Exercices

Fondamentaux d'algèbre linéaire

Exercice 1 (Propriétés de la transposée) : Soient $A \in M(n,n)$ et $B \in M(n,p)$ deux matrices où A est supposée inversible. Montrer les propriétés suivantes :

(a) $(AB)^t = B^t A^t$ (b) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Exercice 2 (norme matricielle et conditionnement) : Soit A une matrice inversible. On rappelle la définition de la norme matricielle :

$$\|A\|_q = \sup_{\|\underline{x}\|\neq 0} \frac{\|A\underline{x}\|_q}{\|\underline{x}\|_q} \qquad q = 1, 2 \text{ ou } +\infty$$

1. (a) Montrer que
$$\|A\|_q = \sup_{\|\underline{x}\|_q = 1} \|A\underline{x}\|_q$$
   (b) Montrer également que
$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}|A_{i,j}|\right) \quad \text{et} \quad \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|A_{i,j}|\right)$$
2. (a) Considérons les deux problèmes suivants : $A\underline{x} = b$ et $A\underline{x}_\epsilon = \underline{b}_\epsilon$ où $\underline{b}_\epsilon = \underline{b} + \epsilon\delta\underline{b}$. Montrer :
$$\frac{\|\underline{x}_\epsilon - \underline{x}\|_q}{\|\underline{x}\|_q} \leq \|A\|_q \|A^{-1}\|_q \frac{\|\underline{b} - \underline{b}_\epsilon\|_q}{\|\underline{b}\|_q}$$
   (b) (Application) Considérons le cas suivant :
$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 1.3 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4.3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \delta\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
   Déterminer la *sensibilité* du système linéaire $\|\underline{x} - \underline{x}_\epsilon\|_\infty$ en fonction de ϵ.

   (c) (Bonus) Si le déterminant de A est petit, cela signifie-t-il que la matrice aura un grand conditionnement ?

Les factorisations LU et QR

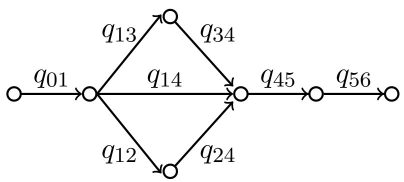
Exercice 3 (Loi des noeuds) : Considérons le réseau d'eau représenté par la figure ci-dessous. On note de 0 à 5 les noeuds du réseau. On suppose que le *débit* q_{ij} dans la conduite reliant les noeuds i et j est donné par :

$$q_{ij} = (p_j - p_i)/L_{ij}$$

où L_{ij} est la longueur du conduit et p_i et p_j représentent la *pression* aux noeuds i et j. On suppose qu'au jonction, le débit respectent la loi des noeuds, c'est à dire :

$$\sum_j q_{ij} = 0 \quad \forall i \neq \{0, 6\}.$$

L'objectif est, connaissante L_{ij}, la pression d'entrée p_0 et la pression de sortie p_6, de connaître la pression p_i en chaque noeud du réseau.



1. (a) Réécrire ce problème sous la forme $A\underline{p} = \underline{b}$ où $\underline{p}$ est le vecteur des pressions $[p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5]^t$.
   (b) Quelles sont les propriétés de la matrice A ?
2. (Application) Dans le cas où $L_{ij} = 1$ et $p_0 = 3$, résoudre le système linéaire :
   (a) En appliquant la méthode *d'élimination de Gauss.*
   (b) En calculant la *factorisation LU* de A et en appliquant l'*algorithme de descente remontée.*

Exercice 4 (Pivotage par ligne) : Soit A une matrice inversible. On appelle matrice de *permutation élémentaire* $P(l_1, l_2)$ la matrice égale à la matrice identité dont on a permuté les lignes l_1 et l_2.

1. À l'aide d'un exemple simple sur une matrice 3x3, justifier l'appellation pour P de matrice de permutation.
2. (a) Lors du processus d'élimination de Gauss, justifier que si on peut aller jusque l'étape (k), alors il existe un coefficient $A_{lk}^{(k)} \neq 0$ où $l \geq k$.
   (b) En déduire qu'il existe une matrice M inversible telle que $MA = U$ où U est triangulaire supérieure (on peut montrer en fait qu'il existe une matrice P de permutation t.q. $PA = LU$).
3. (a) Déduire l'*algorithme d'élimination de Gauss* avec pivotage par ligne.
   (b) (Bonus) Déterminer son cout de calculs.

Exercice 5 (matrice bande) : Soit A une matrice tri-diagonale inversible :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

On admet que sa décomposition LU existe.

1. Montrer les matrices L et U de la factorisation sont de la forme :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{nn-1} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & u_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$$

2. Donner l'algorithme de factorisation dans le cas d'une matrice tri-diagonale. Quel est le cout de calcul ?
3. (Bonus) Généraliser au cas de matrice bande.

Exercice 6 (Minimisation moindres carrés) : On considère le problème suivant :

$$\text{Trouver } \min_{\underline{x} \in \mathbb{R}^n} \|A\underline{x} - \underline{b}\|_2^2$$

où $A \in M(p, n)$ avec $p \geq n$ et $\underline{b} \in \mathbb{R}^p$. On suppose que la matrice A est de rang maximal, ce qui revient à dire que $\text{Ker}(A) = 0$.

1. (a) Montrer que l'on peut décomposer A sous la forme $A = QR$ où $Q \in M(p, n)$ vérifie $Q^t Q = Id_n$ et $R \in M(n, n)$ où $R_{ij} = 0$ si $i > j$.
   (b) Justifier que la la matrice R est inversible, et donc $R_{ii} \neq 0$ pour $1 \leq i \leq n$.
   (c) À l'aide de cette décomposition, déduire une façon de résoudre le problème de minimisation.
2. (Application) Considérons n points du plan de coordonnées $(x_i, y_i)_{i=1,\cdots,n}$. On cherche le point de coordonnées (x^*, y^*) minimisant la distance avec tous les points (x_i, y_i).
   (a) Formuler mathématiquement le problème comme un problème de minimisation.
   (b) Résoudre ce problème à l'aide de la décomposition QR.

Exercices de révision

Exercice 1 (Théorème du rang) : Soit A une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On veut montrer le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Im}(A)) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n$$

1. Montrer que les espaces $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont des s.e.v (sous espace vectoriel).
2. On note par $(\underline{y}_k)_{k=1,r}$ une base de $\mathrm{Im}(A)$ et $(\underline{x}_k)_{k=1,s}$ une base de $\mathrm{Ker}(A)$. On note également par $\underline{\widetilde{x}}_k$ l'élément de $\mathbb{R}^n$ t.q. $A\underline{\widetilde{x}}_k = \underline{y}_k$ pour $k = 1, \cdots, r$.
   (a) Prouver que l'ensemble $(\underline{x}_k)_{k=1,s} \cup (\underline{\widetilde{x}}_k)_{k=1,r}$ forme une base libre.
   (b) Montrer que c'est également une famille génératrice pour déduire le résultat souhaité.

Exercice 2 (Choix du pivot) : Considérons le problème linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer la solution exacte de ce problème.
2. (a) En utilisant une algorithmique flottante à 3 chiffres, appliquer l'élimination de Gauss en considérant 10^{-4} comme pivot. Quel écart commet-on par rapport à la solution exacte ?
   (b) Appliquer de nouveau l'élimination de Gauss mais cette fois en effectuant un pivotage. Commenter.

Exercice 5 (Résolution EDO) : Considérons l'équation différentielle $-u''(x) = f(x)$ avec $u(0) = u(1) = 0$. Pour résoudre numériquement cette équation, on cherche une approximation u_i de $u(x_i)$ solution du système

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = f(x_i) \quad \forall i \in \{1, \cdot, n\}$$

où $x_i = i\Delta x$, $\Delta x = 1/(n+1)$ et $u_0 = u_{n+1} = 0$.

1. (a) Écrire le système de n équations ci-dessus sous la forme d'un système linéaire $A\underline{u} = \underline{b}$ en précisant la matrice A et les vecteurs $\underline{u}$ et $\underline{b}$.
   (b) Soit $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur arbitraire de $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$(A\underline{y}, \underline{y}) = \frac{1}{\Delta x^2}\left(y_1^2 + \sum_{j=1}^{n-1}(y_{j+1} - y_j)^2 + y_n^2\right)$$

   <u>Indication</u> : Penser à développer le produit scalaire et réarranger les termes.
   (c) Déduire les propriétés de A et proposer un algorithme de résolution du système linéaire.
2. (a) Montrer que l'on peut décomposer A sous la forme $A = GG^t$ où G est une matrice triangulaire inférieure vérifiant $G_{ij} = 0$ si $j \leq i - 2$.
   (b) Déduire un algorithme efficace de factorisation. Quel est son cout de calculs ?

Exercice 4 (Factorisation QR) : Soit A une matrice inversible. Montrer que si Q_1R_1 et Q_2R_2 sont deux décompositions de A où Q_1 et Q_2 sont orthogonales et R_1 et R_2 sont triangulaires supérieures, alors $Q_1 = Q_2D$ et $R_1 = DR_2$ où D est diagonale et $D^2 = Id$.

Exercice 5 (Minimisation moindres carrés) : On considère de nouveau le problème de l'exercice 6 :

$$\text{Trouver} \min_{\underline{x} \in \mathbb{R}^n} \|A\underline{x} - \underline{b}\|_2^2$$

où $A \in M(p, n)$ avec $p \geq n$ et $\underline{b} \in \mathbb{R}^p$. On suppose que la matrice A est de rang maximal, ce qui revient à dire que $\mathrm{Ker}(A) = 0$.

1. (a) Montrer que la matrice A^tA est symétrique définie positive.
   (b) Déduire que la solution est donnée par $\underline{x} = (A^tA)^{-1}A^t\underline{b}$ (<u>Indication</u> : Penser à déterminer les points critiques de la fonction $\underline{x} \to \|A\underline{x} - \underline{b}\|_2^2$).
2. Sachant que le conditionnement 2 de la matrice A^tA est proportionnel à $\|A\|_2^2$, cette approche vous semble-t-elle meilleure ou moins bonne que celle proposées dans l'exercice 6 ?

Applications et programmation

Pour cette section, je vous invite à faire les programmes en *Python* à l'aide des modules *NumPy* et *MatPlotLib*. L'avantage est que ces outils sont gratuits et multiplate-forme (et sont ceux utilisés en TP !). Il est également possible de faire ces programmes en *Matlab* (payant), *Scilab* (gratuit et aussi multiplate-forme), ou même en C / C++ (les outils de visualisation étant moins facile à mettre en place).

Exercice 1 (Pivotage de Gauss) : On considère la résolution du système linéaire $A\underline{x} = \underline{b}$ où A est supposée inversible et admettant une factorisation LU. L'objectif de cet exercice est de mesurer l'importance du choix du pivot dans la méthode de Gauss

1. Implémenter une fonction *luGauss* permettant de résoudre le système linéaire via l'élimination de Gauss. Cette fonction prendra en entrée une matrice A et le vecteur $\underline{x}$ et renverra une liste contenant la solution $\underline{x}$ et les matrices L et U.

2. Implémenter une deuxième fonction *luGaussPivo* permettant de résoudre le système linéaire via l'élimination de Gauss avec pivotage par ligne. Cette fonction prendra en entrée une matrice A et le vecteur $\underline{x}$ et renverra une liste contenant la solution $\underline{x}$, les matrices L et U et la matrice de permutation P.

3. (Application) Comparer les résultats obtenus par les deux méthodes pour résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+0.5\cdot 10^{-15} & 3 \\ 2 & 2 & 20 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 5+0.5\cdot 10^{-15} \\ 24 \\ 13 \end{bmatrix}$$

   Calculer également $A - LU$ et $PA - LU$. Commenter.

Exercice 2 (Ressorts) : Pour modéliser une corde vibrante, on peut considérer qu'elle est représentée par une suite de ressorts liés les uns ou autres. Lorsqu'elle vibre à la fréquence ω, chaque attache des ressorts se déplace d'une distance d_i de sa position de repos r_i. On se ramène alors à résoudre l'équation suivante :

$$k_{i-1,i}(d_i - d_{i-1}) + k_{i+1,i}(d_i - d_{i+1}) - \omega^2 d_i = 0 \quad \forall i \in \{0, n\}$$

avec $d_0 = 1$ (impulsion donnée sur la corde à son extrémité gauche), $d_{n+1} = 0$ (la corde est fixée à on extrémité droite) et le coefficient $k_{i,i\pm1}$ correspondant à la rigidité de la corde entre les points r_i et $r_{i\pm1}$.

1. Écrire le système linéaire $A\underline{x} = \underline{b}$ que l'on doit résoudre et implémenter une fonction *constructA* pour construire la matrice A. On se donnera les coefficients $k_{i,i\pm1}$.

2. Quel est la structure de A ? Implémenter un algorithme de décomposition LU spécifique *luBand* pour ce cas.

3. Résoudre le problème est faire une fonction pour représenter l'animation de la corde vibrant à la fréquence ω.

Exercice 3 (Fitting) : On considère un nuage de n points $(x_i, y_i)_{i=1,n}$ distincts donnés, où on suppose $n > 3$. Le but est de trouver le meilleur polynôme de degré 2 se "rapprochant" au mieux des données.

1. Ecrire ce problème comme un problème de minimisation à l'aide d'une matrice A de $M(n, 3)$.

2. Implémenter l'algorithme de HouseHölder pour résoudre ce problème et représenter la solution obtenue. Tester la méthode sur différents cas.

3. Cette idée peut se généraliser à un polynôme de degré p. Proposer et implémenter cette généralisation.