Exercice 1 (Newton-Cotes) : On considère le problème suivant : évaluer numériquement l'intégrale :

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

Pour ce faire, on considère $(n+1)$ points d'interpolation $(x_i)_{i=0,\cdots,n}$ vérifiant $-1 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq 1$. L'idée est de remplacer $f(x)$ par $p_n(x)$ son polynôme d'interpolation pour évaluer l'intégrale.

1. a) À l'aide de l'expression de $p_n(x)$ dans la base de Lagrange, donner la *formule de quadrature* obtenue à l'aide des coefficients A_i^n définis par :

$$A_i^n = \int_{-1}^{1} L_i^n(x)dx$$

où $L_i^n(x)$ est le polynôme de Lagrange de degré n associé au point x_i.
b) Montrer la relation suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} A_i^n = 2$$

2. a) Pour $n = 0$, déduire la *formule de quadrature* obtenue.
b) Pour quelle valeur de x_0 la *formule de quadrature* est-elle exacte sur $\mathbb{P}_1$ (i.e. $\forall f \in \mathbb{P}_1$) ?
c) Donner la *formule de quadrature composite* associée sur un intervalle $[a, b]$ arbitraire et une estimation de l'erreur de quadrature (*ordre* de la méthode).

3. a) Pour $n = 1$, $x_0 = -1$ et $x_1 = 1$ donner la *formule de quadrature* obtenue.
b) Sur quel ensemble $\mathbb{P}_k$ la formule de quadrature est-elle exacte ?
c) Déduire également la *formule de quadrature composite* associée sur un intervalle $[a, b]$ arbitraire et donner l'*ordre de la méthode.*

Exercice 2 (Quadrature de Gauss) : Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction $C^\infty([-1, 1])$. Considérons la formule de quadrature suivante :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq A\left(f(\omega) + f(-\omega)\right), \quad \omega \in [0, 1]. \tag{1}$$

où $A \in \mathbb{R}$ et $\omega \in [0, 1]$ sont deux paramètres.

1. a) Pour quel choix de paramètres A et ω la formule est-elle exacte sur $\mathbb{P}_3$? Peut-elle être exacte sur $\mathbb{P}_4$?
b) Application : À l'aide de la formule obtenue et d'un changement de variable approprié, donner une approximation de $\ln(3)$.

2. Donner la *formule de quadrature composite* associée sur un intervalle $[a, b]$ arbitraire et l'ordre de la méthode.

Exercice 3 (Quadrature Hermite) : On s'intéresse ici à une formule de quadrature du type :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq A_0^{(0)} f(-1) + A_0^{(1)} f'(-1) + A_1^{(0)} f(b) + A_1^{(1)} f'(b)$$

1. Déterminer les valeurs de $A_0^{(0)}, A_1^{(0)}, A_0^{(1)}$ et $A_1^{(1)}$ pour que la formule de quadrature soit exacte sur l'espace $\mathbb{P}_k$ le plus grand possible.

2. a) Soit $p(x) \in \mathbb{P}_4$ le polynôme d'*interpolation d'Hermite* vérifiant $p^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$ et $p^{(i)}(x_1) = f^{(i)}(x_1)$ pour $i = 0, 1$ où $x_0 = -1$ et $x_1 = 1$. Montrer qu'il existe $\xi \in [-1, 1]$ t.q. :

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2$$

b) Donner la *formule de quadrature composite* d'Hermite et déduire de la question précédente une majoration de son erreur.

Exercice 4 (Quadrature Gauss-Lobatto) : Considérons une formule de quadrature de la forme :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} f(x_i)A_i$$

où $-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$. Posons $v(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_n)$.

1. a) Montrer que la formule de quadrature est exacte sur $\mathbb{P}_n$ ssi

$$A_i = \int_{-1}^{1} L_i^{(n)}(x)dx$$

où on rappelle que $L_i^{(n)}(x)$ est la i-ème fonction de base de Lagrange associée au noeud x_i.

b) En rappelant que pour tout polynôme $p(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$ nous avons :

$$p(x) = d(x)v(x) + r(x)$$

où $r(x) \in \mathbb{P}_n$ et $d(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$, montrer que la formule de quadrature est exacte sur $\mathbb{P}_{2n-1}$ ssi :

$$\int_{-1}^{1} v(x)x^j dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \cdots, n-2\}$$

2. En prenant $f(x) = (x+1)(x-x_1)^2 \cdots (x-x_{n-1})^2(x-1)$, montrer que la formule de quadrature ne peut pas être exacte sur $\mathbb{P}_{2n}$.

Exercices de révision :

Exercice 1 (Quadrature de Simpson) : On s'intéresse ici à la formule de *quadrature de Newton-Cotes* à 3 points :

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(2)$$

1. a) À l'aide de la question 1) de l'exercice 1, déterminer A_0, A_1 et A_2.
   b) Sur quel ensemble $\mathbb{P}_k$ la formule est-elle exacte ?

2. a) Montrer l'estimation d'erreur suivante :

$$\left|\int_0^h f(x)dx - h(A_0 f(0) + A_1 f(h/2) + A_2 f(h))\right| \leq C^{ste} h^4$$

   Indication : On pourra montrer et utiliser le fait que :

$$\int_0^1 g(x)v(x)dx = -\int_0^1 g'(x)V(x)dx$$

   où $v(x) = x(x-1/2)(x-1)$ et $V(x)$ est la primitive de $v(x)$ s'annulant en a. Une autre possibilité consiste à poser $p(x) \in \mathbb{P}_3$ le polynôme d'interpolation de f associé à 4 points bien choisis.
   b) Donner la *formule de quadrature composite* et déduire de la question ci-dessus une estimation d'erreur.

Exercice 2 (Formule de Euler - Maclaurin) : Considérons une fonction $f \in C^\infty([0,1])$ et notons :

$$I_1(f) = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right)$$

1. En remarquant que

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 f'(t)q(x,t)dt \quad \text{où} \quad q(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \leq x \\ 0 & \text{si} \quad t > x \end{cases}$$

   montrer que :

$$\int_0^1 f(x)dx \;=\; I_1(f) + \int_0^1 (\frac{1}{2} - t)f'(t)dt$$

2. Généraliser ce résultat en montrant par récurrence

$$\int_0^1 f(x)dx \;=\; I_1(f) + \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^1 f^{(j)}(t)dt + \int_0^1 P_{n+1}(t)f^{(n+1)}(t)dt$$

   où

$$P_{j+1}(x) = \int_0^x (a_j - P_j(t))dt, \quad a_{j+1} = \int_0^1 P_j(t)dt$$

   $a_1 = 0$ et $P_1(x) = 1/2 - x$.
   Indication : On utilisera une intégration par parties en notant que $P_j = a_j P'_{j+1}$ et $P_{j+1}(0) = P_{j+1}(1) = 0$.

3. Montrer également par récurrence que $P_j(x) = (-1)^j P_j(1-x)$ pour tout $x \in [0,1]$, et déduire que les coefficients impaires a_{2i+1} sont nulles.

4. À l'aide de la question précédente, montrer que l'erreur de quadrature composite associée à la *formule des trapèzes* est donnée par :

$$\int_a^b f(x)dx - I_{N,1}(f) = \int_a^b \bar{P}_{2m+2}(x)f^{(2m+2)}(x)dx + \sum_{j=1}^{m} a_{2j}h^{2j}\int_a^b f^{(2j)}(x)dx$$

   où $\bar{P}_{2m+2}(x) = P_{2m+2}((x-x_j)/h)$, $h = (b-a)/N$, $x_j = a + jh$, $N \geq 1$ et

$$I_{N,1}(f) = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j)\right)$$

Applications et programmation :

Exercice 1 (Ordre de convergence) : On s'intéresse ici à vérifier numérique les ordres de convergence théoriques que nous avons obtenue. Pour ce faire, on utilisera l'exemple canonique $f(x) = \sin(x)$ dont on cherchera à évaluer :

$$I = \int_0^{2\pi} \sin(x)dx$$

1. Quel est la valeur exacte de I ?
2. Écrire une fonction f et une fonction *quadratureTrapeze* pour effectuer le calcul numérique de I via la formule des Trapèzes.
3. Dans un programme principale, écrire une boucle pour tester l'évaluation de la quadrature pour plusieurs valeurs de n et tracer la courbe de convergence (en échelle log / log). Retrouver ainsi l'ordre théorique.
4. Faites la même étude mais cette fois pour la quadrature de Gauss à 2 points (implémenter une fonction *quadratureGauss*).
5. Si on considère maintenant le calcul de :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

   a) Quel est la valeur exacte de l'intégrale ?
   b) Quelle méthode vous semble la plus appropriée ?

Exercice 2 (calcul de volume) : Le calcul d'intégrale sert notamment à déterminer le volume sous une courbe. Considérons la fonction de 2 variables $f(x, y) = x^2 + y^2$. On veut évaluer l'intégrale sur le carré $\Omega = [0, 1]^2$:

$$I = \int_\Omega f(x, y)dxdy$$

1. Donner la valeur exacte de I.
2. En utilisant un quadrillage du carré unité, proposer une formule de quadrature simple (inspirée du point milieu) pour évaluer numériquement I. Implémenter et tester la formule.
3. Tester la méthode dans le cas où $f(x, y)$ est définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 + y^2} & \text{si} \quad 1 - x^2 + y^2 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Quel est dans ce cas la valeur exacte de l'intégrale I ?