Exercice 1 (Thm. de Cauchy-Lipschitz) : On considère pour tout $\alpha > 0$ l'EDO suivante

$$\begin{cases} y'(t) = (y(t))^\alpha & \text{pour tout } t > 0, \\ y(0) = y_0 \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de α, le Théorème de Cauchy-Lipschitz assure-t-il l'existence et l'unicité d'une solution (locale) de (1), pour tout $t \geq 0$.
2. Pour $\alpha = 2$ et $y_0 = 1$, montrer qu'il existe une unique solution qui tend vers $+\infty$ en temps fini.
3. Pour $\alpha = 1/2$ et $y_0 = 0$, trouver 2 solutions au problème (1).

Exercice 2 (méthode d'Euler) : La fonction exponentielle est définie comme l'unique solution de l'EDO :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) & \text{pour tout } t \in]0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

Dans cet exercice, on s'intéresse à la méthode d'Euler pour la résolution de ce problème de Cauchy. On pose $\Delta t = T/N$ et $t_n = n\Delta t$ avec $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \{0, \dots, N\}$.

1. A-t-on existence et unicité de la solution ?
2. a) Calculer explicitement les itérés $(y_n)_n$ donnés par la méthode d'Euler explicite et Euler implicite.

   b) Pour Euler explicite, à l'aide d'un D.L., montrer que :

   $$\forall n \in \{0, \cdots, N\}, \quad |y(t_n) - y_n| \;\leq\; C^{ste}\Delta t$$

   où C^{ste} est indépendante de Δt et n. Déduire ainsi que la méthode est *convergente*, i.e. :

   $$\max_{n \in \{0,\cdots,N\}} |y(t_n) - y_n| \underset{\Delta \to 0}{\longrightarrow} 0$$

3. On propose de considéré le schéma suivant :

   $$y_{n+1} = y_n + \Delta t y_n + \frac{\Delta t^2}{2} y_n$$

   a) Montrer que le schéma est consistant.

   b) Montrer que le schéma est *stable* et déduire la convergence et l'ordre de la méthode.

Exercice 3 (Runge-Kutta) : On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \forall t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

où on suppose que :

$$\exists C > 0, \text{ t.q. } \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq C$$

On cherche à résoudre cette EDO à l'aide du schéma suivant :

$$y_{n+1} = y_n + h\,(c_1 k_{n,1} + c_2 k_{n,2}) \quad \text{où} \quad \begin{cases} k_{n,1} = f(t_n, y_n + ahk_{n,2}) \\ k_{n,2} = f(t_{n+1}, y_n + bhk_{n,1}) \end{cases}$$

où a, b, c_1 et c_2 sont des constantes réelles, h est le pas de discrétisation et $t_n = nh$.

1. Montrer que le problème (2) admet une unique solution
2. Justifier que le schéma proposé est une *méthode de Runge-Kutta* et donner son tableau associé. Cette méthode est-elle explicite ou implicite ?
3. a) Montrer que la méthode est stable.

   b) À quelle condition sur les valeurs a, b, c_1 et c_2 la méthode est-elle *consistante* ?
4. a) Déterminer les valeurs de a, b, c_1 et c_2 pour que la méthode soit d'ordre 2.

   b) Avec ce schéma, peut-on avoir une méthode d'ordre 2 explicite ?

Exercice 4 (méthode à pas liés) : On considère,

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{3}$$

On considère le schéma à pas liés :

$$y_{k+3} = \frac{1}{8}\left(9y_{k+2} - y_k\right) + \frac{3h}{8}\left(f_{k+3} + 2f_{k+2} - f_{k+1}\right) \tag{4}$$

avec $f_i = f(x_i, y_i)$ et $x_i = x_0 + ih$.

1. Déterminer les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ servant à étudier une méthode à pas liés.
2. Étudier la *consistance* et la *stabilité*.
3. Étudier l'ordre.

Exercice 5 (RK emboitées) : Considérons deux schémas de RK emboités données par les tableaux suivants :

$$(RK_p) \; : \; \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & \alpha & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & \beta & 0 \\ \hline & c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \qquad \text{et} \qquad (RK_{p'}) \; : \; \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ \hline & c'_1 & c'_2 & c'_2 & c'_1 \end{array}$$

On se place ici dans le cas d'un pas variable h_n

1. a) Déterminer α, β, c_1, c_2 et c_3 pour que la méthode (RK_p) soit d'ordre p le plus élevé possible.
   b) Déterminer ensuite c'_1 et c'_2 pour avoir $(RK_{p'})$ une méthode d'ordre $p' > p$.
2. Soient y_n et y'_n les suites construites par les deux méthodes. On note également ε_n et ε'_n les erreurs de consistance associées aux deux méthodes.
   a) Montrer que
   $$\varepsilon_n = \widetilde{y}'_{n+1} - y_{n+1} + h_n^2 O(h_n^p)$$
   où $\widetilde{y}'_{n+1}$ est calculer en appliquant le schéma $(RK_{p'})$ en partant de y_n.
   b) Déduire une stratégie pour adapter le pas h_n au cours des itérations.

Exercices de révision

Exercice 1 : On considère,

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{5}$$

où $f(x, y)$ est supposée Lipschitz par rapport à la seconde variable y avec L pour constante de Lipschitz, et infiniment dérivable. Pour résoudre cette EDO, on utilisera un pas constant $x_{i+1} - x_i = h = \dfrac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et le schéma :

$$y_{k+1} = y_k + h\phi(x_k, y_k, h), \quad \text{avec } \phi(x_k, y_k, h) = C_1 k_1 + C_2 k_2, \tag{6}$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ et

$$k_1 = f(x_k, y_k) \quad \text{et} \quad k_2 = f(x_k + \theta h, y_k + hd\, k_2), \quad \text{avec } \theta, d \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une méthode de Runge-Kutta et donner le tableau associé.
2. Étudier la *consistance* et la *stabilité théorique.*
3. Donner les relations entre θ, d, C_1 et C_2 pour l'ordre maximum.
4. Ayant prouver que la méthode est *consistante* et *stable*, on se propose de montrer qu'elle est convergente (sans appliquer directement le Thm. du cours) :
   a) En utilisant la *stabilité* du schéma, montrer que :
   $$\forall k \in [1, N], \quad |y(x_k) - y_k| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |\epsilon_k|$$
   où $\epsilon_k = y(x_{k+1}) - y(x_k) - h\Phi(x_k, y(x_k), h_k)$ est l'erreur de consistance.
   b) En déduire que l'algorithme converge et préciser l'ordre.

Exercice 2 ($A-$stabilité) : On considère une équation modèle :

$$\begin{cases} y'(x) = -\lambda y(x), & \text{pour tout } x > 0, \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{8}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $Re(\lambda) > 0$. Pour résoudre ce problème modèle, on utilise une méthode à un pas du type :

$$y_{k+1} = y_k + h\phi(x_k, y_k, h).$$

Définition : On dit que la méthode est $A-$stable (*Absolument stable*) si et seulement si $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ et $\forall h > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} |y_n| = 0. \tag{9}$$

Si (9) est vraie seulement dans un domaine $\mathcal{D} = \{(h\lambda) \in \mathbb{C}, (9) \text{ est vraie}\}$, on dit alors que $\mathcal{D}$ est le domaine de $A-$stabilité.

1. Déterminer la solution de (8) et déduire que $|y(x)| \to 0$ quand $x \to +\infty$.
2. Déterminer le domaine de $A-$stabilité des méthodes d'Euler explicite et implicite et de la méthode de Cranck-Nicolson vu à l'exercice 2.
3. Montrer qu'une méthode de Runge-Kutta explicite ne peut pas être $A-$stable.

Exercice 3 (méthode à pas liés) : On considère,

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{10}$$

On considère le schéma à pas liés :

$$y_{k+2} - \frac{4}{3}y_{k+1} + \frac{1}{3}y_k = \frac{2h}{3}f_{k+2} \tag{11}$$
avec $f_i = f(x_i, y_i)$ et $x_i = x_0 + ih$.

1. Déterminer les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ servant à étudier une méthode à pas liés.
2. Étudier la *consistance* et la *stabilité.*
3. Étudier l'ordre.

Applications et programmation

Exercice 1 : (Epidémiologie) Dans un groupe d'individu, on considère :

- S le nombre de personnes susceptibles d'être infectées par une maladie,
- I le nombre de personnes effectivement infectées,
- et R le nombre de personnes qui ont eu la maladie et qui ne peuvent plus la transmettre en devenant immunisées (ou en succombant...).

Pour une grande population, on peut considérer S, I et R comme des fonctions continues (et dérivables) du temps t vérifiant le modèle suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = -rSI \\ I'(t) = rSI - aI \\ R'(t) = aI \end{cases} \tag{12}$$

1. Interpréter ce modèle et montrer que $S + I + R$ reste constant.

2. Tester pour différentes valeurs de r et a le schéma d'Euler explicite et un schéma explicite de RK d'ordre 4 pour résoudre ce système d'EDO (on considèrera comme données initiales $(S(0), I(0), R(0)) = (100, 20, 0)$)

Exercice 2 : (Chimie et problème raide) On considère une réaction chimique impliquant 3 éléments A, B et C suivant le modèle de Robertson : $A \to B$ lentement, $B + B \to C + B$ de manière très rapide et $B + C \to A + C$ de manière rapide. Le modèle mathématique correspondant est décrit par les EDO suivantes :

$$\begin{cases} y_a'(t) = -k_1 y_a(t) + k_3 y_b(t) y_c(t) \\ y_b'(t) = k_1 y_a(t) - k_3 y_b(t) y_c(t) - k2 y_b^2(t) \\ y_c'(t) = k_2 y_b^2(t) \end{cases}$$

où $y_a(t)$, $y_a(t)$ et $y_a(t)$ représentent les concentrations respectives des éléments A, B et C. On considère la condition initiale $(y_a(0), y_b(0), y_c(0)) = (1, 0, 0)$.

1. Montrer que la quantité totale d'éléments est conservée.

2. En prenant $k_1 = 0.04$, $k_2 = 3 \cdot 10^7$ et $k_3 = 10^4$, comparer les comportements en temps long des méthodes d'Euler explicite et implicite.

Exercice 3 : (Gravitation à 3 corps) On considère 3 corps célestes supposés dans le même plan et dont les mouvements sont régis par les lois de la gravité.

1. Ecrire les équations vérifiées par les trajectoires des trois objets.

2. Tester une méthode numérique explicite et une implicite pour résoudre ces équations. Comparer le comportement en temps long.

3. Tester la méthode de RK emboitée $\mathrm{RK}_{2,4}$.