INSA Département GM : Interpolation polynomiale

Exercice 1 (Déterminant de Vandermonde) : On considère $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i=0,\cdots,n}$ et le problème d'interpolation suivant : Trouver un polynôme $p_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ de degré n vérifiant $p_n(x_i) = y_i$ pour $i = 0, \cdots, n$.

1. Écrire le système linéaire que doit satisfaire les coefficients α_k pour que p_n soit solution du problème (en introduisant la matrice de *Gram*) et montrer que ce problème admet une unique solution ssi le déterminant de *Vandermonde* suivant est non nul :

$$V(x_0, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

2. Montrer la relation suivante :

$$V(x_0, \ldots, x_n) = V(x_0, \ldots, x_{n-1}) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (x_n - x_k).$$

et déduire $V(x_0, \ldots, x_n)$. Retrouver ainsi la condition $x_i \neq x_j$ pour tout $i \neq j$ assurant l'existence et l'unicité de p_n.

3. Quand les bases de Lagrange et de Newton auront été vues, calculer les matrices de *Gram* associées et vérifier que leurs déterminants sont non nuls ssi $x_i \neq x_j$ pour tout $i \neq j$.

Exercice 2 (Interpolation vs DL) : Dans cette exercice, on se propose d'étudier l'interpolation de la fonction $f(x) = 1/(x+1)$. On considère les points d'interpolation $x_i = i$.

1. En utilisant 3 points $x_{i=0,1,2}$, écrire explicitement les polynômes d'interpolation de Lagrange et en déduire l'interpolé $l_2(f)$ de la fonction $f(x)$.

2. a) À l'aide du schéma de *Neville-Aitken*, évaluer $l_2(f)(x = \frac{1}{2})$ et calculer l'erreur commise par l'interpolation. Que se passe-t-il si on ajoute le point d'interpolation x_3 ?

   b) (Bonus) En considérant les points d'interpolation x_1, x_2 et x_*, déterminer l'ensemble des valeurs x_* assurant d'avoir $l_2(f)(x = \frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$.

3. En utilisant le développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2, proposer un nouveau polynôme $dl_2(f)$ approchant $f(x)$. Comparer les deux approximations $l_2(f)$ et $dl_2(f)$ en $x_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

4. (Bonus) Donner l'expression obtenue pour le calcul de

$$\int_0^2 f(x)dx$$

où on a remplacé f par son polynôme d'interpolation $l_2(f)$ ou par l'approximation $dl_2(f)$.

Exercice 3 : Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit P le polynôme d'interpolation de Lagrange relatif à f et aux nœuds x_0 et x_1 avec $-1 \leq x_0 < x_1 \leq 1$.

1. Donner l'expression de P.

2. Montrer que

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - P(x)|\, dx \leq \left(\int_{-1}^{1} (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-1}^{1} f[x_0, x_1, x]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

3. Calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 dx \tag{1}$$

et écrire l'expression trouvé sous forme d'une somme de carrées.

4. Donner les valeurs de x_0 et x_1 pour lesquelles l'intégrale (1) est minimum et calculer ce minimum.

Exercice 4 (Choix des points d'interpolation) : Soit $f(x)$ une fonction $C^\infty(I)$ où $I=[0,1]$ et $p_n(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f et aux points $\{x_0,\cdots,x_n\}$.

1. À l'aide du *Théorème de Rolle*, (re-)montrer que pour tout $x\in I$, il existe $\xi\in I$ t.q. :

$$E_n(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{v_n(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \quad \text{où} \quad v_n(x)=\Pi_{i=0}^n(x-x_i).$$

2. a) Considérons $\widetilde{v}_n(x)=\Pi_{i=0}^n(x-i)$. Montrer que :

$$\max_{x\in[0,n]}|\widetilde{v}_n(x)|\leq n!$$

Indication : Utiliser le fait que $x=k+q$ où $k=E(x)$ est la partie entière de x et $0\leq q<1$ pour montrer :

$$|\widetilde{v}_n(x)|=\left(\Pi_{i=0}^k(q+k-i)\right)\left(\Pi_{j=k+1}^n(j-k-q)\right)$$

b) Sur I, on considère des points équi-répartis $x_i=ih$ où $h=\frac{1}{n}$ est le pas. En remarquant que $\forall x\in I$, $h^{n+1}\widetilde{v}_n(\frac{x}{h})=v_n(x)$ déduire que :

$$\max_{x\in I}\left(|v_n(x)|\right)\leq\frac{n!}{n^{n+1}}$$

et conclure sur (une estimation de) la vitesse de convergence de la méthode.

3. Pour les points d'interpolation de Chebyshev, on rappelle que $\widetilde{v}_n(x)=\frac{1}{2^n}\cos((n+1)\arccos(x))$ et est défini sur $[-1,1]$. Dans ce cas, quel est (une estimation de) la vitesse de convergence de la méthode ?

Exercice 5 (Interpolation Hermite) : Considérons une fonction $f\in C^\infty([a,b])$ et $(n+1)$ points d'interpolation $\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ distincts. On cherche un polynôme $p\in\mathcal{P}_N$ vérifiant

$$p^{(j)}(x_i)=f^{(j)}(x_i)\quad\forall i\in\{0,\cdots,n\}\ \text{ et }\ \forall j\in\{0,\cdots,M\}$$

où $M\geq 0$ est un ordre de dérivation choisi.

1. a) Pour $M=0$, exprimer la solution p dans la base de Lagrange.

b) Pour $M\geq 1$, quel est le degré N de p pour lequel le problème admet une unique solution (montrer le résultat).

2. Considérons le cas $M=1$ et $N=2n+1$, et définissons les points $(y_i)_{i=0,\cdots,2n+1}$ comme suit :

$$x_0=y_0=y_1\ <\ x_1=y_2=y_3\ <\ \cdots\ <\ x_n=y_{2n}=y_{2n+1}$$

On définit également les fonctions $N_i(x)=\Pi_{k=0}^{i-1}(x-y_k)$ pour $i\in\{0,\cdots,2n+1\}$.

a) Montrer que l'ensemble des $\{N_i(x)\}_{i=0,\cdots,2n+1}$ forme une famille libre et déduire qu'ils forment une base de $\mathcal{P}_{2n+1}$.

b) En posant :

$$f[y_i,\cdots,y_{i+j}]=\begin{cases}\frac{f[y_{i+1},\cdots,y_{i+j}]-f[y_i,\cdots,y_{i+j-1}]}{y_{i+j}-y_i} & \text{si}\quad y_i\neq y_{i+j}\\ f'(x_{i/2}) & \text{si}\quad y_i=y_{i+j}\end{cases}$$

on admet que :

$$p(x)=f[y_0]N_0(x)+f[y_0,y_1]N_1(x)+\cdots+f[y_0,\cdots,y_{2n+1}]N_{2n+1}(x)$$

Déduire grâce à l'algorithme des différences divisées adapté au cas de l'interpolation d'Hermite l'expression dans la base des $N_i(x)$ du polynôme d'interpolation associé à $f(x)=\cos(\pi x)$ et aux deux points $x_0=0$ et $x_1=1$.

3. Toujours dans le cas $M=1$ et $N=2n+1$, montrer l'estimation d'erreur :

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\Pi_{k=0}^n(x-x_k)^2$$

où $\eta\in[a,b]$.

Exercices de révision :

Exercice 1 : Soit $f(x)$ une fonction $C^0([a,b])$ et $\{x_0, \cdots, x_n\}$ $n+1$ points d'interpolation.

1. À l'aide des *différences divisées*, montrer que pour tout $x \in [a,b]$

$$f(x) - P_n(x) = f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x] \cdot \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

   où $P_n(x)$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $\{x_0, \cdots, x_n\}$.

2. a) Pour $f(x) = |x|$ et les points d'interpolation :

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad \text{et } x_1 = 1 \tag{2}$$

   donner le polynôme d'interpolation de Lagrange dans la *base de Newton*.

   b) Déduire de la 1ère question une majoration de l'erreur $E_n(x) = |f(x) - P_2(x)|$ pour $x \in [-1,1]$

Exercice 2 (Interpolation trigonométrique) : On s'intéresse ici au problème d'interpolation trigonométrique, c'est à dire trouver les coefficients $(c_j)_{j=0,n}$ et $(s_j)_{j=1,n}$ t.q. :

$$c_0 + \sum_{j=1}^{n} (c_j \cos(jx_k) + s_j \sin(jx_k)) = y_k$$

où $x_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ et $y_k = f(x_k)$ avec $f(x)$ une fonction 2π-périodique.

1. En posant $\omega_k = e^{2\imath x_k}$ pour $k \in [0, 2n]$, montrer que le problème ci-dessus peut se réécrire comme suit :

$$\sum_{j=0}^{2n} z_j \omega_k^j = y_k$$

   en précisant le lien entre z_j et les coefficients c_j et s_j.

2. Déduire que le problème d'interpolation trigonométrique revient à un problème d'interpolation polynomiale est qu'il admet bien une unique solution.

Exercice 3 : On note $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit f une fonction de classe C^5 sur $[0,1[$. On cherche à déterminer un polynôme P tel que

$$\left| \begin{array}{lll} P(0) = f(0), & P(1/2) = f(1/2), & P(1) = f(1), \\ P'(0) = f'(0), & P'(1/2) = f'(1/2) & \end{array} \right. \tag{3}$$

1. Montrer que s'il existe, un tel polynôme est unique.

2. a) Pour $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$, on définit les polynômes de $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$, $(H_i)_{i=0,1,2}$ et $(V_k)_{k=0,1}$ de telle sorte que pour $j \in \{0,1,2\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_i(x_j) = \delta_{ij} \\ H_i'(x_0) = H_j'(x_1) = 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

   et

$$\left\{ \begin{array}{l} V_0(x_j) = 0 \\ V_0'(x_0) = 1 \ \& \ V_0'(x_1) = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} V_1(x_j) = 0 \\ V_1'(x_0) = 0 \ \& \ V_0'(x_1) = 1 \end{array} \right. \tag{5}$$

   Donner l'expression de fonctions H_i et V_k.

   b) Déduire le polynôme P vérifiant (3).

3. Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$, il existe $\xi \in]0,1[$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} v(x).$$

   où $v(x) = (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 (x - x_2)$.
   <u>Indication</u> : Poser la fonction

$$F : t \mapsto f(t) - p(t) - v(t) \frac{f(x) - p(x)}{v(x)}$$

   et montrer que F' s'annule en au moins 5 points de l'intervalle $]0,1[$.

Applications et programmation :

Pour la liste de ces exercices, il sera utile de les faire dans l'ordre afin de réutiliser des fonctions programmés dans les exercices antérieurs.

Exercice 1 (Algorithme de Neville-Aitken vs matrice de Gram) Soit f une fonction que l'on cherche à interpoler en $n+1$ points $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ supposés distincts. Il est conseillé de faire cet exercice avec *Matlab* ou *Octave*.

1. Écrire une fonction générique pour f et une autre fonction *matriceGram* pour construire la matrice de *Gram G* associée à l'interpolation de f dans la base canonique (i.e. construire la matrice de *Vandermonde*).

2. Dans un programme principale, déterminer les coefficients du polynôme d'interpolation $p_n(x)$ en inversant G et utiliser ce résultat pour représenter $p_n(x)$.

3. Écrire une fonction *nevilleAitken* permettant de calculer en tout point x la valeur de $p_n(x)$ en fonction de f et des points d'interpolation. Dans le programme principale, comparer l'efficacité de cet algorithme par rapport à la première méthode pour représenter f.

Exercice 2 (Biomécanique) : On s'intéresse au lien entre la contrainte et la déformation d'un tissu biologique. Une série de test a permis d'établit les résultats suivant :

Contrainte σ	0.0	0.06	0.14	0.25	0.31	0.47	0.6	0.7
Déformation ϵ	0.0	0.08	0.14	0.2	0.23	0.25	0.28	0.29

Estimer la valeur de la déformation pour une contrainte $\sigma = 0.9$.

Exercice 3 (Effet de Runge) : Considérons les fonctions :

$$f_1(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \quad f_2(x) = |x|, \quad \text{et} \quad f_3 = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

définies sur l'intervalle $[-1, 1]$.

1. En utilisant $n+1$ points d'interpolation équirépartis $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$ avec $i \in [0, n]$, représenter le polynôme d'interpolation de ces différentes fonctions. Qu'observez vous ?

2. En utilisant maintenant les points d'interpolation de Chebyshev, observe-t-on les mêmes problèmes ?

Exercice 4 (Trajectoire d'un robot) : On s'intéresse ici à déterminer la trajectoire $(x(t), y(t))$ d'un robot qui se déplace dans le plan $\mathbb{R}^2$. On suppose que ce dernier démarre à l'arrêt de $(0,0)$ à $t=0$, passe par le point $(1,2)$ à $t=1$ et s'arrête ensuite au point $(4,4)$ à $t=2$. Il revient ensuite en passant par le point $(3,1)$ à $t=3$ et s'arrête de nouveau à l'origine à $t=5$.

On modélise se trajet en imposant :

$x(0) = x'(0) = 0$	$x(1) = 1$	$x(2) = 4$	$x'(2) = 0$	$x(3) = 3$	$x(5) = x'(5) = 0$
$y(0) = y'(0) = 0$	$y(1) = 2$	$y(2) = 4$	$y'(2) = 0$	$y(3) = 1$	$y(5) = y'(5) = 0$

1. En posant $t_j = j$ pour $j \in [0, 3]$ et $t_4 = 5$, déterminer les polynômes H_i et V_i de degré 7 vérifiant :

$$\begin{cases} H_i(t_j) = \delta_{ij} & \text{pour} \quad j \in [0, 4] \\ H_i'(t_j) = 0 & \text{pour} \quad j \in \{0, 2, 4\} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_i(t_j) = 0 & \text{pour} \quad j \in [0, 4] \\ V_i'(t_j) = \delta_{ij} & \text{pour} \quad j \in \{0, 2, 4\} \end{cases}$$

2. En déduire une représentation de la trajectoire du robot et sa position à l'instant $t = 4$.