Exercices

Exercice 1 (Disque de Gerschgorin) : Soit A une matrice $n \times n$. On appelle *disque de Gerschgorin* le disque défini par :

$$D_i = \{\underline{z} \in \mathbb{C}, \quad \text{t.q.} \quad |z - A_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |A_{ij}|\}$$

1. Montrer que toute valeur propre de A appartient à au moins un des disques.
2. Montrer également qu'elles appartiennent à au moins l'un des disques :

$$\widetilde{D}_i = \{\underline{z} \in \mathbb{C}, \quad \text{t.q.} \quad |z - A_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |A_{ji}|\}$$

Exercice 2 (Thm. de Courant-Fischer) : Soit A une matrice (réelle) symétrique définie positive. On appelle *quotient de Rayleigh* :

$$R(A, \underline{q}) = \frac{(A\underline{q}, \underline{q})}{(\underline{q}, \underline{q})} \quad \text{où} \quad \underline{q} \in \mathbb{R}^n \ \text{ et } \ \underline{q} \neq \underline{0}.$$

1. Rappeler les propriétés des valeurs propres de A.
2. (a) Montrer que :

$$\lambda_1 = \min_{\underline{q} \neq \underline{0}} R(A, \underline{q})$$

   (b) Généraliser en montrant :

$$\lambda_i = \min_{\underline{q} \perp \{e_1, \cdots, e_{i-1}\}} R(A, \underline{q}) = \max_{\underline{q} \perp \{e_{i+1}, \cdots, e_n\}} R(A, \underline{q})$$

   où $\underline{e}_i$ est le vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.

3. Déduire le Thm. de Courant-Fischer (aussi appelé du min-max) :

$$\lambda_i = \min_{(\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_{n-i}) \in \mathbb{R}^n} \quad \max_{\underline{x} \perp \{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_{n-i}\}} R(A, \underline{x})$$

$$= \max_{(\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_{i-1}) \in \mathbb{R}^n} \quad \min_{\underline{x} \perp \{\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_{i-1}\}} R(A, \underline{x})$$

Exercice 3 (SVD et compression d'images) : Soit A une matrice $n \times p$. On appelle valeurs singulières de A les racines des valeurs propres positive de la matrice Hermitienne A^*A.

1. (a) Soit B une matrice $p \times n$. Montrer que si $(\lambda, \underline{u})$ est un élément propre de AB où $\lambda \neq 0$, alors λ est aussi valeur propre de BA
   (b) En déduire que les valeurs singulières non nulles peuvent aussi être définies par les racines des valeurs propres de AA^*.
2. Dans la suite, on supposera sans perte de généralité que $n \geq p$ et on notera par μ_i les valeurs propres de A^*A ordonnées comme suit :

$$\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_r > 0 = \mu_{r+1} = \cdots = \mu_p$$

   et $\underline{u}_i$ les vecteurs orthonormaux associés.

   (a) Montrer que $U^*A^*AU = S^*S$ où S est une matrice $n \times p$ t.q. $S_{ii} = \mu_i$ pour $1 \leq i \leq r$ et $S_{ij} = 0$ sinon.
   (b) En posant $\underline{v}_i = A\underline{u}_i/\mu_i$ pour $i \in \{1, \cdots, r\}$ et en complétant ces vecteurs pour former une base de $\mathbb{R}^n$, montrer que $A = VSU^*$ où V est la matrice $n \times n$ dont les colonnes sont les vecteurs $\underline{v}_i$ (cette décomposition s'appelle la SVD pour *Singular Values Decomposition*).
3. (Application) Cette décomposition est exploitée (notamment) en traitement d'images pour compresser les données. En effet, une image (en noir et blanc) peut être représentée par une matrice rectangulaire de taille $n \times p$. Expliquer en quoi la SVD peut permettre de compresser les données (modulo une petite perte d'informations).

Exercices de révision

Exercice 1 (Méthode de Jacobi) : Soit A une matrice de symétrique de taille $n \times n$. On souhaite déterminer ses valeurs propres à l'aide d'une méthode de décomposition. Considérons la suite générée par :

$$A^{(k+1)} = Q_k^t(l,c,\theta)A^{(k)}Q_k(l,c,\theta)$$

où $Q_k(l,c,\theta)$ est la matrice de rotation plane définie par :

$$[Q_k(l,c,\theta)]_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si} \quad i \neq l \ \text{ et } \ i \neq c \\ \cos(\theta) & \text{si} \quad i = j = l \ \text{ ou } \ i = j = c \\ -\sin(\theta) & \text{si} \quad i = l \ \text{ et} j = c \\ \sin(\theta) & \text{si} \quad i = c \ \text{ et } \ j = l \end{cases}$$

1. (a) Calculer les coefficients de $A^{(k+1)}$ en fonction de ceux de $A^{(k)}$.

   (b) Si on souhaite annuler le terme $A_{lc}^{(k+1)} = A_{cl}^{(k+1)}$, quel choix de d'angle θ doit on faire ?

2. (a) Posons $N(A^{(k)})$ la somme des carrés des termes extradiagonaux de $A^{(k)}$:

$$N(A^{(k)}) = \sum_{i \neq j} \left(A_{ij}^{(k)}\right)^2$$

   Montrer que :

$$N(A^{(k+1)}) = N(A^{(k)}) - 2\left(A_{lc}^{(k)}\right)^2$$

   (b) Dans le cas où on fait le choix de Jacobi des indices (l,c), c'est à dire qu'on choisit ces indices pour avoir :

$$|A_{lc}^{(k)}| = \max_{i \neq j} \ |A_{ij}^{(k)}|$$

   déduire que

$$N(A^{(k+1)}) \leq N(A^{(k)}) - \frac{2}{n^2 - n}N(A^{(k)}).$$

   (c) Conclure sur la méthode.

Exercice 2 (SVD et pseudo-inverse) : Cet exercice s'inscrit dans la continuité de l'exercice 3 sur la SVD. On considère une matrice A de taille $n \times p$ et sa SVD $A = VSU^*$. On appelle *pseudo-inverse* (ou *inverse généralisée*) la matrice A^+ de taille $p \times n$ définie par $A = U\widetilde{S}V^*$ où $\widetilde{S}_{ii} = (S_{ii})^{-1}$ pour $1 \leq i \leq i$ et $\widetilde{S}_{ij} = 0$ sinon.

1. Montrer que :

$$A^+A = U^* \begin{bmatrix} Id^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U \quad \text{et} \quad AA^+ = V^* \begin{bmatrix} Id^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V$$

2. Expliquer comment la pseudo inverse peut permettre de résoudre un problème d'optimisation du type

$$\min_{\underline{x} \in \mathbb{R}^n} \ \|A\underline{x} - \underline{b}\|_2$$

   où A est une matrice rectangulaire.

Applications et programmation

Pour cette section, je vous invite à faire les programmes en *Python* à l'aide des modules *NumPy* et *MatPlotLib*. L'avantage est que ces outils sont gratuits et multiplate-forme (et sont ceux utilisés en TP !). Il est également possible de faire ces programmes en *Matlab* (payant), *Scilab* (gratuit et aussi multiplate-forme), ou même en C / C++ (les outils de visualisation étant moins facile à mettre en place).

Exercice 1 (modes de vibration) : On s'intéresse à déterminer les *modes* de vibrations d'une structure carré 2D, ce qui revient à chercher les éléments propres (λ, u) du Laplacien :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans} \quad [0,1]^2 \\ u = 0 & \text{sur} \quad \{0,1\} \times [0,1] \cup [0,1]\{0,1\} \end{cases}$$

Afin de discrétiser ce problème, on va approcher le terme Δ par :

$$\frac{4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}}{\Delta x^2}$$

où $u_{i,j}$ est une approximation de $u(x_i, x_j)$ avec $x_i = i\Delta x$ et $y_j = j\Delta x$ et $\Delta x = \frac{1}{n+1}$.

1. Justifier à l'aide d'un développement de Taylor l'approximation proposée.
2. (a) Écrire les équations ci-dessus sous forme matricielle $A\underline{u} = \underline{b}$. Quelles sont les propriétés de A ? (Indication : Il sera utile d'introduire la numérotation $l = (i-1)n + j$)

   (b) Écrire dans un fichier *data.py* une fonction générant la matrice A en fonction du choix de la dimension n.
3. (a) Implémenter la méthode de la *puissance inverse* pour déterminer la fréquence fondamentale (vous devriez trouver $\simeq 2\pi^2$).

   (b) Modifier l'algorithme pour le transformée en une méthode de déflation calculer les 5 premiers modes et les afficher.
4. (Bonus) Essayer de généraliser à d'autres géométrie de structure en modifiant la matrice A générée

Exercice 2 (épidémiologie) : Depuis les années 1920 environ, on s'intéresse à l'étude de la propagation d'épidémie via ce qu'on appelle des modèles compartimentés. L'idée est la suivante : on considère dans une population 4 catégories :

- S : les individus susceptibles d'être infectés,
- I : les individus infectés,
- R : les individus ayant contractés la maladie et ayant survécus. Ils sont alors immunisés.
- X : les individus ayant contractés la maladie et étant décédés.

Ce modèle s'appelle le modèle SIR (ou SIRS). À chaque cycle de l'évolution de la maladie (par exemple, chaque jour), on considère qu'une proportion i des individus S devient infectée, une proportion s des individus immunisés R perd son immunité, une proportion r des individus infectés devient immunisée et une proportion d des individus infectés meure.

1. Écrire l'évolution de cette population sous la forme suivante :

   $$\underline{x}^{(n+1)} = A\underline{x}^{(n)}$$

   où $\underline{x} = (S, I, R, X)$ est le vecteur d'état représentant la population dans chaque catégorie.
2. Afin de prédire l'évolution de la population, proposer et implémenter une méthode pour déterminer le rayon spectral de A ainsi que le vecteur propre associé. Tester notamment l'influence des différents coefficients i, s, r, d.
3. (Bonus) Il existe dans la littérature de nombreux modèles enrichis prenant en compte plus de paramètres (comme le temps d'incubation de la maladie). Essayer de les étudier et de faire une étude similaire.