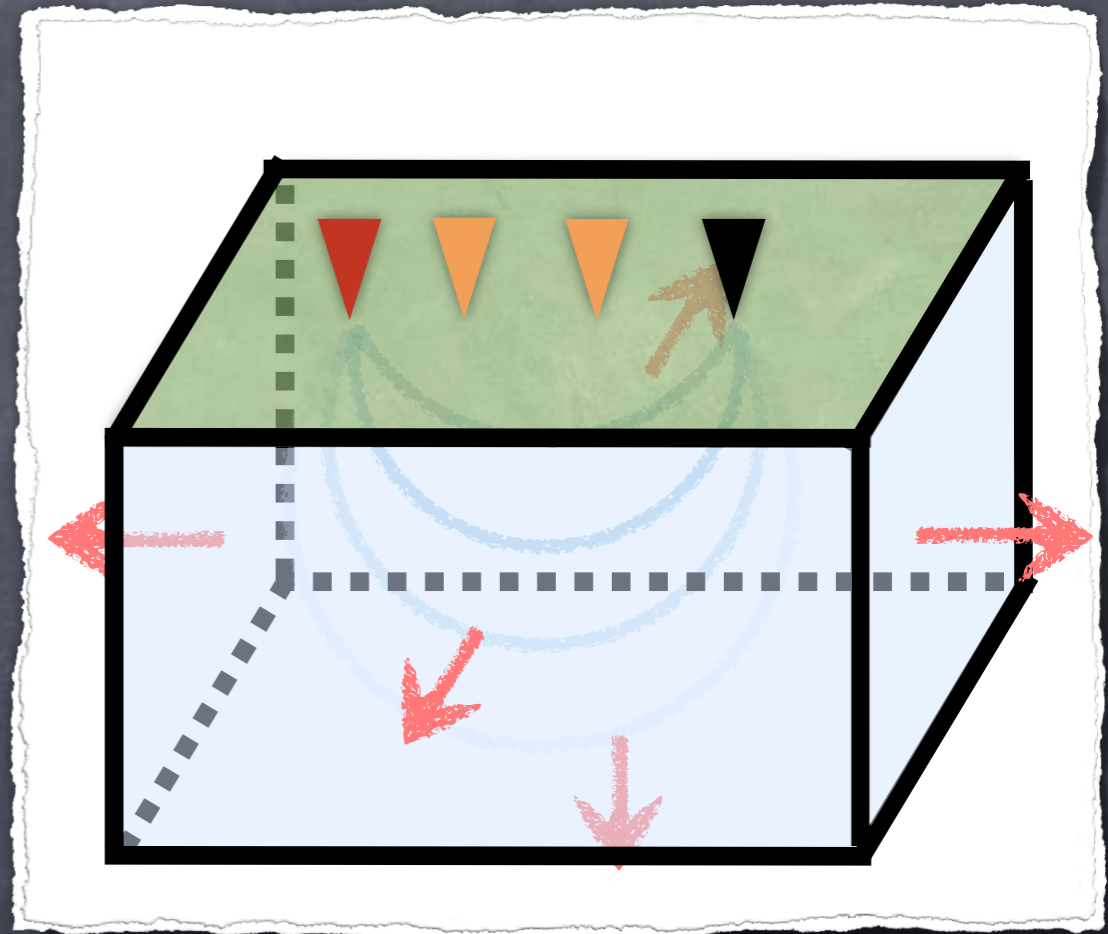
Conditions aux bords :

$$\sigma \underline{\nabla} V \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ (isolant parfait)}$$

où  $\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, z = S\} (=S)$

$$\lim V = 0 \text{ pour } x \rightarrow \pm\infty, y \rightarrow \pm\infty, z \rightarrow -\infty$$

(condition de « radiation »)



## II. a) Un peu de modélisation

Formulation du problème (dit direct)

En domaine non-borné

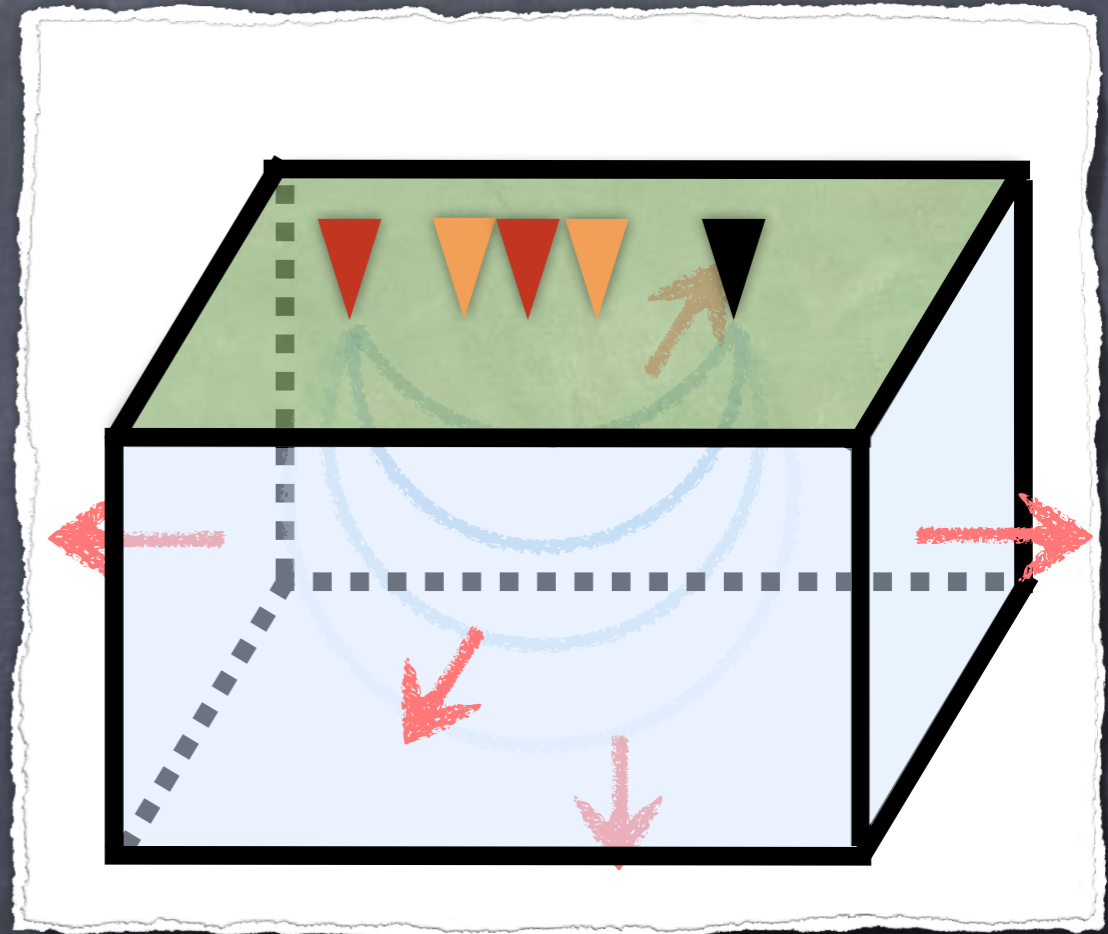
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma \underline{\nabla} V) = f & \text{dans } \Omega \\ \sigma \underline{\nabla} V \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \lim V = 0 & \text{en } \infty \end{cases}$$

Solution fondamentale :

Prenons  $f = \delta_{x,y,z}$ ,  $S = \{z = 0\}$  et  $\sigma = 1$

On a alors comme solution (appelée fonction de Green)

$$V_G = \frac{1}{2\pi r} \quad \text{où} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{détails au (vrai) tableau})$$



## II. b) Résolution du problème direct

Formulation du problème (dit direct)

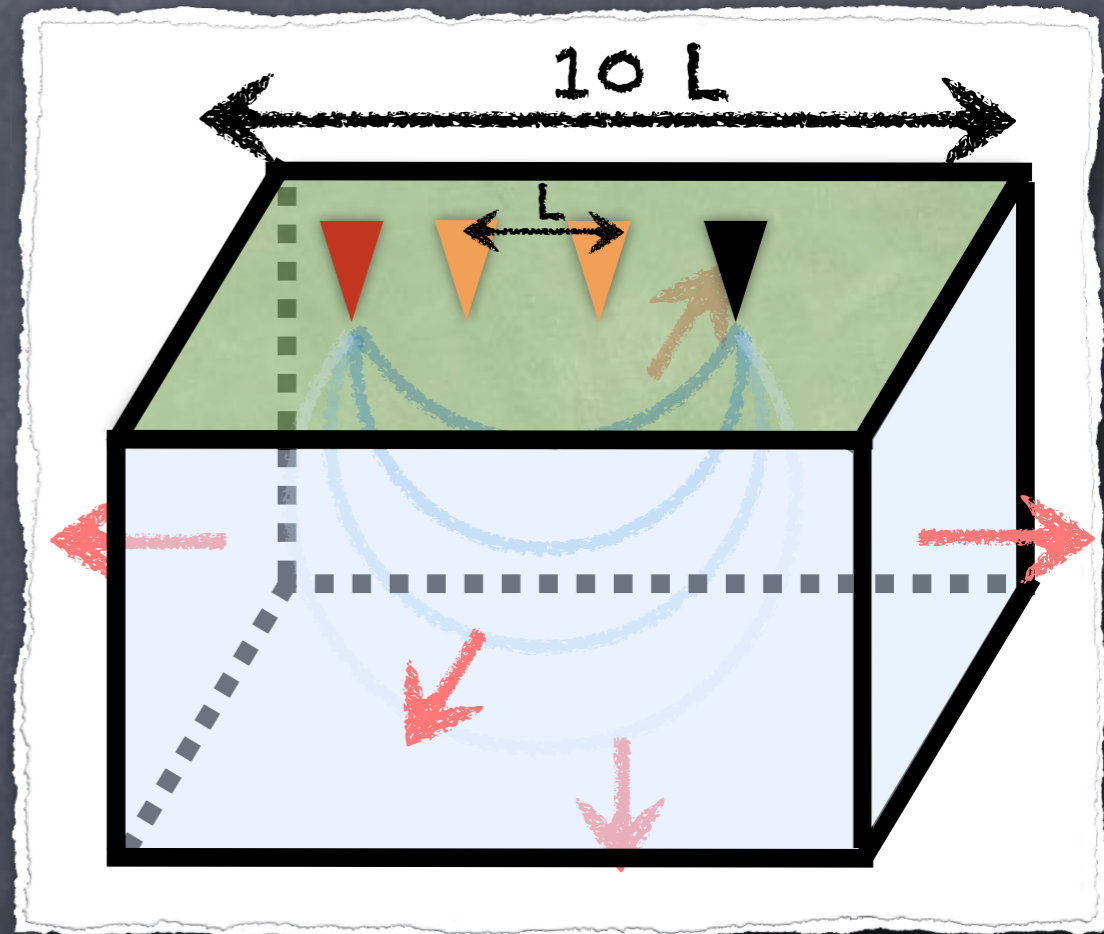
En domaine ~~non~~-borné

$$-\operatorname{div}(\sigma \underline{\nabla} V) = f \text{ dans } \Omega$$

$$\sigma \underline{\nabla} V \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

$$\lim V = 0 \text{ en } \infty$$

$$V = 0 \text{ en } |x|, |y|, -z = R \gg 0$$



En conséquence, le domaine de calcul est généralement posé  $10 \times L$  où  $L$  est l'épaisseur (semi-épaisseur) du domaine d'étude.

Par conséquent, le domaine à mailler est très grand !

## II. b) Résolution du problème direct

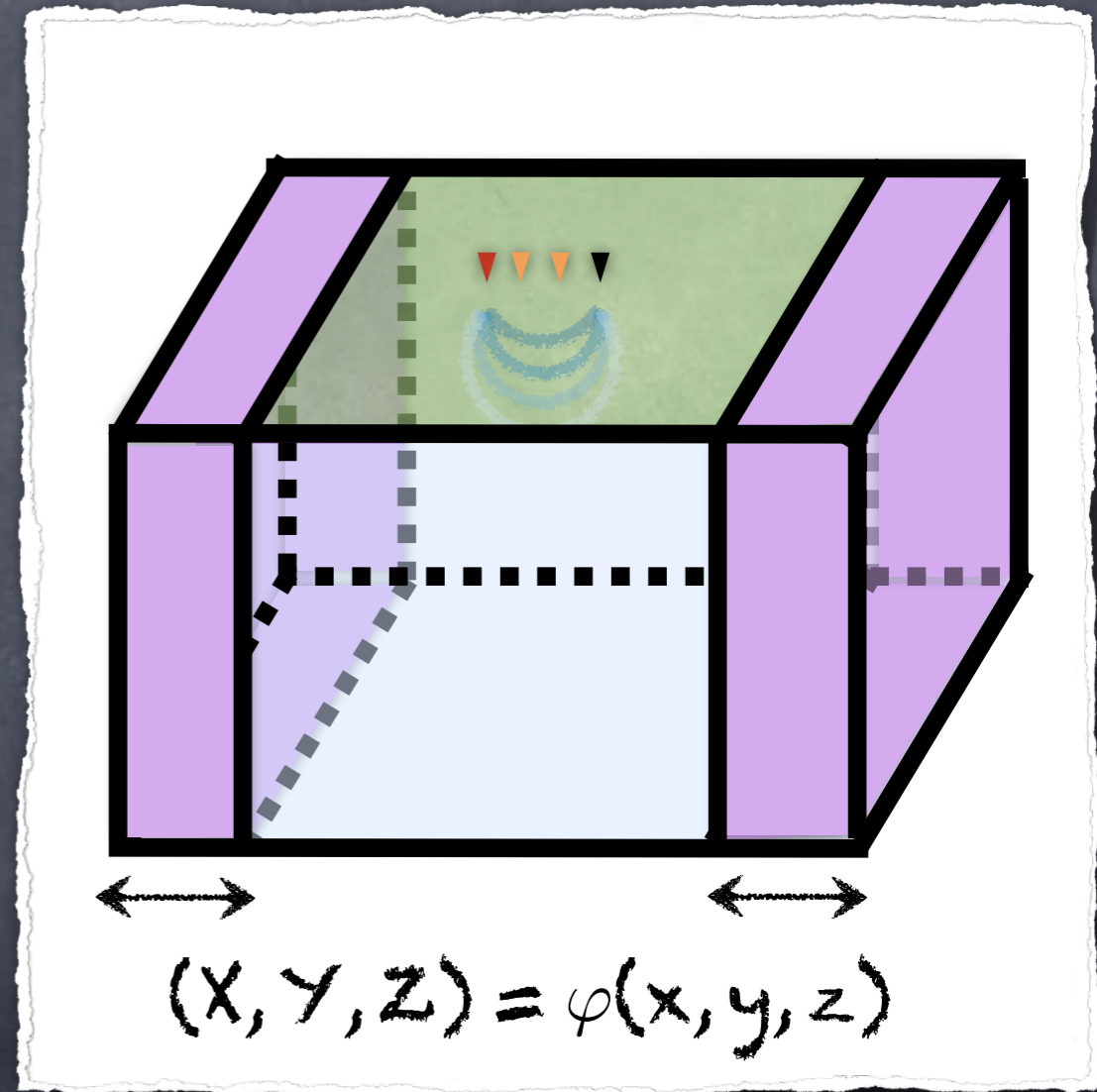
Formulation du problème (dit direct)

En domaine borné

$$-\operatorname{div}(\sigma \underline{\nabla} V) = f \text{ dans } \Omega$$

$$\sigma \underline{\nabla} V \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

$$V = 0 \text{ en } |x|, |y|, -z = R \gg 0$$



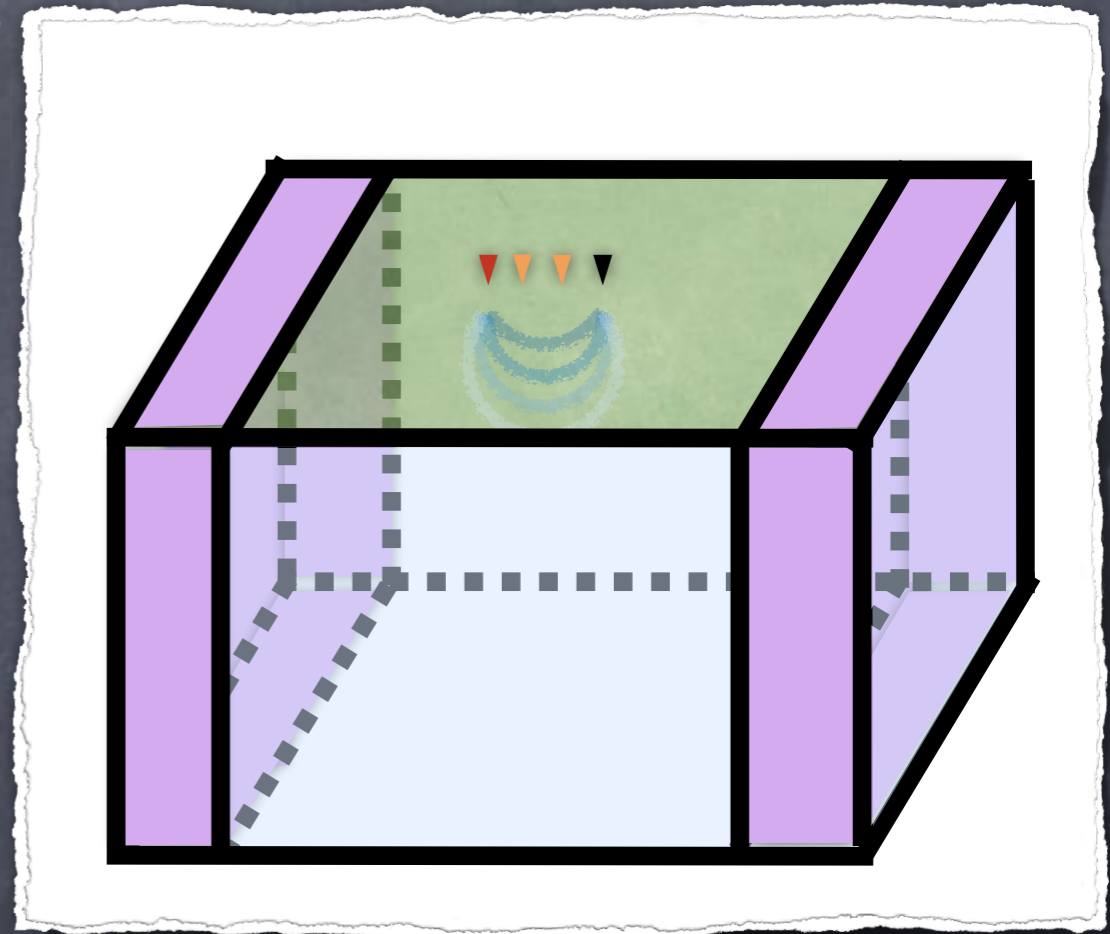
Pour réduire le domaine de calcul, une idée est d'utiliser un **changement de variables** pour « comprimer » le domaine. (détails au (vrai) tableau)

## II. b) Résolution du problème direct

---

**Remarque :** Dans la littérature, pour des problèmes de diffraction, il existe des méthodes plus sophistiquées comme

- ① Les couches absorbantes

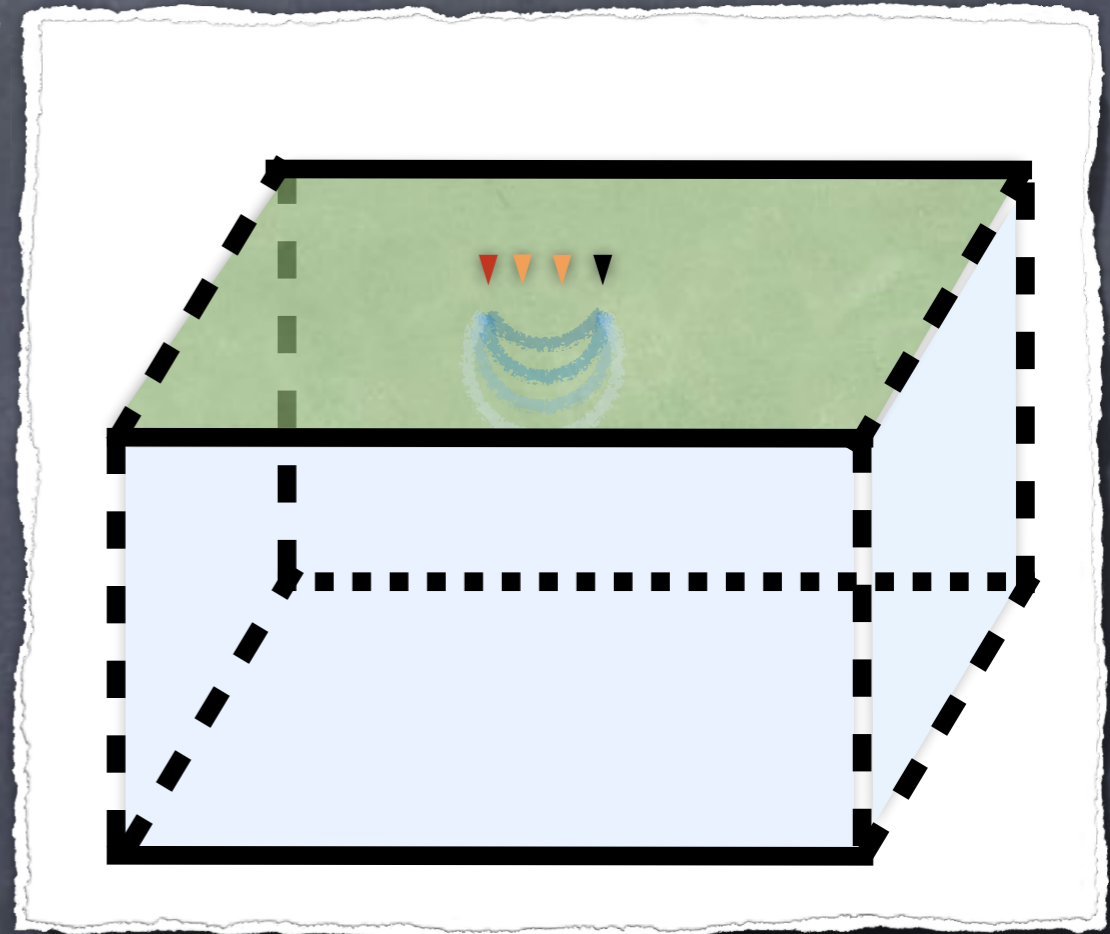


## II. b) Résolution du problème direct

---

**Remarque :** Dans la littérature, pour des problèmes de diffraction, il existe des méthodes plus sophistiquées comme

- ① Les couches absorbantes
- ① Les conditions transparentes ou absorbantes

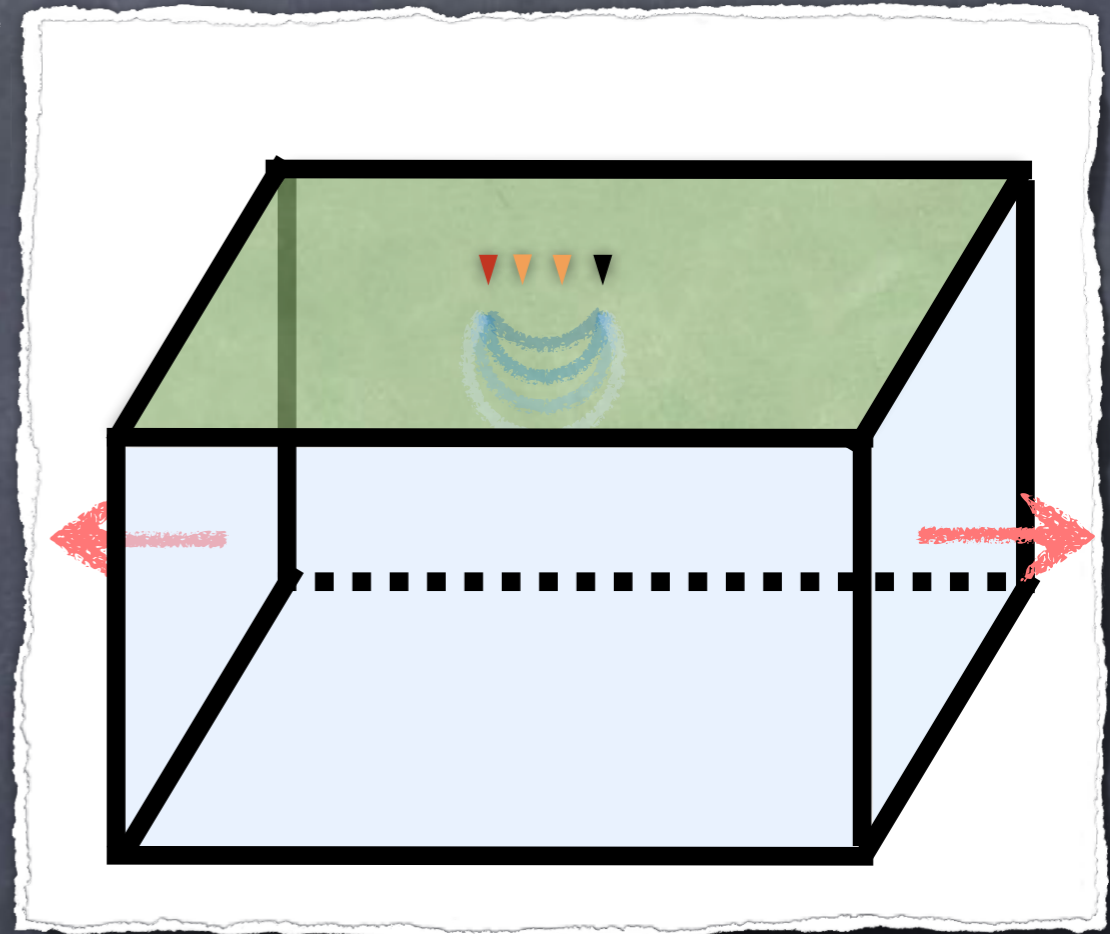


## II. b) Résolution du problème direct

---

**Remarque :** Dans la littérature, pour des problèmes de diffraction, il existe des méthodes plus sophistiquées comme

- ① Les couches absorbantes
- ① Les conditions transparentes ou absorbantes
- ① Les éléments «infinis»



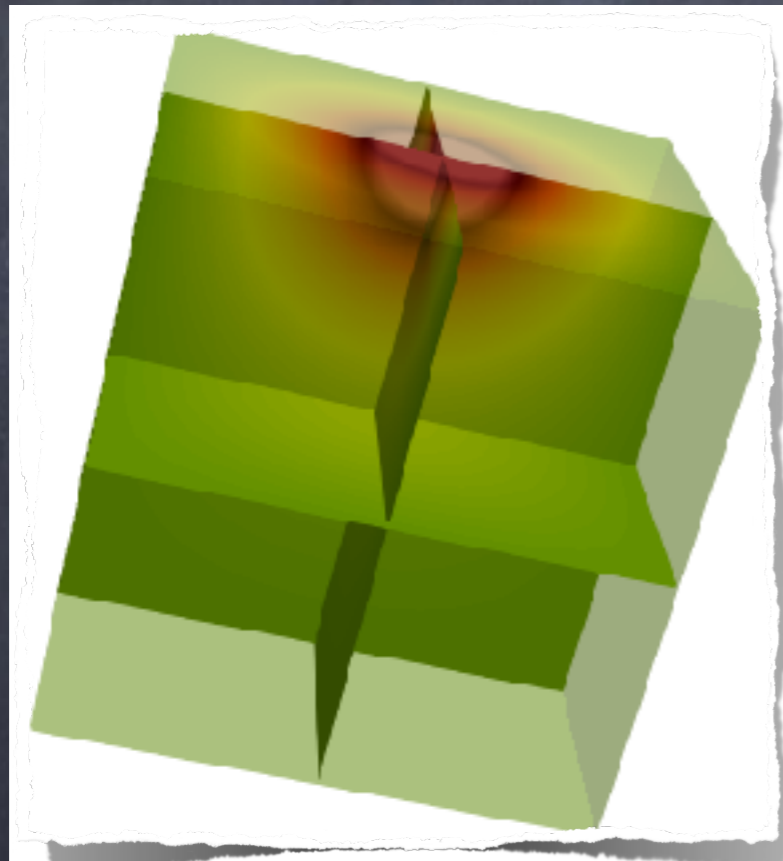


## II. b) Résolution du problème direct

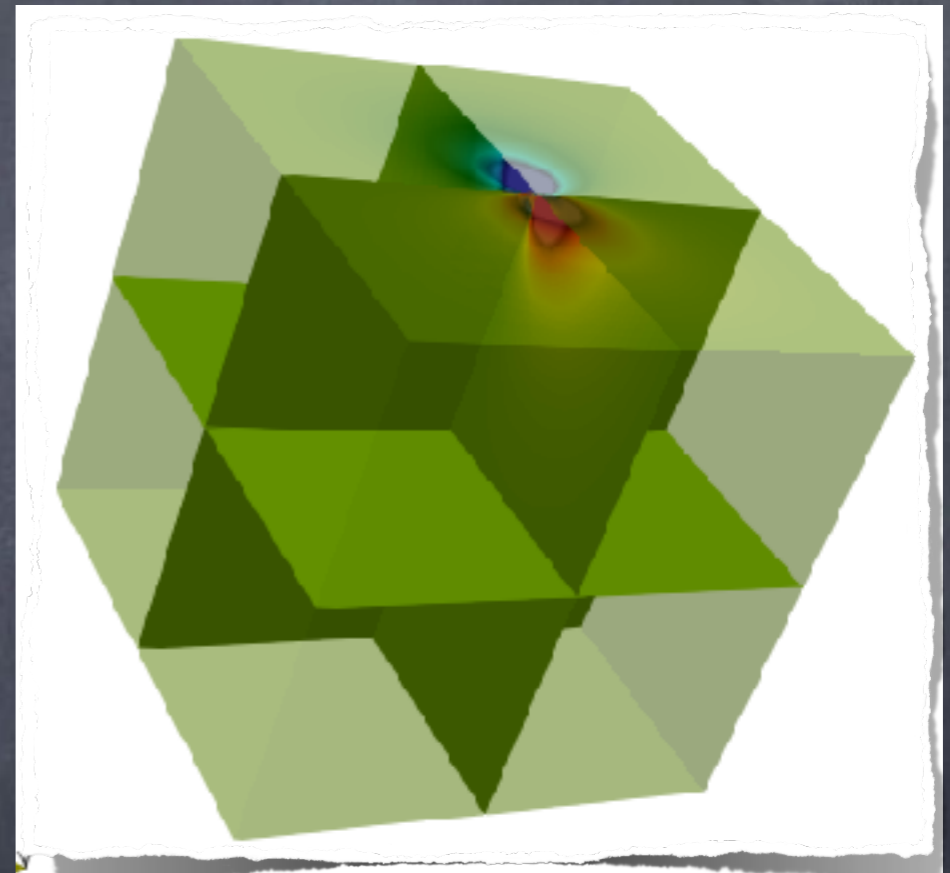
---

Quelques exemples de résolutions :

Milieu homogène



1 électrode



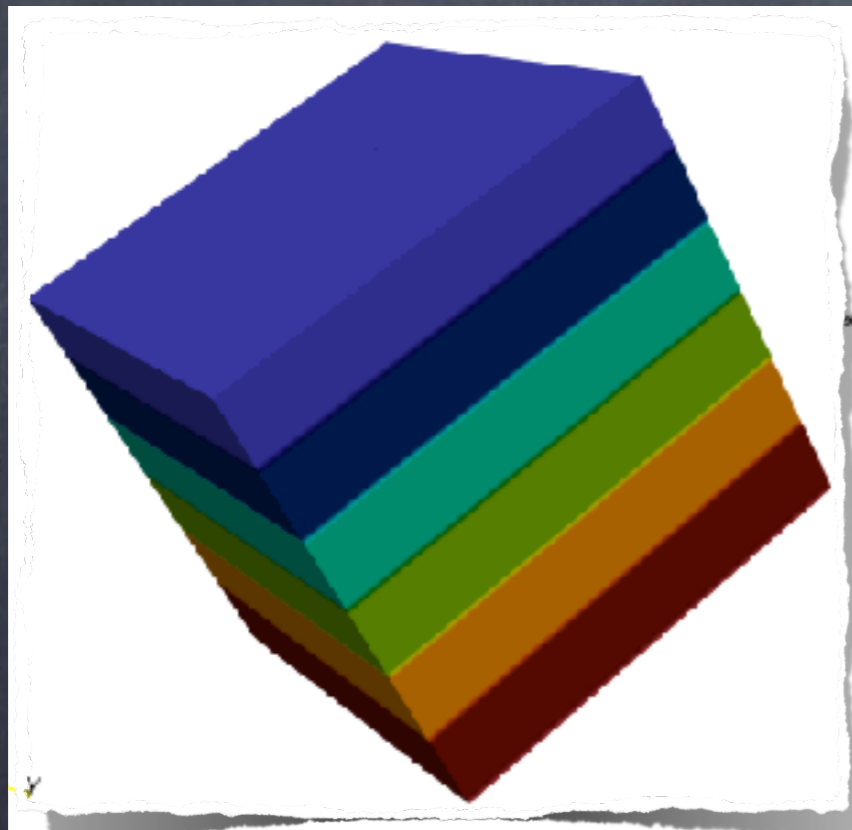
2 électrodes

## II. b) Résolution du problème direct

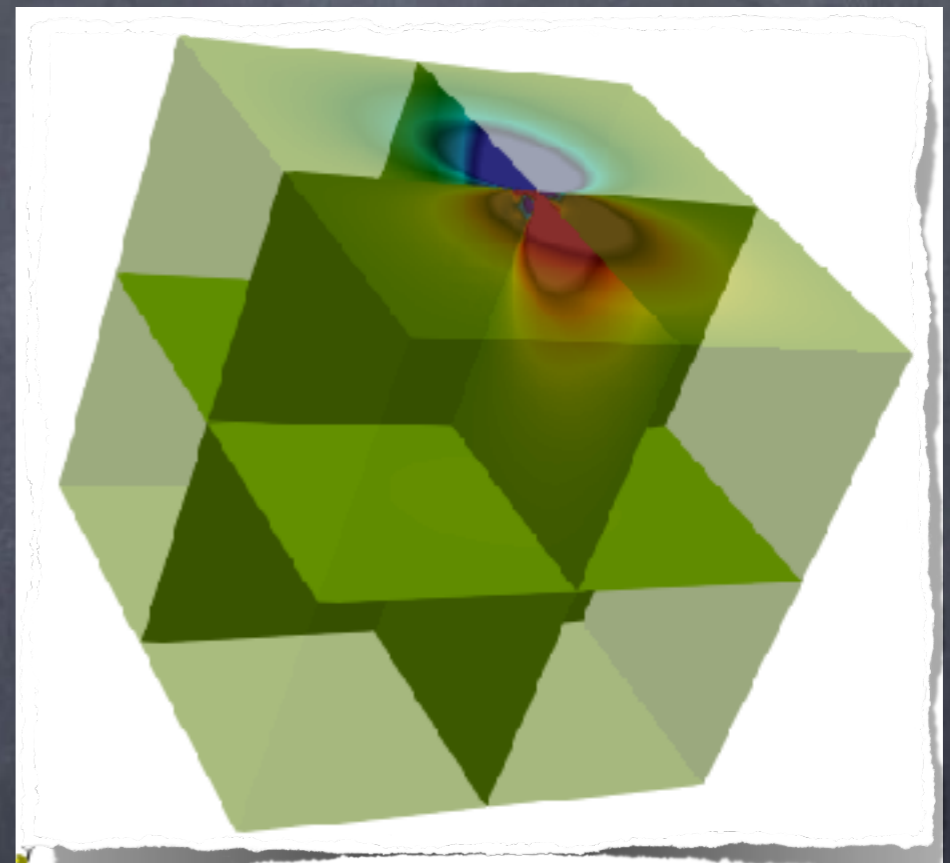
---

Quelques exemples de résolutions :

Milieu hétérogène (stratifié)



Milieu stratifié



2 électrodes

## II. c) Résumé

En conclusion sur la deuxième partie :

### Modèle mathématiques

$$-\operatorname{div}(\sigma \underline{\nabla} V) = f \text{ dans } \Omega$$

$$\sigma \underline{\nabla} V \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

$$\lim V = 0 \text{ en } \infty$$



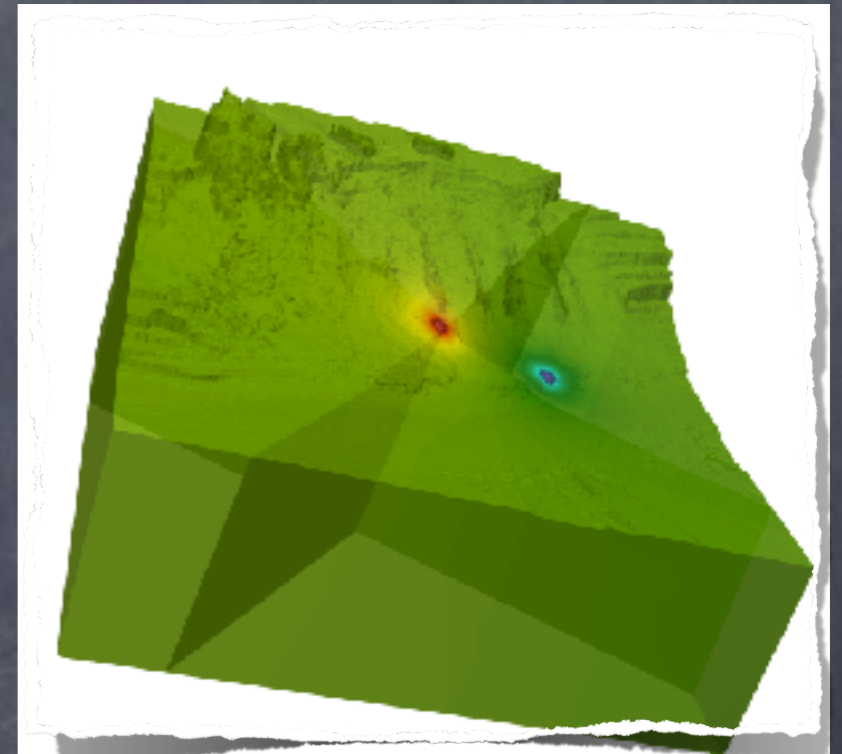
Troncature du  
domaine de calculs

### Formulation en domaine borné

$$-\operatorname{div}(\sigma \underline{\nabla} V) = f \text{ dans } \Omega$$

$$\sigma \underline{\nabla} V \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

$$V = 0 \text{ en } |x|, |y|, -z = R \gg 0$$



### Problème discrétisé

$$KV = F$$



Résolution EF

# Au programme...

## Plan :

I. Un peu de contexte...

II. Exploitation des données et MNT

III. Le problème direct

IV. Le problème inverse

a) Généralités

b) Dans notre cas

c) Résumé

# III. a) Généralités

---

Formulation générale :

Considérons une application  $\underline{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  qui à  $n$  paramètres du modèle associe  $p$  données de mesure.

Objectif (problème inverse)

Connaissant des mesures  $\underline{M}_d (= \underline{F}(\underline{m}_e) + \text{bruit})$

Déterminer les paramètres du modèle  $\underline{m}$  t.q.  $\underline{M}_d \simeq \underline{F}(\underline{m})$

Remarque : Si on veut résoudre  $\underline{M}_d = \underline{F}(\underline{m})$ , alors on a

- ⊙ pour  $n < p$ , aucune solution en général
- ⊙ pour  $n = p$ , une solution dans le « meilleur » des cas
- ⊙ pour  $n > p$ , une infinité de solutions en général

# III. a) Généralités

---

Formulation générale :

Considérons une application  $\underline{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  qui à  $n$  paramètres du modèle associe  $p$  données de mesure.

Objectif (problème inverse)

Connaissant des mesures  $\underline{M}_d (= \underline{F}(\underline{m}_e) + \text{bruit})$

Déterminer les paramètres du modèle  $\underline{m}$  t.q.  $\underline{M}_d \simeq \underline{F}(\underline{m})$

Plus précisément, on peut formuler le problème inverse comme suit :

Trouver  $\underline{m} \in \mathbb{R}^n$  qui minimise  $\|\underline{M}_d - \underline{F}(\underline{m})\|$

Remarque : On peut faire différent choix de norme...

# III. a) Généralités

---

Problème inverse (cas général) :

Trouver  $\underline{m} \in \mathbb{R}^n$  qui minimise  $\|\underline{M}_d - \underline{F}(\underline{m})\|_2$

Supposons pour l'instant  $\underline{F}$  linéaire, i.e.  $\underline{F}(\underline{m}) = \underline{F}\underline{m}$

Pour résoudre le problème de minimisation, on a deux approches :

- ① Résoudre l'équation normale  $\underline{F}^t \underline{F} \underline{m} = \underline{F}^t \underline{M}_d$
- ② Utiliser la factorisation  $\underline{F} = \underline{Q}\underline{R}$

$$\min \|\underline{M}_d - \underline{F}\underline{m}\|_2 \Leftrightarrow \underline{R}\underline{m} = \underline{Q}^t \underline{M}_d$$

(détails au (vrai) tableau)

## III. a) Généralités

---

Problème inverse (cas général) :

Trouver  $\underline{m} \in \mathbb{R}^n$  qui minimise  $\|\underline{M}_d - \underline{F}(\underline{m})\|_2$

Seulement, l'application  $\underline{F}$  est en général **non linéaire**...

Algorithme de Gauss-Newton

**Idée** : Linéariser la fonction  $\underline{F}(\underline{m} + \underline{\delta m}) \simeq \underline{F}(\underline{m}) + \underline{J}_m \underline{\delta m}$

Le problème de minimisation devient alors

Trouver  $\underline{\delta m} \in \mathbb{R}^n$  qui minimise  $\|\underline{M}_d - \underline{F}(\underline{m}) - \underline{J}_m \underline{\delta m}\|_2$

L'application  $\underline{J}_m$  étant **linéaire**, le problème ci-dessus peut être résolu par les méthodes vues juste avant.



# III. a) Généralités

---

Problème inverse (cas général) :

Trouver  $\underline{m} \in \mathbb{R}^n$  qui minimise  $\|\underline{M}_d - \underline{F}(\underline{m})\|_2$

Seulement, l'application  $\underline{F}$  est en général **non linéaire...**

Algorithme de Gauss-Newton

Tant que  $\|\underline{\delta m}^{(k)}\| \geq \varepsilon$

$$\underline{\delta m}^{(k+1)} = \operatorname{argmin} \|\underline{M}_d - \underline{F}(\underline{m}^{(k)}) - \underline{J}_{\underline{m}^{(k)}} \underline{\delta m}\|_2$$

$$\underline{m}^{(k+1)} = \underline{m}^{(k)} + \underline{\delta m}^{(k+1)}$$

**Remarque :** Pour mettre en oeuvre cet algorithme, il faudra un choix initial de paramètres  $\underline{m}$ .

# III. a) Généralités

Problème inverse (cas général) :

Trouver  $\underline{m} \in \mathbb{R}^n$  qui minimise  $\|\underline{M}_d - \underline{\mathcal{F}}(\underline{m})\|_2$

Seulement, l'application  $\underline{\mathcal{F}}$  est en général **non linéaire**...

Algorithme de Gauss-Newton

Tant que  $\|\delta \underline{m}^{(k)}\| \geq \varepsilon$

$$\delta \underline{m}^{(k+1)} = \operatorname{argmin} \|\underline{M}_d - \underline{\mathcal{F}}(\underline{m}^{(k)}) - \mathcal{J}_{\underline{m}^{(k)}} \delta \underline{m}\|_2$$

$$\underline{m}^{(k+1)} = \underline{m}^{(k)} + \delta \underline{m}^{(k+1)}$$

**Remarque 2** : D'autres approches sont aussi possibles pour résoudre le problème de minimisation initiale...

Notons qu'elles nécessitent d'évaluer la Jacobienne  $\mathcal{J}_m$

### III. b) Dans notre cas

---

Problème direct (rappel) :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma \underline{\nabla} v) = f \text{ dans } \Omega \\ \sigma \underline{\nabla} v \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ v = 0 \text{ en } |x|, |y|, -z = R \gg 0 \end{cases}$$

Connaissant  $\sigma$  et  $f$   
→ Déduire  $v$

Problème inverse :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma \underline{\nabla} v) = f \text{ dans } \Omega \\ \sigma \underline{\nabla} v \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ v = 0 \text{ en } |x|, |y|, -z = R \gg 0 \end{cases}$$

Connaissant  $v$  et  $f$   
→ Déduire  $\sigma$

**Remarque :** Plus précisément, on connaît  $v$  uniquement aux électrodes pour une série de sources  $f$ .

### III. b) Dans notre cas

---

Problème direct (discrétisé) :  $\mathbb{K}_\sigma \underline{v}^{(i)} = \underline{F}^{(i)}$ ,  $i = \{1, \dots, N_e\}$

Problème inverse : Trouver  $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^n$  qui minimise  $\|\underline{M}_d - \underline{F}(\underline{\sigma})\|_2$

où :  $\odot$   $\underline{M}_d = (\underline{M}_d^{(1)} \dots \underline{M}_d^{(N_e)})^t$  représente la mesure du potentiel en chaque électrode pour chaque injection

$$\underline{M}_d^{(i)} = \underline{v}^{(i)}_{n_e \in \{1, \dots, N_e\} \setminus i} \text{ (+bruit)} \quad i = \{1, \dots, N_e\}$$

$\odot$   $\underline{F} = (\underline{F}^{(1)} \dots \underline{F}^{(N_e)})^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est définie par

$$\underline{F}^{(i)}(\underline{\sigma}) = (\mathbb{K}_\sigma^{-1} \underline{F}^{(i)})_{n_e \in \{1, \dots, N_e\} \setminus i} \quad i = \{1, \dots, N_e\}$$

Remarque : Ici on a  $p = (N_e - 1) \times N_e$

### III. b) Dans notre cas

---

Problème direct (discrétisé) :  $\mathbb{K}_\sigma \underline{v}^{(i)} = \underline{F}^{(i)}$ ,  $i = \{1, \dots, N_e\}$

Problème inverse : Trouver  $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^n$  qui minimise  $\|\underline{M}_d - \underline{F}(\underline{\sigma})\|_2$

où :  $\odot$   $\underline{M}_d = (\underline{M}_d^{(1)} \dots \underline{M}_d^{(N_e)})^t$  représente la mesure du potentiel en chaque électrode pour chaque injection

$$\underline{M}_d^{(i)} = \underline{v}^{(i)}_{n_e \in \{1, \dots, N_e\} \setminus i} \text{ (+bruit)} \quad i = \{1, \dots, N_e\}$$

$\odot$   $\underline{F} = (\underline{F}^{(1)} \dots \underline{F}^{(N_e)})^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est définie par

$$\underline{F}^{(i)}(\underline{\sigma}) = (\mathbb{K}_{\underline{\sigma}}^{-1} \underline{F}^{(i)})_{n_e \in \{1, \dots, N_e\} \setminus i} \quad i = \{1, \dots, N_e\}$$

**Remarque 2** : On considèrera la conductivité  $\sigma$  constante sur chaque maille  $K$ , donc  $n = \text{Nb}(\text{Mailles})$ .

### III. b) Dans notre cas

---

Problème direct (discrétisé) :  $\mathbb{K}_\sigma \underline{v}^{(i)} = \underline{F}^{(i)}$ ,  $i = \{1, \dots, N_e\}$

Problème inverse : Trouver  $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^n$  qui minimise  $\|\underline{M}_d - \underline{F}(\underline{\sigma})\|_2$

**Objectif** : Calculer la Jacobienne  $\mathcal{J}_m$

Pour ce faire, commençons par noter que  $\mathbb{K}_{\sigma+\delta\sigma} = \mathbb{K}_\sigma + \mathbb{K}_{\delta\sigma}$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_{\sigma+\delta\sigma}^{-1} &= (\mathbb{K}_\sigma + \mathbb{K}_{\delta\sigma})^{-1} \\ &= (\mathbb{I} + \mathbb{K}_\sigma^{-1} \mathbb{K}_{\delta\sigma})^{-1} \mathbb{K}_\sigma^{-1} \\ &= \left[ \sum_{i \geq 0} (-1)^i (\mathbb{K}_\sigma^{-1} \mathbb{K}_{\delta\sigma})^i \right] \mathbb{K}_\sigma^{-1}\end{aligned}$$

(série de Neumann  $\|\delta\sigma\| \ll 1$ )

### III. b) Dans notre cas

---

Problème direct (discrétisé) :  $\mathbb{K}_\sigma \underline{v}^{(i)} = \underline{F}^{(i)}$ ,  $i = \{1, \dots, N_e\}$

Problème inverse : Trouver  $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^n$  qui minimise  $\|\underline{M}_d - \underline{F}(\underline{\sigma})\|_2$

**Objectif :** Calculer la Jacobienne  $\mathcal{J}_m$

Pour ce faire, commençons par noter que  $\mathbb{K}_{\sigma+\delta\sigma} = \mathbb{K}_\sigma + \mathbb{K}_{\delta\sigma}$

Par conséquent, on a :

$$\mathbb{K}_{\sigma+\delta\sigma}^{-1} = \mathbb{K}_\sigma^{-1} - \mathbb{K}_\sigma^{-1} \mathbb{K}_{\delta\sigma} \mathbb{K}_\sigma^{-1} + \dots$$

On déduit ainsi le linéarisé de  $\mathbb{K}_{\sigma+\delta\sigma}^{-1} \simeq \mathbb{K}_\sigma^{-1} - \mathbb{K}_\sigma^{-1} \mathbb{K}_{\delta\sigma} \mathbb{K}_\sigma^{-1}$

### III. b) Dans notre cas

---

Problème direct (discrétisé) :  $\mathbb{K}_\sigma \underline{v}^{(i)} = \underline{F}^{(i)}$ ,  $i = \{1, \dots, N_e\}$

Problème inverse : Trouver  $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^n$  qui minimise  $\|\underline{M}_d - \underline{F}(\underline{\sigma})\|_2$

**Objectif :** Calculer la Jacobienne  $\mathcal{J}_m$

On a d'une part :  $\mathbb{K}_{\sigma+\delta\sigma}^{-1} - \mathbb{K}_\sigma^{-1} = -\mathbb{K}_\sigma^{-1} \mathbb{K}_{\delta\sigma}^{-1} \mathbb{K}_\sigma^{-1} + \dots$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \underline{\delta v}^{(i)} &= (\mathbb{K}_{\sigma+\delta\sigma}^{-1} - \mathbb{K}_\sigma^{-1}) \underline{F}^{(i)} \\ &= -\mathbb{K}_\sigma^{-1} \mathbb{K}_{\delta\sigma} \mathbb{K}_\sigma^{-1} \underline{F}^{(i)} + \dots = -\mathbb{K}_\sigma^{-1} \mathbb{K}_{\delta\sigma} \underline{v}^{(i)} + \dots \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}} \\ &= \underline{v}^{(i)} \end{aligned}$$



### III. b) Dans notre cas

---

Problème direct (discrétisé) :  $\mathbb{K}_\sigma \underline{v}^{(i)} = \underline{F}^{(i)}$ ,  $i = \{1, \dots, N_e\}$

Problème inverse : Trouver  $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^n$  qui minimise  $\|\underline{M}_d - \underline{F}(\underline{\sigma})\|_2$

**Objectif :** Calculer la Jacobienne  $\mathcal{J}_m$

On a d'une part :  $\mathbb{K}_{\sigma+\delta\sigma}^{-1} - \mathbb{K}_\sigma^{-1} = -\mathbb{K}_\sigma^{-1} \mathbb{K}_{\delta\sigma}^{-1} \mathbb{K}_\sigma^{-1} + \dots$

et d'autre part :

$$\underline{\delta v}^{(i)} = -\mathbb{K}_\sigma^{-1} \mathbb{K}_{\delta\sigma} \underline{v}^{(i)} + \dots$$

Effectuons le produit scalaire par  $\underline{F}^{(j)}$  pour déduire :

$$\begin{aligned} (\underline{\delta v}^{(i)}, \underline{F}^{(j)}) &= -(\mathbb{K}_\sigma^{-1} \mathbb{K}_{\delta\sigma} \underline{v}^{(i)}, \underline{F}^{(j)}) + \dots \\ &= -\left( \mathbb{K}_{\delta\sigma} \underline{v}^{(i)}, \underbrace{\mathbb{K}_\sigma^{-t} \underline{F}^{(j)}}_{= \underline{v}^{(j)}} \right) + \dots = -(\mathbb{K}_{\delta\sigma} \underline{v}^{(i)}, \underline{v}^{(j)}) + \dots \end{aligned}$$

car  $\mathbb{K}_\sigma^{-t} = \mathbb{K}_\sigma^{-1}$

### III. b) Dans notre cas

---

Problème direct (discrétisé) :  $\mathbb{K}_\sigma \underline{v}^{(i)} = \underline{F}^{(i)}$ ,  $i = \{1, \dots, N_e\}$

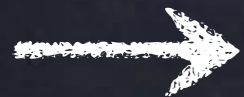
Problème inverse : Trouver  $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^n$  qui minimise  $\|\underline{M}_d - \underline{F}(\underline{\sigma})\|_2$

**Objectif :** Calculer la Jacobienne  $\mathcal{J}_m$

Ainsi, on obtient :  $(\underline{\delta v}^{(i)}, \underline{F}^{(j)}) = -(\mathbb{K}_{\delta\sigma} \underline{v}^{(i)}, \underline{v}^{(j)}) + \dots$

En rappelant que  $\underline{F}^{(j)} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$

on déduit que  $(\underline{\delta v}^{(i)}, \underline{F}^{(j)})$  représente la variation du potentiel  $v$  mesurée sur l'électrode  $j$  lorsqu'on perturbe  $\sigma$  par  $\delta\sigma$  (et qu'on injecte en  $i$ ).



C'est exactement ce qu'il faut pour obtenir la matrice Jacobienne !

### III. b) Dans notre cas

---

Problème direct (discrétisé) :  $\mathbb{K}_{\sigma} \underline{v}^{(i)} = \underline{F}^{(i)}$ ,  $i = \{1, \dots, N_e\}$

Problème inverse : Trouver  $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^n$  qui minimise  $\|\underline{M}_d - \underline{F}(\underline{\sigma})\|_2$

**Objectif** : Calculer la Jacobienne  $\mathcal{J}_m$

Ainsi, on obtient :  $(\underline{\delta v}^{(i)}, \underline{F}^{(j)}) = -(\mathbb{K}_{\delta\sigma} \underline{v}^{(i)}, \underline{v}^{(j)}) + \dots$

Soulignons de plus que le terme

$$\left( \mathbb{K}_{\delta\sigma} \underline{v}^{(i)}, \underline{v}^{(j)} \right) = \sum_{K \in \text{Mailles}} (\delta\sigma)_K \left( \nabla \underline{v}^{(i)}, \nabla \underline{v}^{(j)} \right)_K$$

est bien linéaire en  $\delta\sigma$ . (détails au (vrai) tableau)

**Rappel** : On considère la conductivité  $\sigma$  constante sur chaque maille  $K$ .

FIN...

# Au programme...

Plan : I. Un peu de contexte...

II. Exploitation des données et MNT

- a) Des photos aux coordonnées
- b) Des coordonnées au maillage
- c) Résumé

III. Le problème direct

- a) Un peu de modélisation
- b) Résolution du problème direct
- c) Résumé

IV. Le problème inverse

- a) Généralités
- b) Dans notre cas
- c) Résumé