GM 5 :
Méthodes numériques avancées pour l'équation des ondes

Cours 4 :
Simulation en domaine non borné (cas harmonique)

GM 5 Année 2020 - 2021

Contact : A. Tonnoir

antoine.tonnoir@insa-rouen.fr

I. Introduction

Considérons le problème de radiation suivant :

$$\rho \partial_{tt}^2 u - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} u\right) = f \quad \text{dans} \quad t \geq 0, \ \mathbb{R}^2$$

où la source f est supposée harmonique en temps, i.e. :

$$f(t,x) = \Re\left(e^{-i\omega t}\right) \, g(x), \quad \forall t \geq 0$$

La question qu'on se pose est qu'elle sera le comportement de la solution en temps long ?

$u(t, \cdot)$

I. Introduction

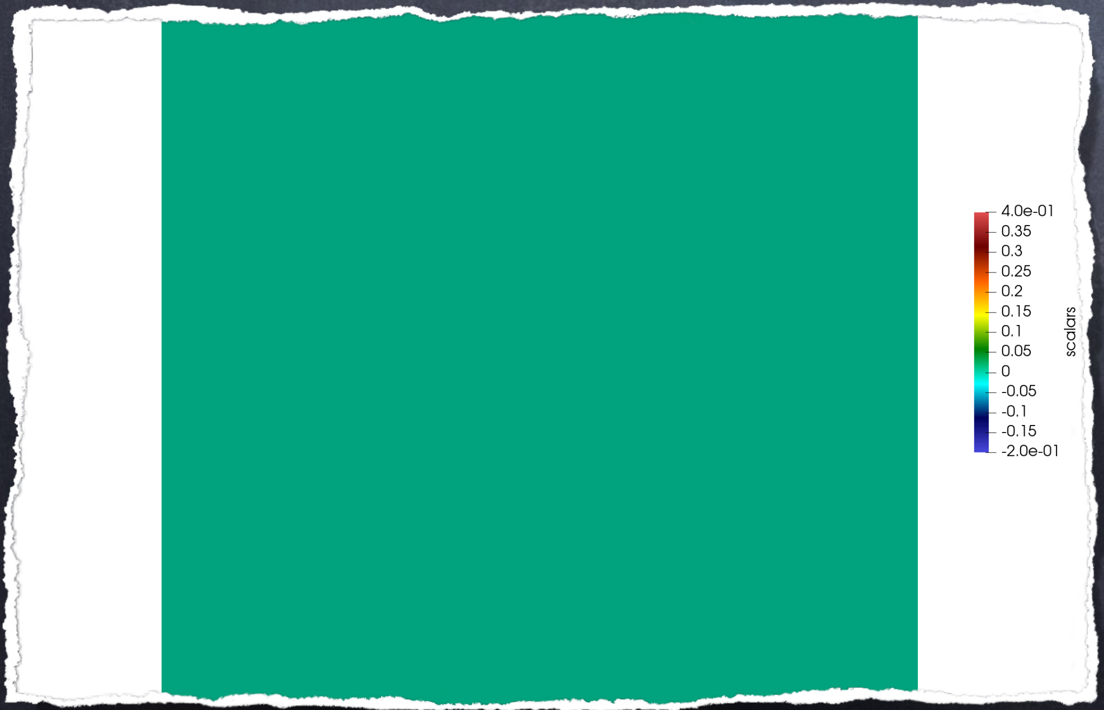
Considérons le problème de radiation suivant :

$$\rho\partial_{tt}^2 u - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} u\right) = f \quad \text{dans} \quad t \geq 0,\ \mathbb{R}^2$$

où la source f est supposée harmonique en temps, i.e. :

$$f(t,x) = \mathcal{R}\left(e^{-i\omega t}\right)\, g(x), \quad \forall t \geq 0$$

La question qu'on se pose est qu'elle sera le comportement de la solution en temps long ?



$u(t,\cdot)$

I. Introduction

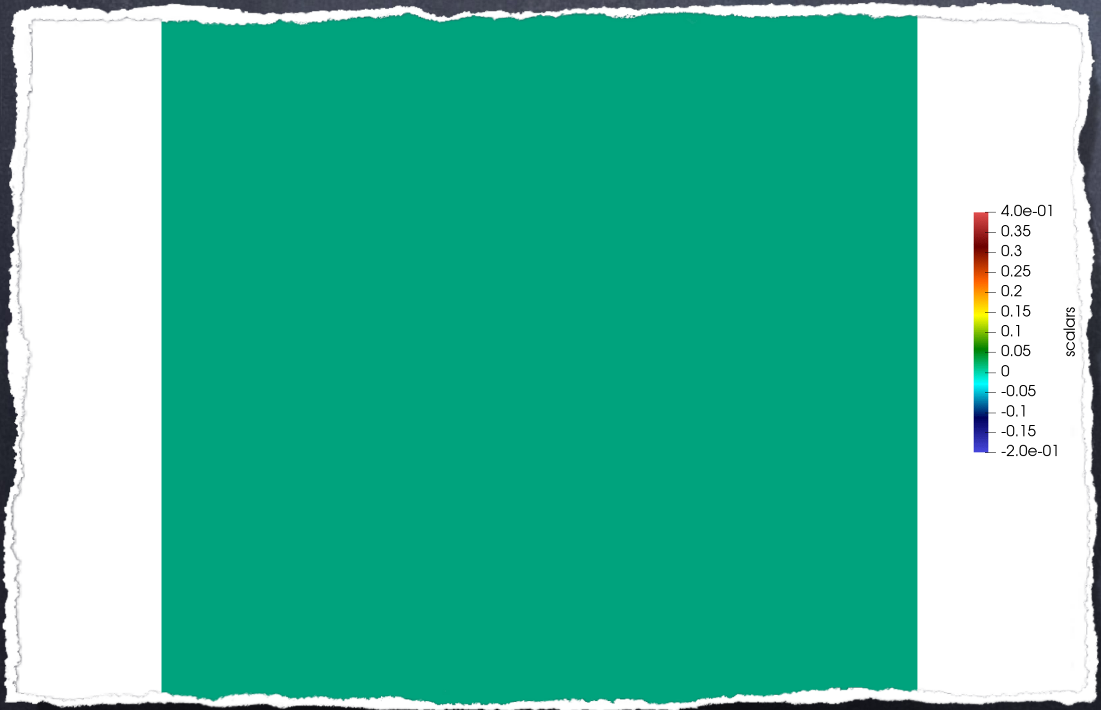
Considérons le problème de radiation suivant :

$$\rho\partial_{tt}^2 u - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} u\right) = f \quad \text{dans} \quad t \geq 0,\ \mathbb{R}^2$$

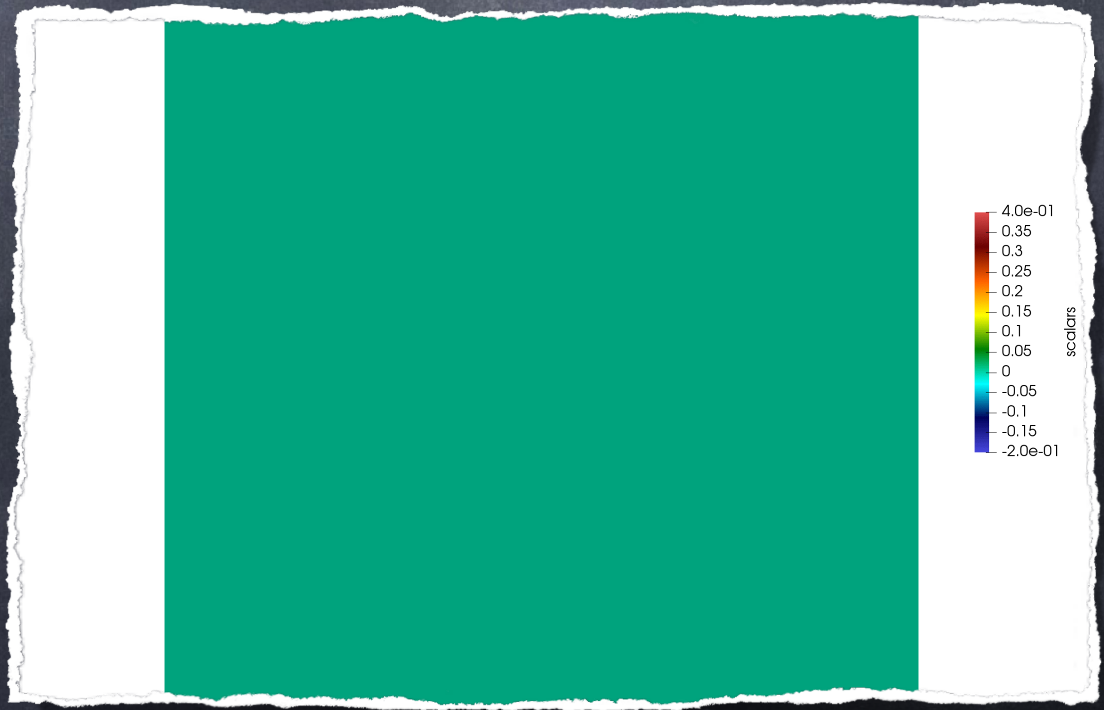
où la source f est supposée harmonique en temps, i.e. :

$$f(t,x) = \mathcal{R}\left(e^{-i\omega t}\right) g(x), \quad \forall t \geq 0$$

La question qu'on se pose est qu'elle sera le comportement de la solution en temps long ?



$u(t,\cdot)$



"$u(t,\cdot)/\cos(\omega t)$"

I. Introduction

Considérons le problème de radiation suivant :

$$\rho \partial_{tt}^2 \mathbf{u} - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \mathbf{u}\right) = f \quad \text{dans} \quad t \geq 0, \ \mathbb{R}^2$$

où la source f est supposée harmonique en temps, i.e. :

$$f(t,x) = \mathcal{R}\left(e^{-i\omega t}\right) g(x), \quad \forall t \geq 0$$

On observe que la solution semble devenir périodique en temps, ce qui incite à la recherche d'une solution de la forme $\mathbf{u}(t,\underline{x}) = \cos(\omega t)\hat{\mathbf{u}}(\underline{x})$ où $\hat{\mathbf{u}}$ est solution de :

$$-\rho\omega^2 \hat{\mathbf{u}} - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}\right) = g \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2$$

Objectif :

- Étudier le problème harmonique en temps
- Le formuler en domaine borné.

Au programme...

Plan :

I. Introduction

II. Le problème avec absorption

a) En domaine ouvert

b) Le problème extérieur

c) Formulation avec DtN

III. Principe d'absorption limite

II. a) En domaine ouvert

Pour étudier le problème :

$$-\rho\omega^2\hat{\mathbf{u}} - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla}\hat{\mathbf{u}}\right) = g \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2$$

nous avons allons faire quelques hypothèses :

- La source g est à support compact dans $B_{\underline{0}}(R)$
- (ρ, σ) sont constant dans $\mathbb{R}^2 \backslash B_{\underline{0}}(R)$

II. a) En domaine ouvert

Pour étudier le problème :

$$-\rho\omega^2\hat{\mathbf{u}} - \mathrm{div}\,(\sigma\underline{\nabla}\hat{\mathbf{u}}) = g \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2$$

nous avons allons faire quelques hypothèses :

- La source g est à support compact dans $B_{\underline{0}}(R)$
- (ρ, σ) sont constant dans $\mathbb{R}^2 \backslash B_{\underline{0}}(R)$

Remarque : L'équation ci-dessus s'appelle l'équation d'Helmholtz.

II. a) En domaine ouvert

Pour étudier le problème :

$$-\rho\omega^2\hat{\mathbf{u}} - \mathrm{div}\,(\sigma\underline{\nabla}\hat{\mathbf{u}}) = g \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2$$

nous avons allons faire quelques hypothèses :

- La source g est à support compact dans $B_{\underline{0}}(R)$
- (ρ, σ) sont constant dans $\mathbb{R}^2 \backslash B_{\underline{0}}(R)$

Pour ce problème, on peut noter qu'a priori, on n'a aucune condition « au bord », c'est à dire à l'infini.

Cela pose une difficulté pour définir la notion de solution. En fait, ainsi posé, il n'y a pas unicité de la solution, il faudra imposer un comportement « à l'infini ».

II. a) En domaine ouvert

Considérons le problème légèrement modifié :

$$-\rho\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon - \operatorname{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon\right) = g \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2$$

où $\omega_\varepsilon^2 = \omega^2 + i\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

2.1 Lemme

Le problème ci-dessus admet une unique solution $\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2)$.

Preuve : au (vrai) tableau ! ∎

Remarque : Une forme hermitienne est dite coercive ssi $|a(u,u)| \geq \|u\|^2$

II. a) En domaine ouvert

Considérons le problème légèrement modifié :

$$-\rho\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon\right) = g \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2$$

où $\omega_\varepsilon^2 = \omega^2 + i\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

2.1 Lemme

Le problème ci-dessus admet une unique solution $\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2)$.

Preuve : au (vrai) tableau !

∎

Remarque 2 : Ici, la condition à l'infini vient du fait que la solution doit être dans H^1.

II. a) En domaine ouvert

Considérons le problème légèrement modifié :

$$-\rho\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon\right) = g \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2$$

où $\omega_\varepsilon^2 = \omega^2 + i\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

Ce problème apparait en cherchant des solutions harmoniques au problème d'évolution :

$$\partial_{tt}^2 \mathbf{u}_\eta + \eta \partial_t \mathbf{u}_\eta - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \mathbf{u}_\eta\right) = f \quad \text{dans} \quad t \geq 0, \ \mathbb{R}^2$$

(détails au (vrai) tableau)

Remarque : Le terme $\eta \partial_t \mathbf{u}_\eta$ correspond à un terme dissipatif.

II. a) En domaine ouvert

Considérons le problème légèrement modifié :

$$-\rho\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon\right) = g \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2$$

où $\omega_\varepsilon^2 = \omega^2 + i\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

Ce problème apparait en cherchant des solutions harmoniques au problème d'évolution :

$$\partial_{tt}^2 \mathbf{u}_\eta + \eta \partial_t \mathbf{u}_\eta - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \mathbf{u}_\eta\right) = f \quad \text{dans} \quad t \geq 0,\ \mathbb{R}^2$$

2.2 Proposition (Amplitude limite, version simple)

La solution $\mathbf{u}_\eta$ tend vers $\mathrm{R}\left(e^{-i\omega t}\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon\right)$ quand $t \to +\infty$.

Idée Preuve : au (vrai) tableau !

II. a) En domaine ouvert

Considérons le problème légèrement modifié :

$$-\rho\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon\right) = g \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2$$

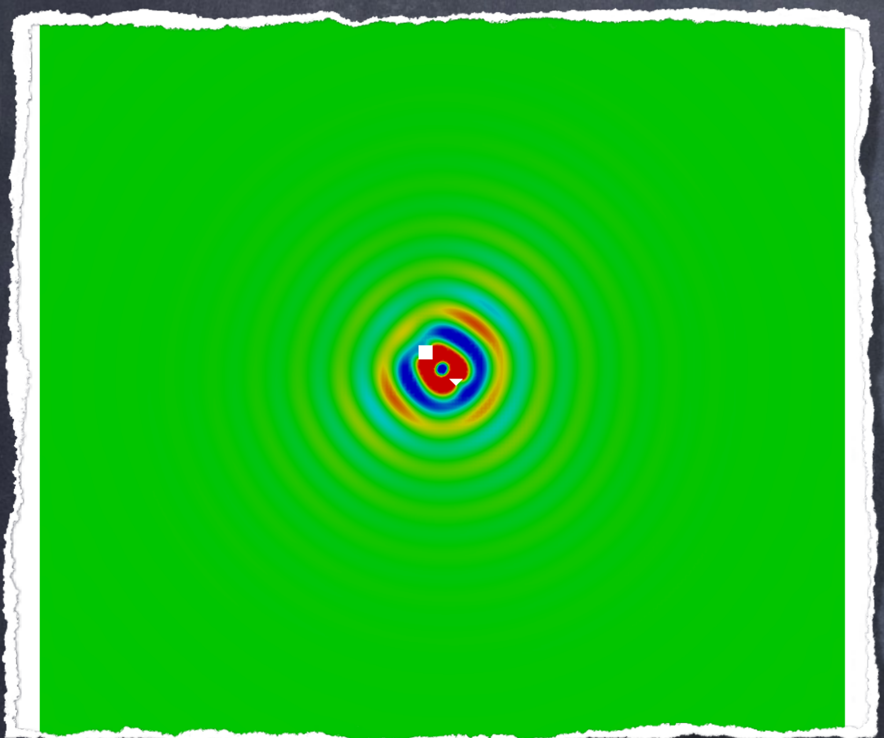
où $\omega_\varepsilon^2 = \omega^2 + i\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

A parte :

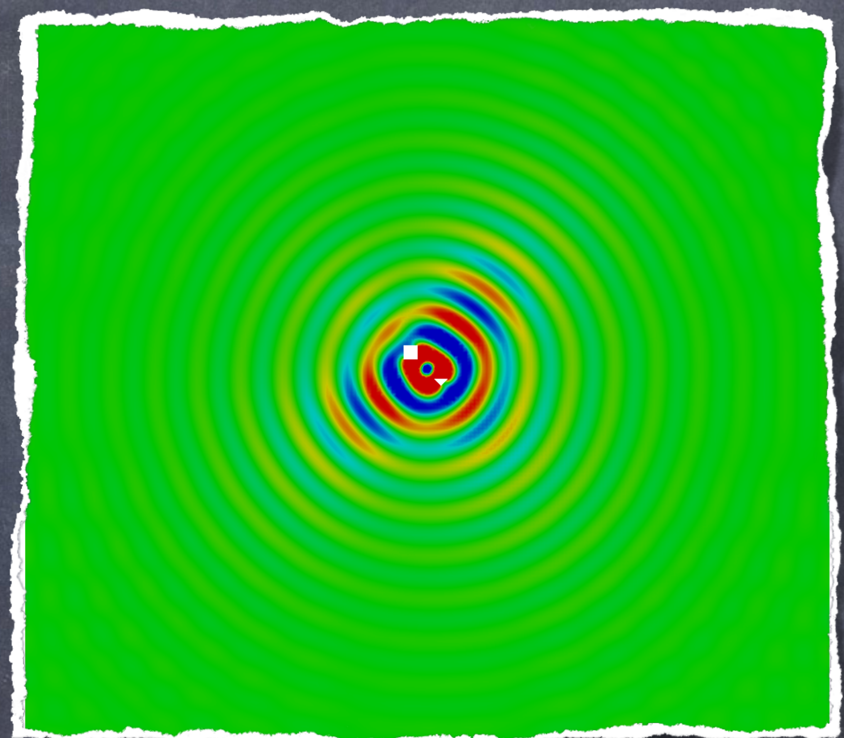
On peut montrer que la solution du problème avec dissipation à un comportement asymptotique en $e^{-\varepsilon r}$. Une idée assez naturelle serait alors de borner le domaine de calculs suffisamment loin avec par exemple une condition de Dirichlet ou Neumann homogène (comme pour les PML).

II. a) En domaine ouvert

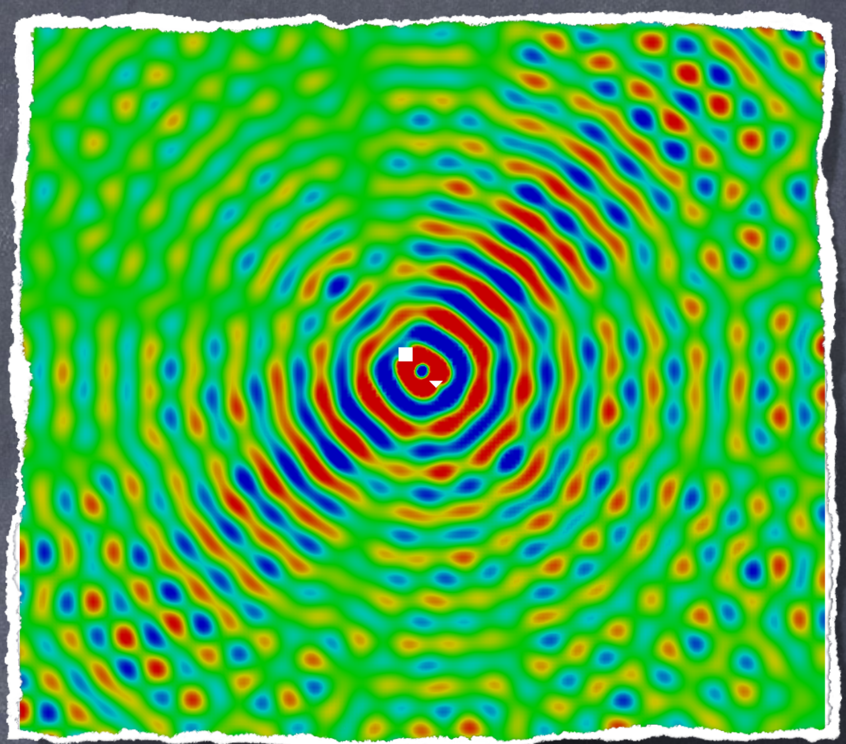
Illustration a parte :



$\omega_\varepsilon = 10 + i$



$\omega_\varepsilon = 10 + 0.5i$



$\omega_\varepsilon = 10 + 0.1i$

Les effets du bords impactent énormément la solution !

II. a) En domaine ouvert

Considérons le problème légèrement modifié :

$$-\rho\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon\right) = g \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2$$

où $\omega_\varepsilon^2 = \omega^2 + i\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

Formulation équivalente (pb transmission) :

$$\left|\begin{array}{l} -\rho\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b\right) = g \quad \text{dans} \quad B_{\underline{0}}(R) \\ \sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b \cdot \nu = \sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty \cdot \nu \quad \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R) \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} -\rho\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty\right) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \backslash B_{\underline{0}}(R) \\ \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty = \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b \quad \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R) \end{array}\right.$$

II. a) En domaine ouvert

Considérons le problème légèrement modifié :

$$-\rho\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon\right) = g \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2$$

où $\omega_\varepsilon^2 = \omega^2 + i\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

Formulation équivalente (pb transmission) :

$$\left|\begin{array}{l} -\rho\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b\right) = g \quad \text{dans} \quad B_{\underline{0}}(R) \\ \sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b \cdot \nu = \sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty \cdot \nu \quad \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R) \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} -\rho\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty\right) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \backslash B_{\underline{0}}(R) \\ \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty = \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b \quad \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R) \end{array}\right.$$

Étant donné $\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b$ sur $S_{\underline{0}}(R)$, l'objectif va être de résoudre explicitement le problème extérieur.

II. b) Le problème extérieur

Focalisons nous sur le problème extérieur :

$$\left|\begin{array}{l} -\rho\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty\right) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \backslash \mathrm{B}_{\underline{0}}(R) \\ \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty = \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b \quad \text{sur} \quad \mathrm{S}_{\underline{0}}(R) \end{array}\right.$$

Par hypothèse, (ρ, σ) sont constants et on peut donc réécrire l'EDP ainsi :

$$-\tilde{\rho}\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty - \Delta \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \backslash \mathrm{B}_{\underline{0}}(R)$$

où $\tilde{\rho} = \rho/\sigma$.

Pour résoudre cette EDP, l'idée est d'utiliser la séparation de variables en coordonnées polaires.

(détails au (vrai) tableau)

II. b) Le problème extérieur

Focalisons nous sur le problème extérieur :

$$\begin{cases} -\rho\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty\right) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \backslash \mathrm{B}_{\underline{0}}(R) \\ \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty = \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b \quad \text{sur} \quad \mathrm{S}_{\underline{0}}(R) \end{cases}$$

2.3 Proposition (solution extérieur)

La solution à l'extérieur est donnée par la série :

$$\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty(r,\theta) = \sum_{k\geq 0} \left(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b, e^{2i\pi k\theta}\right)_{\mathrm{S}_{\underline{0}}(R))} \mathrm{H}_k^\varepsilon(r)$$

où H_k^ε est l'unique solution décroissante de l'EDO :

$$r^2 y'' + r y' + (r^2\omega_\varepsilon^2 - 4k^2\pi^2) y = 0, \quad \forall r \geq R$$

vérifiant $\mathrm{H}_k^\varepsilon(R) = 1$ (fonction de Hankel).

II. c) Formulation avec DtN

Revenons à notre formulation équivalente :

$$\left|\begin{array}{l} -\rho\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla}\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b\right) = g \quad \text{dans} \quad B_{\underline{0}}(R) \\ \sigma\underline{\nabla}\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b \cdot \nu = \sigma\underline{\nabla}\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty \cdot \nu \quad \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R) \end{array}\right.$$

$$\left|\ \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty(r,\theta) = \sum_{k\geq 0}\left(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b, e^{2i\pi k\theta}\right)_{S_{\underline{0}}(R))} H_k^\varepsilon(r)\right.$$

II. c) Formulation avec DtN

Revenons à notre formulation équivalente :

$$\left|\begin{array}{l} -\rho\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b - \operatorname{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b\right) = g \quad \text{dans} \quad \mathsf{B}_{\underline{0}}(R) \\ \sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b \cdot \nu = \sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty \cdot \nu \quad \text{sur} \quad \mathsf{S}_{\underline{0}}(R) \end{array}\right.$$

$$\left|\ \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty(r,\theta) = \sum_{k\geq 0} \left(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b, e^{2i\pi k\theta}\right)_{\mathsf{S}_{\underline{0}}(R))} \mathsf{H}_k^\varepsilon(r)\right.$$

En injectant $\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty$, on déduit la formulation suivante

$$\left|\begin{array}{l} -\rho\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b - \operatorname{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b\right) = g \quad \text{dans} \quad \mathsf{B}_{\underline{0}}(R) \\ \sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b \cdot \nu = \mathcal{T}_{DtN}^\varepsilon\left(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b|_{\mathsf{S}_{\underline{0}}(R)}\right) \quad \text{sur} \quad \mathsf{S}_{\underline{0}}(R) \end{array}\right.$$

où l'opérateur $\mathcal{T}_{DtN}$ (dit de Dirichlet To Neumann) :

$$\mathcal{T}_{DtN}^\varepsilon(\varphi) = \sigma \sum_{k\geq 0} \left(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b, e^{2i\pi k\theta}\right)_{\mathsf{S}_{\underline{0}}(R))} \partial_r \mathsf{H}_k^\varepsilon(r)$$

II. c) Formulation avec DtN

Revenons à notre formulation équivalente :

$$\left|\begin{array}{l} -\rho\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b\right) = g \quad \text{dans} \quad B_{\underline{0}}(R) \\ \sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b \cdot \nu = \sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty \cdot \nu \quad \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R) \end{array}\right.$$

$$\left| \quad \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty(r,\theta) = \sum_{k\geq 0} \left(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b, e^{2i\pi k\theta}\right)_{S_{\underline{0}}(R))} H_k^\varepsilon(r) \right.$$

En injectant $\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^\infty$, on déduit la formulation suivante

$$\left|\begin{array}{l} -\rho\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b\right) = g \quad \text{dans} \quad B_{\underline{0}}(R) \\ \boxed{\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b \cdot \nu = \mathcal{T}_{DtN}^\varepsilon\left(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b|_{S_{\underline{0}}(R)}\right) \quad \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R)} \end{array}\right.$$

(Cond. Transparente)

où l'opérateur $\mathcal{T}_{DtN}$ (dit de Dirichlet To Neumann) :

$$\mathcal{T}_{DtN}^\varepsilon(\varphi) = \sigma \sum_{k\geq 0} \left(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b, e^{2i\pi k\theta}\right)_{S_{\underline{0}}(R))} \partial_r H_k^\varepsilon(r)$$

II. c) Formulation avec DtN

On a ainsi une formulation en domaine borné :

$$\left|\begin{array}{ll} -\rho\omega_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b\right) = g & \text{dans} \quad \mathsf{B}_{\underline{0}}(R) \\ \sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b \cdot \nu = \mathscr{T}_{DtN}^{\varepsilon}\left(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b|_{\mathsf{S}_{\underline{0}}(R)}\right) & \text{sur} \quad \mathsf{S}_{\underline{0}}(R) \end{array}\right.$$

2.4 Proposition

Le problème ci-dessus admet une unique solution $\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b \in \mathsf{H}^1(\mathsf{B}_{\underline{0}}(R))$

Preuve : Directe par équivalence.

■

Au programme...

Plan :

III. a) Le problème limite

Revenons à notre problème initiale :

$$-\rho\omega^2\hat{\mathbf{u}} - \mathrm{div}\left(\sigma\underline{\nabla}\hat{\mathbf{u}}\right) = g \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2$$

Une idée naturelle pour construire une solution est alors de passer à la limite quand $\varepsilon \to 0$ dans le problème :

$$\left|\begin{array}{ll} -\rho\omega_\varepsilon^2\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b - \mathrm{div}\left(\sigma\underline{\nabla}\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b\right) = g & \text{dans} \quad B_{\underline{0}}(R) \\ \sigma\underline{\nabla}\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b \cdot \nu = \mathscr{T}_{DtN}^{\varepsilon}\left(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon^b|_{S_{\underline{0}}(R)}\right) & \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R) \end{array}\right.$$

Formellement, on obtient le problème limite :

$$\left|\begin{array}{ll} -\rho\omega^2\hat{\mathbf{u}}^b - \mathrm{div}\left(\sigma\underline{\nabla}\hat{\mathbf{u}}^b\right) = g & \text{dans} \quad B_{\underline{0}}(R) \\ \sigma\underline{\nabla}\hat{\mathbf{u}}^b \cdot \nu = \mathscr{T}_{DtN}\left(\hat{\mathbf{u}}^b|_{S_{\underline{0}}(R)}\right) & \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R) \end{array}\right.$$

III. a) Le problème limite

Considérons le problème limite :

$$\begin{cases} -\rho\omega^2 \hat{\mathbf{u}}^b - \operatorname{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^b\right) = g & \text{dans} \quad B_{\underline{0}}(R) \\ \sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^b \cdot \nu = \mathcal{T}_{DtN}\left(\hat{\mathbf{u}}^b|_{S_{\underline{0}}(R)}\right) & \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R) \end{cases}$$

Remarques :

- Le problème ci-dessus n'est pas équivalent à l'EDP :

$$-\rho\omega^2 \hat{\mathbf{u}} - \operatorname{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}\right) = g \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2$$

En effet, on impose un comportement à l'infini avec l'opérateur DtN.

III. a) Le problème limite

Considérons le problème limite :

$$\left|\begin{array}{ll} -\rho\omega^2 \hat{\mathbf{u}}^b - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^b\right) = g & \text{dans} \quad B_{\underline{0}}(R) \\ \sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^b \cdot \nu = \mathcal{T}_{DtN}\left(\hat{\mathbf{u}}^b|_{S_{\underline{0}}(R)}\right) & \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R) \end{array}\right.$$

Remarques :

- Le problème ci-dessus n'est pas équivalent à l'EDP :

$$-\rho\omega^2 \hat{\mathbf{u}} - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}\right) = g \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2$$

  En effet, on impose un comportement à l'infini avec l'opérateur DtN.

- On notera que dans l'opérateur DtN, les fonctions H_k^ε sont remplacés par leurs limites H_k.

III. a) Le problème limite

Considérons le problème limite :

$$\left|\begin{array}{ll} -\rho\omega^2\hat{\mathbf{u}}^b - \mathrm{div}\left(\sigma\underline{\nabla}\hat{\mathbf{u}}^b\right) = g & \text{dans} \quad B_{\underline{0}}(R) \\ \sigma\underline{\nabla}\hat{\mathbf{u}}^b\cdot\nu = \mathcal{T}_{DtN}\left(\hat{\mathbf{u}}^b|_{S_{\underline{0}}(R)}\right) & \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R) \end{array}\right.$$

3.1 Théorème (Principe absorption limite, admis)

On a les résultats suivant :

- $\hat{\mathbf{u}}^b_\varepsilon \longrightarrow \hat{\mathbf{u}}^b$ dans $H^1(B_{\underline{0}}(R))$
- $\hat{\mathbf{u}}^b$ est solution du problème limite ci-dessus
- il existe une unique solution au problème limite

III. a) Le problème limite

Considérons le problème limite :

$$\left| \begin{array}{ll} -\rho\omega^2\hat{\mathbf{u}}^b - \mathrm{div}\left(\sigma\underline{\nabla}\hat{\mathbf{u}}^b\right) = g & \text{dans} \quad B_{\underline{0}}(R) \\ \sigma\underline{\nabla}\hat{\mathbf{u}}^b \cdot \nu = \mathscr{T}_{DtN}\left(\hat{\mathbf{u}}^b|_{S_{\underline{0}}(R)}\right) & \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R) \end{array} \right.$$

Remarque :

La solution $\hat{\mathbf{u}}^b$ ainsi construite correspond à la **solution physique** car elle est limite (harmonique) quand l'absorption tend vers 0 du problème en temps bien posé :

$$\partial^2_{tt}\mathbf{u}_\eta + \eta\partial_t\mathbf{u}_\eta - \mathrm{div}\left(\sigma\underline{\nabla}\mathbf{u}_\eta\right) = f \quad \text{dans} \quad t \geq 0, \ \mathbb{R}^2$$

III. a) Le problème limite

Considérons le problème limite :

$$\begin{cases} -\rho\omega^2 \hat{\mathbf{u}}^b - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^b\right) = g & \text{dans} \quad B_{\underline{0}}(R) \\ \sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^b \cdot \nu = \mathscr{T}_{DtN}\left(\hat{\mathbf{u}}^b |_{S_{\underline{0}}(R)}\right) & \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R) \end{cases}$$

3.2 Théorème (Amplitude limite, admis)

On a :
$$\lim_{t\to+\infty} \| \mathbf{u}(t,\underline{x}) - \mathcal{R}\left(\hat{\mathbf{u}}(\underline{x}) e^{-i\omega t}\right) \|_{B_{\underline{0}}(R)} = 0$$

Rappel : $\mathbf{u}$ est solution de :

$$\rho \partial_{tt}^2 \mathbf{u} - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \mathbf{u}\right) = f \quad \text{dans} \quad t \geq 0, \ \mathbb{R}^2$$

III. b) Le problème approché

Considérons le problème limite :

$$
\left|\begin{array}{ll}
-\rho\omega^2 \hat{\mathbf{u}}^b - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^b\right) = g & \text{dans} \quad B_{\underline{0}}(R) \\
\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^b \cdot \nu = \mathcal{T}_{DtN}\left(\hat{\mathbf{u}}^b|_{S_{\underline{0}}(R)}\right) & \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R)
\end{array}\right.
$$

3.3 Proposition (admis)

Le comportement $r \to +\infty$ du DtN est :

$$
\mathcal{T}_{DtN}\left(\hat{\mathbf{u}}^b|_{S_{\underline{0}}(R)}\right) \simeq i\sigma\omega\hat{\mathbf{u}}^b
$$

III. b) Le problème approché

Considérons le problème limite :

$$\left|\begin{array}{l} -\rho\omega^2 \hat{\mathbf{u}}^b - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^b\right) = g \quad \text{dans} \quad B_{\underline{0}}(R) \\ \sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^b \cdot \nu = \mathscr{T}_{DtN}\left(\hat{\mathbf{u}}^b|_{S_{\underline{0}}(R)}\right) \quad \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R) \end{array}\right.$$

3.3 Proposition (admis)

Le comportement $r \to +\infty$ du DtN est :

$$\mathscr{T}_{DtN}\left(\hat{\mathbf{u}}^b|_{S_{\underline{0}}(R)}\right) \simeq i\sigma\omega\hat{\mathbf{u}}^b$$

Remarque : On retrouve ici la condition de Sommerfeld permettant de construire la solution dite sortante (physique) du problème ci-dessus.

III. b) Le problème approché

Considérons le problème approché :

$$\left| \begin{array}{l} -\rho\omega^2 \hat{\mathbf{u}}^b - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^b\right) = g \quad \text{dans} \quad B_{\underline{0}}(R) \\ \sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^b \cdot \nu = i\sigma\omega \hat{\mathbf{u}}^b \quad \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R) \end{array} \right.$$

Remarque : Pour borner le domaine de calcul, on peut, comme en régime temporel, utiliser les PML.

III. b) Le problème approché

Considérons le problème approché :

$$\left| \begin{array}{l} -\rho\omega^2 \hat{\mathbf{u}}^b - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^b\right) = g \quad \text{dans} \quad B_{\underline{0}}(R) \\ \sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^b \cdot \nu = i\sigma\omega \hat{\mathbf{u}}^b \quad \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R) \end{array} \right.$$

3.4 Proposition

Le problème ci-dessus admet au plus une solution.

Idée preuve : au (vrai) tableau ! ■

Remarque : Pour borner le domaine de calcul, on peut, comme en régime temporel, utiliser les PML.

III. b) Le problème approché

Considérons le problème approché :

$$\begin{cases} -\rho\omega^2 \hat{\mathbf{u}}^b - \operatorname{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^b\right) = g & \text{dans} \quad B_{\underline{0}}(R) \\ \sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^b \cdot \nu = i\sigma\omega \hat{\mathbf{u}}^b & \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R) \end{cases}$$

Pour montrer de plus qu'il existe une solution, il faut utiliser l'alternative de Fredholm :

3.5 Théroème (Alternative de Fredholm, admis)

Soit T un opérateur compact de H dans lui-même. L'opérateur Id-T est surjectif ssi il est injectif.

Remarque : Ce théorème est l'équivalent en dimension infinie du théorème du rang pour les matrices.

III. b) Le problème approché

Considérons le problème approché :

$$\left|\begin{array}{l} -\rho\omega^2 \hat{\mathbf{u}}^b - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^b\right) = g \quad \text{dans} \quad B_{\underline{0}}(R) \\ \sigma \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^b \cdot \nu = i\sigma\omega \hat{\mathbf{u}}^b \quad \text{sur} \quad S_{\underline{0}}(R) \end{array}\right.$$

3.6 Théorème

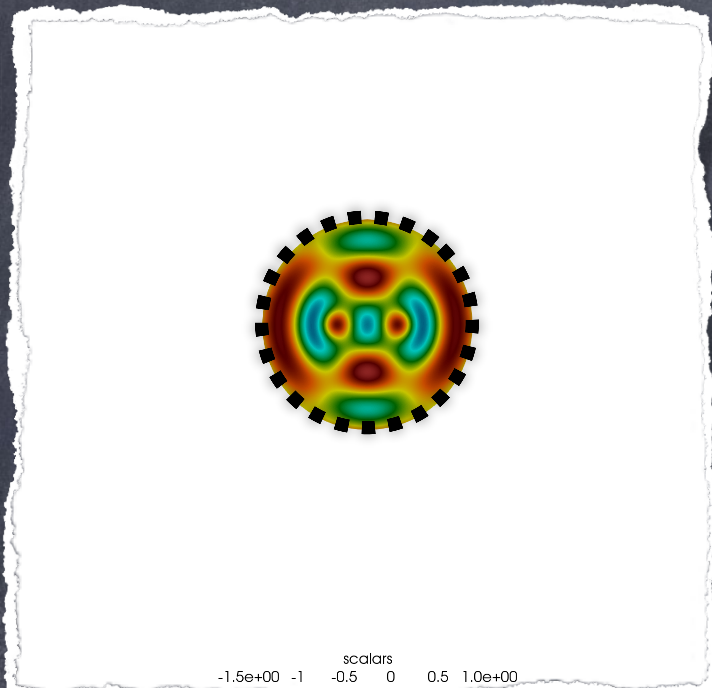
Le problème approché ci-dessus admet une unique solution $\hat{\mathbf{u}}^b \in H^1(B_{\underline{0}}(R))$.

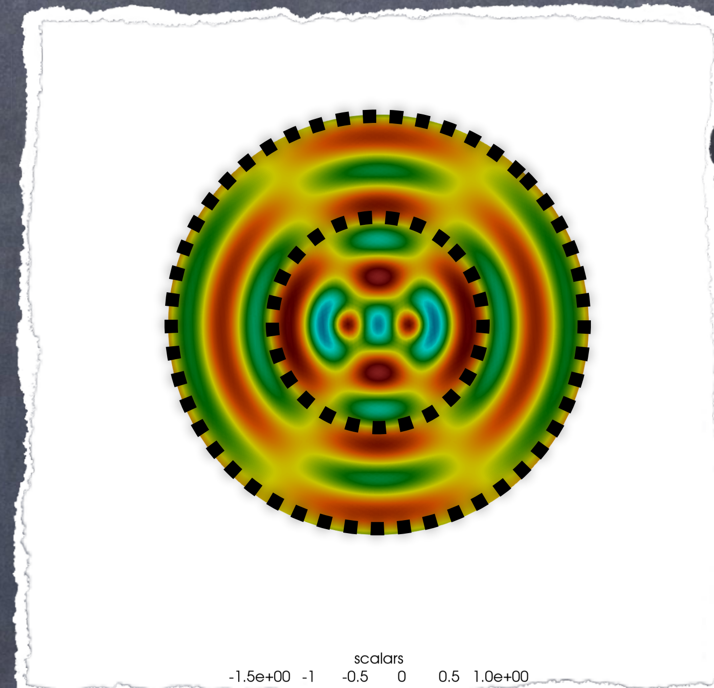
Idée Preuve : au (vrai) tableau ! ∎

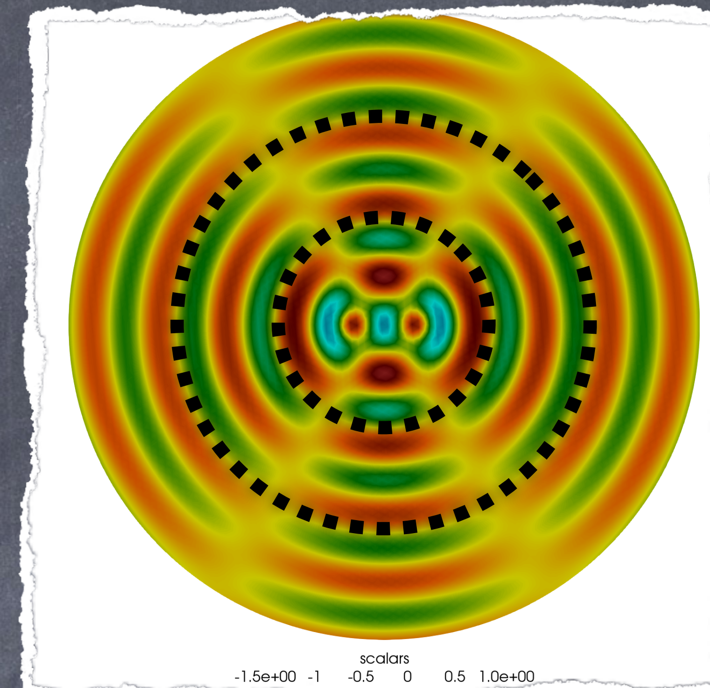
III. b) Le problème approché

Illustration problème approché (interférence) :

ABC

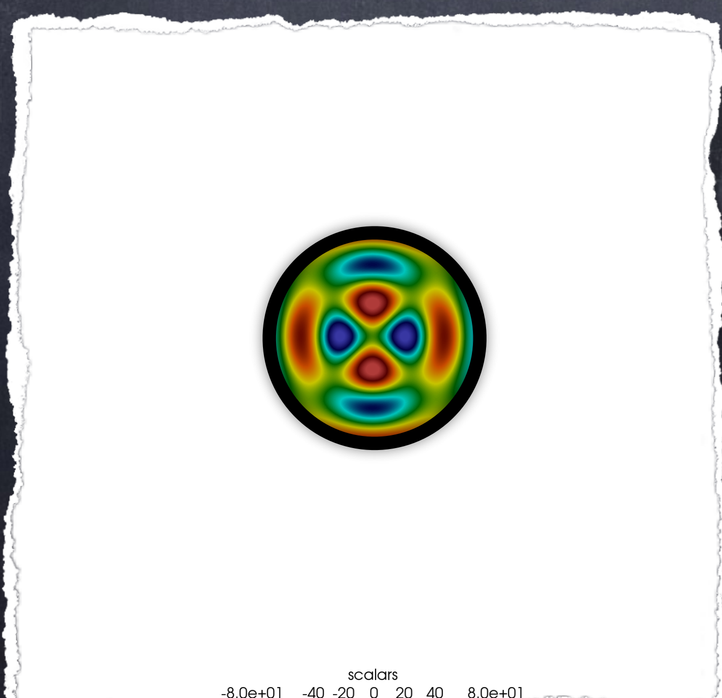


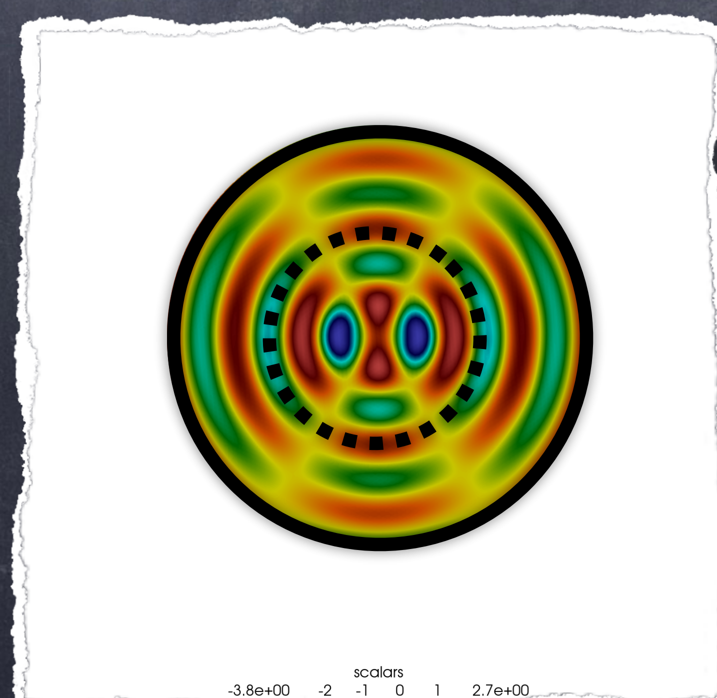


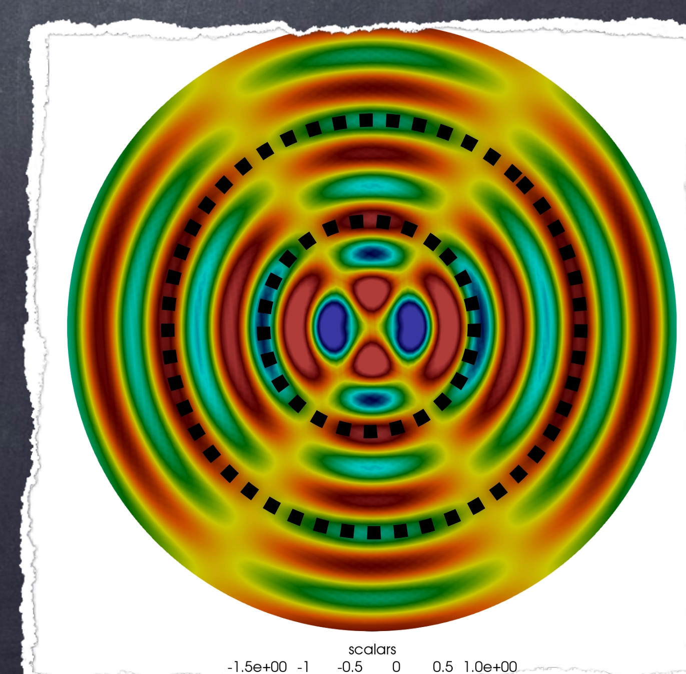


R = 0,5 R = 1 R = 1,5

Neumann







Plan détaillé du cours 3

Plan :

I. Introduction

II. Le problème avec absorption

a) En domaine ouvert

b) Le problème extérieur

c) Formulation avec DtN

III. Principe d'absorption limite

a) Le problème limite

b) Le problème approché

Pour aller un peu plus loin...

En régime harmonique, borner artificiellement le domaine est essentiel. Cela permet d'analyser la formulation d'une part, et de résoudre numériquement d'autre part.

L'approche consiste à résoudre analytiquement dans le domaine extérieur, puis déduire une formulation en domaine borné à l'aide de l'opérateur DtN.

Une autre approche, non abordé ici, est l'utilisation d'équation intégrale qui repose sur la construction de la fonction de Green.