

GM 5 :

Méthodes numériques avancées
pour l'équation des ondes

Cours 3 :

Simulation en domaine non borné
(cas temporel)

GM 5 Année 2020 - 2021

Contact : A. Tonnoir

antoine.tonnoir@insa-rouen.fr

I. Introduction

De nombreux phénomènes de propagation d'ondes sont modélisés dans des domaines dit non bornés.

En géophysique :

Pour étudier localement la propagation d'un séisme ou pour de la prospection, on ne posera pas le problème sur la Terre entière.



La Terre



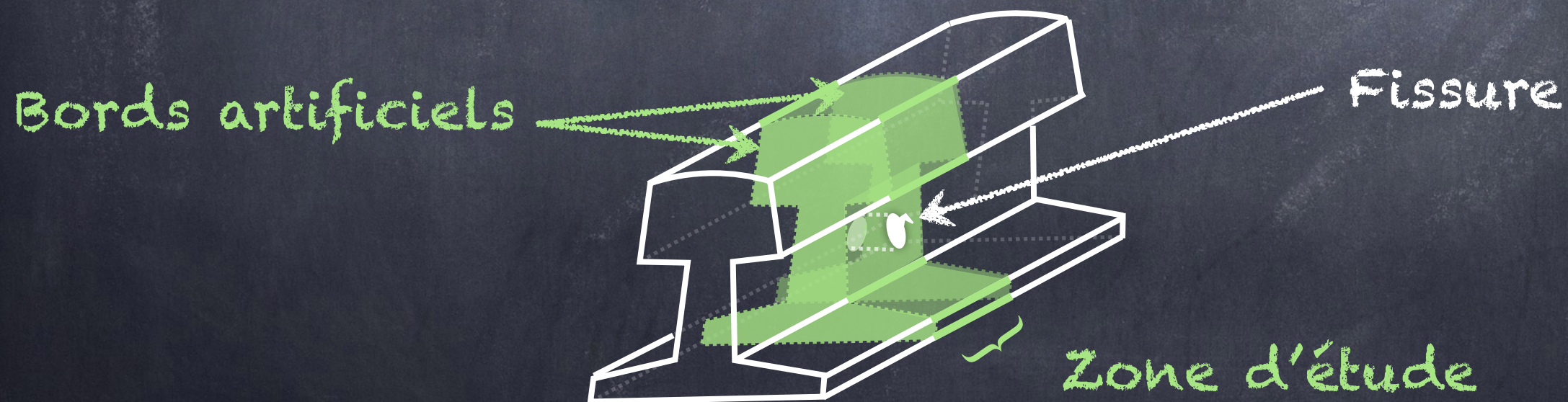
Bords artificiels

I. Introduction

De nombreux phénomènes de propagation d'ondes sont modélisés dans des domaines dit non bornés.

En CND :

La taille des défauts étant petite devant la taille de la pièce à inspecter, on s'intéresse généralement aux interactions locales entre l'onde et le défaut.



I. Introduction

De nombreux phénomènes de propagation d'ondes sont modélisés dans des domaines dit non bornés.

Problème : Comment modéliser un milieu infini ?

Les conditions aux limites classiques (Dirichlet / Neumann) ne modélisent pas un milieu ouvert !

Dirichlet homogène

Neumann homogène

I. Introduction

De nombreux phénomènes de propagation d'ondes sont modélisés dans des domaines dit non bornés.

Problème : Comment modéliser un milieu infini ?

Les conditions aux limites classiques (Dirichlet / Neumann) ne modélisent pas un milieu ouvert !

Objectif :

Construire des conditions aux limites « mimant » un domaine infini.

Au programme...

Plan :

I. Introduction

II. Les PML (Perfectly Matched Layers)

a) Construction en 1D

b) PML cartésiennes en 2D

III. Les CLA (Conditions aux limites Absorbantes)

II. a) Les PML en 1D

Pour commencer, considérons le **problème de transmission** suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \rho^{\pm} \partial_{tt}^2 \mathbf{u}^{\pm} - \operatorname{div} (\sigma^{\pm} \nabla \mathbf{u}^{\pm}) = 0, \quad \pm x > 0 \\ \mathbf{u}^{-} = \mathbf{u}^{+} \quad x = 0 \\ \sigma^{-} \partial_x \mathbf{u}^{-} = \sigma^{+} \partial_x \mathbf{u}^{+} \quad x = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} (\rho^{-}, \sigma^{-}) \quad (\rho^{+}, \sigma^{+}) \\ \hline \end{array}$$

où $\mathbf{u}^{-} = \mathbf{u}^{inc} + \mathbf{u}^{ref}$ avec $\mathbf{u}^{inc} = e^{i\omega t - ik^{-}x}$, $k^{\pm} = \omega \sqrt{\rho^{\pm} / \sigma^{\pm}}$.

II. a) Les PML en 1D

Pour commencer, considérons le **problème de transmission** suivant :

$$\rho^\pm \partial_{tt} \mathbf{u}^\pm - \text{div} (\sigma^\pm \nabla \mathbf{u}^\pm) = 0, \quad \pm x > 0$$

(ρ^-, σ^-) (ρ^+, σ^+)

$$u^- = u^+ \quad x=0$$

$$x=0$$

CT

$$\sigma^- \partial_x u^- = \sigma^+ \partial_x u^+ \quad x=0$$

$$x=0$$

où $u^- = u^{inc} + u^{ref}$ avec $u^{inc} = e^{i\omega t - ik^- x}$, $k^\pm = \omega \sqrt{\rho^\pm / \sigma^\pm}$.

II. a) Les PML en 1D

Pour commencer, considérons le problème de transmission suivant :

$$\rho^\pm \partial_{tt} \mathbf{u}^\pm - \operatorname{div}(\sigma^\pm \nabla \mathbf{u}^\pm) = 0, \quad \pm x > 0$$

(ρ^-, σ^-) (ρ^+, σ^+)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^- &= \mathbf{u}^+ & x=0 \\ \sigma^- \partial_x \mathbf{u}^- &= \sigma^+ \partial_x \mathbf{u}^+ & x=0 \end{aligned} \quad \text{CT}$$

où $\mathbf{u}^- = \mathbf{u}^{inc} + \mathbf{u}^{ref}$ avec $\mathbf{u}^{inc} = e^{i\omega t - ik^- x}$, $k^\pm = \omega \sqrt{\rho^\pm / \sigma^\pm}$.

2.1 Lemme

On a $\mathbf{u}^{ref} = R e^{i\omega t + ik^- x}$ et $\mathbf{u}^+ = T e^{i\omega t - ik^+ x}$ avec :

$$R = \frac{k^- \sigma^- - k^+ \sigma^+}{k^- \sigma^- + k^+ \sigma^+} \quad \text{et} \quad T = \frac{2k^- \sigma^-}{k^- \sigma^- + k^+ \sigma^+}$$

Preuve : au (vrai) tableau !

II. a) Les PML en 1D

Exemples problème de transmission (harmonique) :

$$\rho^\pm \partial_{tt} u^\pm - \text{div}(\sigma^\pm \nabla u^\pm) = 0, \quad \pm x > 0$$

$$u^- = u^+ \quad x=0$$

$$\sigma^- \partial_x u^- = \sigma^+ \partial_x u^+ \quad x=0$$

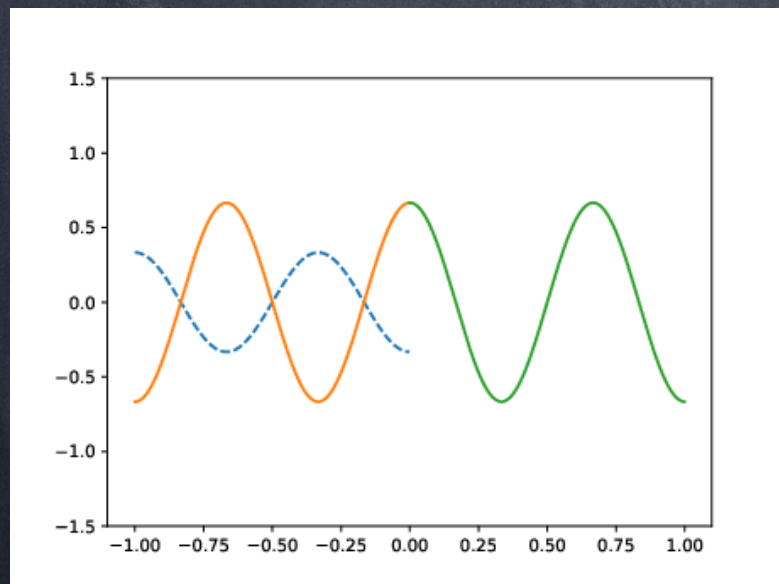
$$(\rho^-, \sigma^-)$$

$$(\rho^+, \sigma^+)$$

$$\omega = 3\pi$$

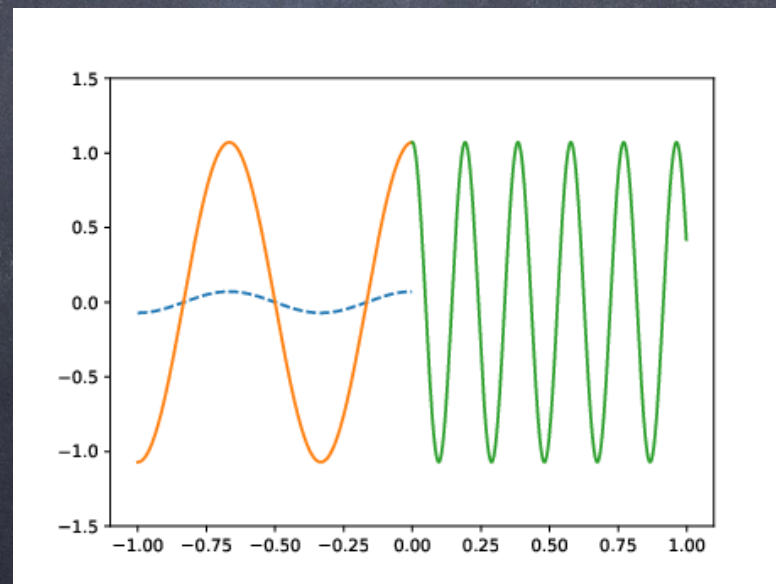
— u^- — u^+ ... u^{ref}

$$R = 0$$



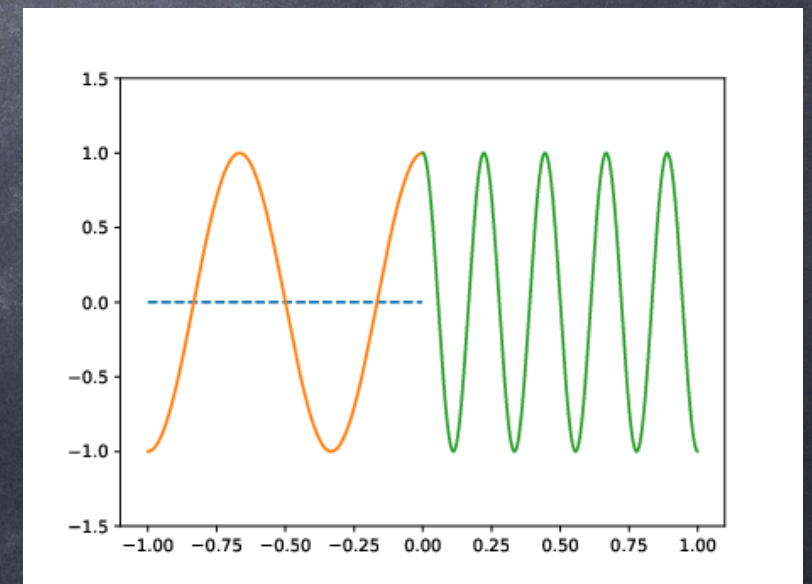
$$(\rho^-, \sigma^-) = (1, 1)$$

$$(\rho^+, \sigma^+) = (2, 2)$$



$$(\rho^-, \sigma^-) = (1, 1)$$

$$(\rho^+, \sigma^+) = (3, 1/4)$$



$$(\rho^-, \sigma^-) = (1, 1)$$

$$(\rho^+, \sigma^+) = (3, 1/3)$$

II. a) Les PML en 1D

Exemples problème de transmission (harmonique) :

$$\rho^\pm \partial_{tt}^2 u^\pm - \text{div}(\sigma^\pm \nabla u^\pm) = 0, \quad \pm x > 0$$

$$u^- = u^+ \quad x=0$$

$$\sigma^- \partial_x u^- = \sigma^+ \partial_x u^+ \quad x=0$$

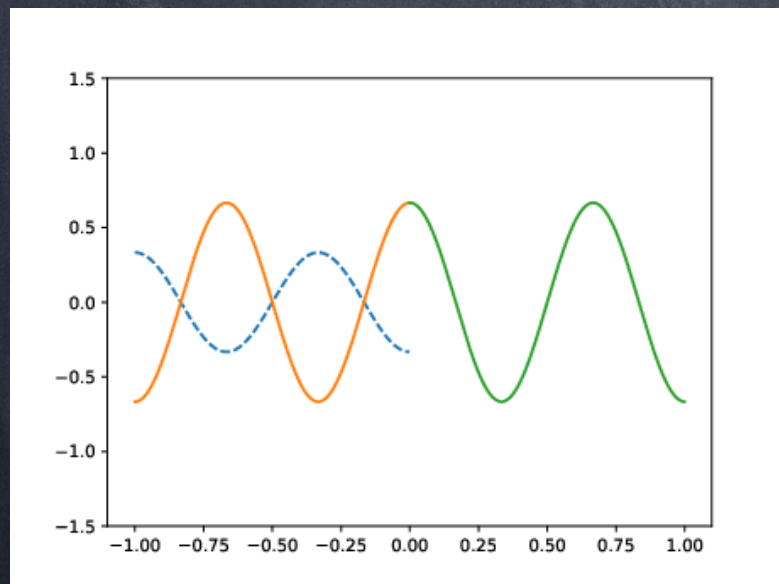
$$(\rho^-, \sigma^-)$$

$$(\rho^+, \sigma^+)$$

$$\omega = 3\pi$$

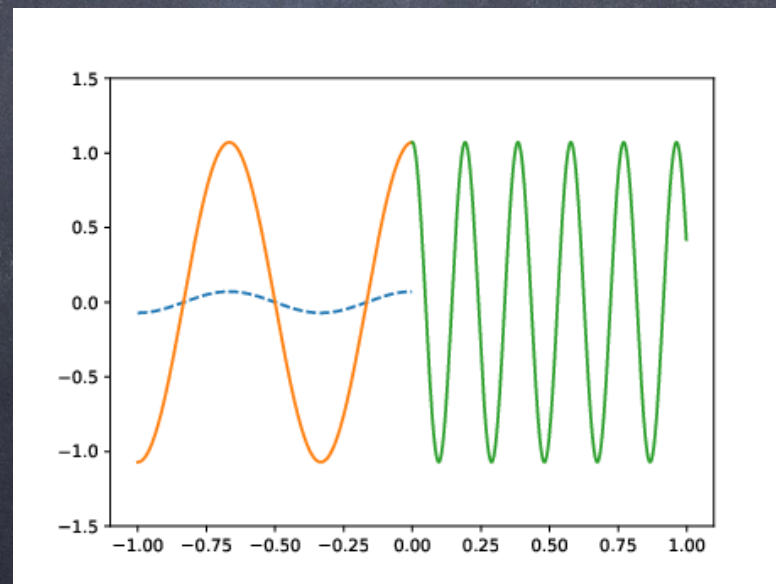
— u^- — u^+ ... u^{ref}

$$R = 0$$



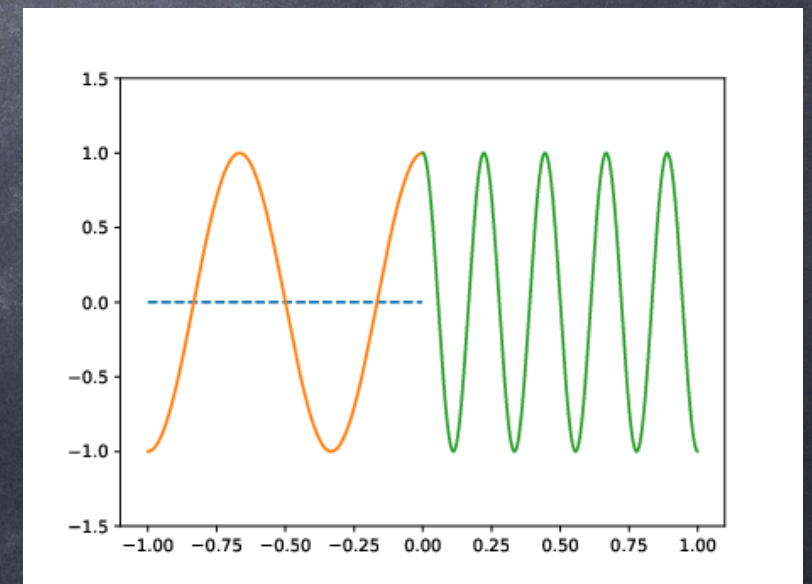
$$(\rho^-, \sigma^-) = (1, 1)$$

$$(\rho^+, \sigma^+) = (2, 2)$$



$$(\rho^-, \sigma^-) = (1, 1)$$

$$(\rho^+, \sigma^+) = (3, 1/4)$$



$$(\rho^-, \sigma^-) = (1, 1)$$

$$(\rho^+, \sigma^+) = (3, 1/3)$$

II. a) Les PML en 1D

Exemples problème de transmission (harmonique) :

$$\rho^\pm \partial_{tt}^2 u^\pm - \text{div}(\sigma^\pm \nabla u^\pm) = 0, \quad \pm x > 0$$

$$u^- = u^+$$

$$x = 0$$

$$\sigma^- \partial_x u^- = \sigma^+ \partial_x u^+$$

$$x = 0$$

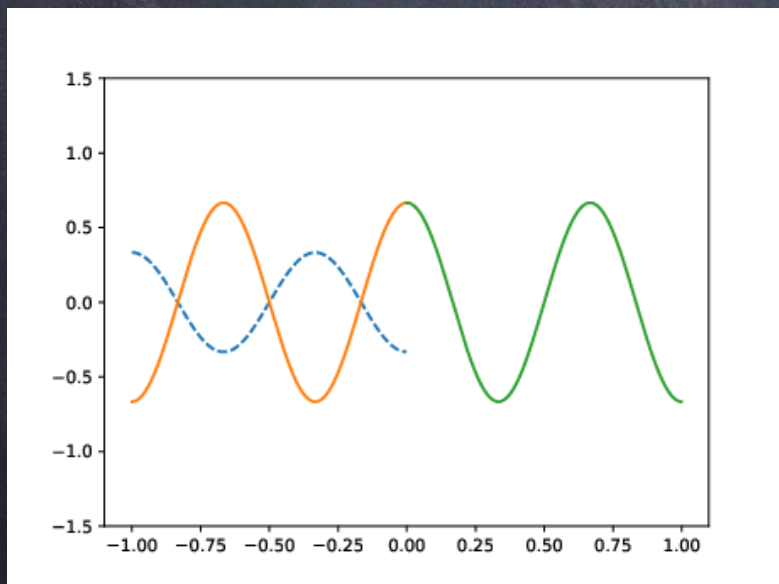
$$(\rho^-, \sigma^-)$$

$$(\rho^+, \sigma^+)$$

$$\omega = 3\pi$$

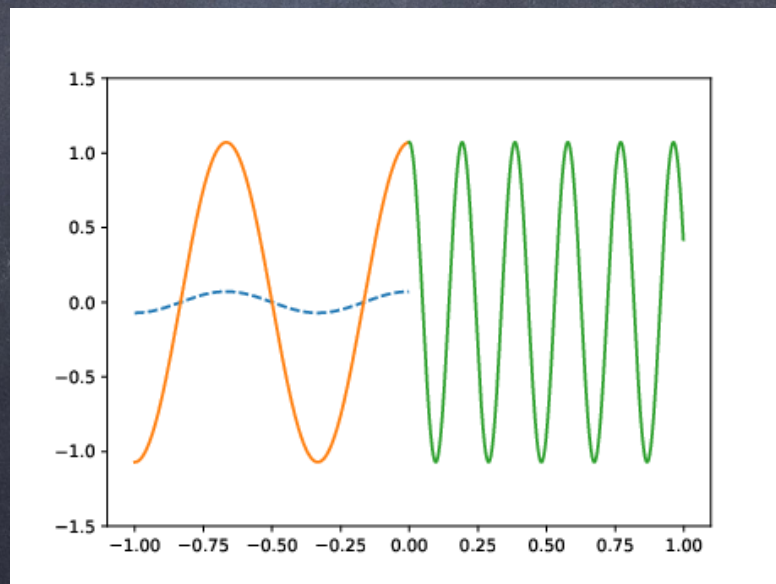
— u^- — u^+ ···· u^{ref}

$$R = 0$$



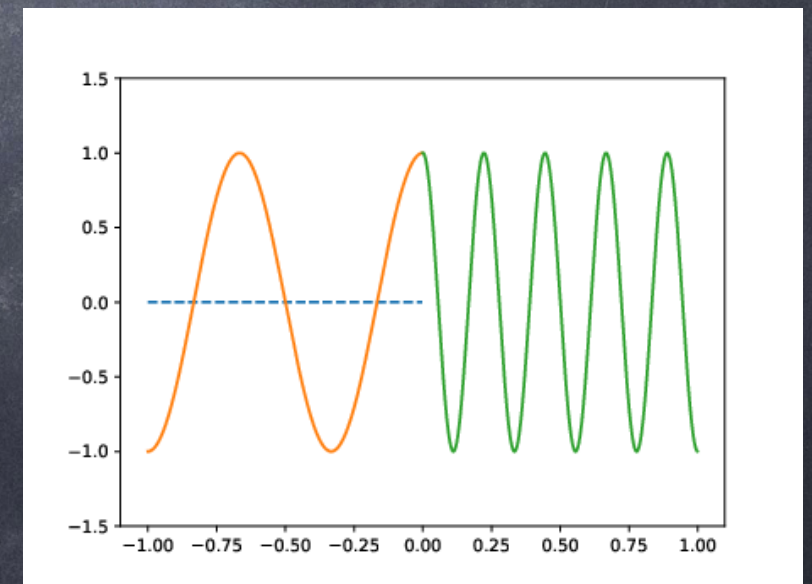
$$(\rho^-, \sigma^-) = (1, 1)$$

$$(\rho^+, \sigma^+) = (2, 2)$$



$$(\rho^-, \sigma^-) = (1, 1)$$

$$(\rho^+, \sigma^+) = (3, 1/4)$$



$$(\rho^-, \sigma^-) = (1, 1)$$

$$(\rho^+, \sigma^+) = (3, 1/3)$$

II. a) Les PML en 1D

Exemples problème de transmission (harmonique) :

$$\rho^\pm \partial_{tt} u^\pm - \text{div}(\sigma^\pm \nabla u^\pm) = 0, \quad \pm x > 0$$

$$u^- = u^+$$

$$x = 0$$

$$\sigma^- \partial_x u^- = \sigma^+ \partial_x u^+$$

$$x = 0$$

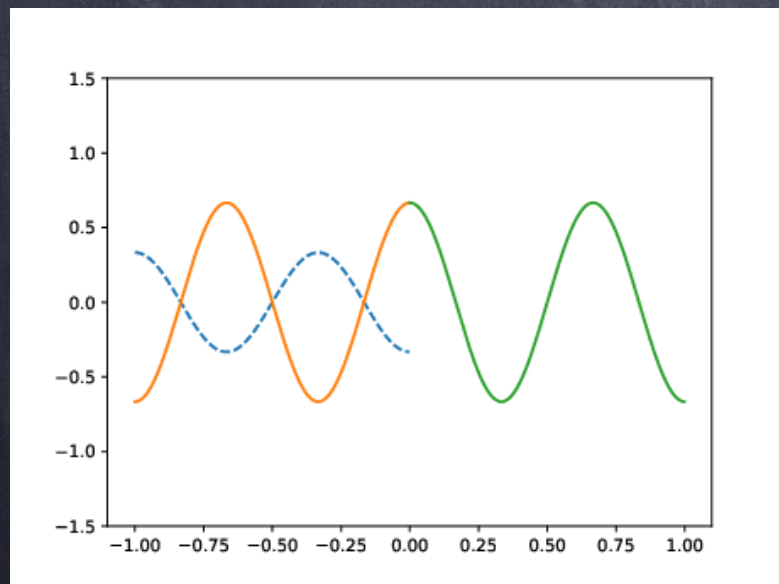
$$(\rho^-, \sigma^-)$$

$$(\rho^+, \sigma^+)$$

$$\omega = 3\pi$$

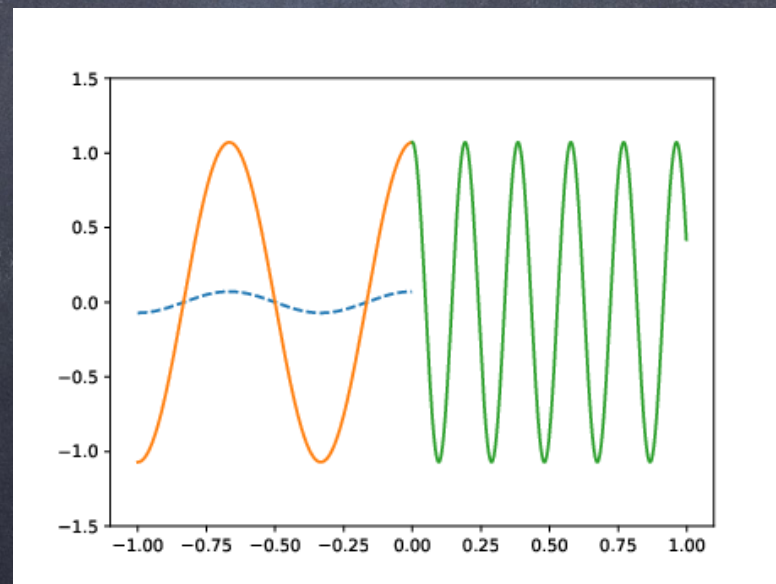
— u^- — u^+ ··· u^{ref}

$$R = 0$$



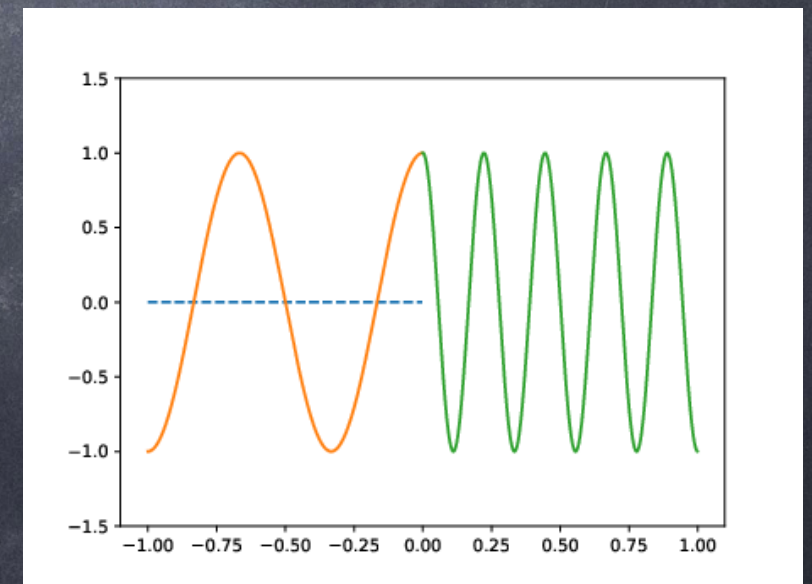
$$(\rho^-, \sigma^-) = (1, 1)$$

$$(\rho^+, \sigma^+) = (2, 2)$$



$$(\rho^-, \sigma^-) = (1, 1)$$

$$(\rho^+, \sigma^+) = (3, 1/4)$$



$$(\rho^-, \sigma^-) = (1, 1)$$

$$(\rho^+, \sigma^+) = (3, 1/3)$$

II. a) Les PML en 1D

2.2 Corollaire

On a une transmission parfaite ssi $R = 0$, c'est à dire :

$$k^+ \sigma^+ = k^- \sigma^- \Leftrightarrow \rho^+ \sigma^+ = \rho^- \sigma^-$$

On peut interpréter la transmission parfaite comme un changement de variable dans la partie $x > 0$:

$$x \rightarrow \alpha(x) \quad \text{où} \quad \alpha(x) = Lx \quad \text{avec} \quad L = \frac{\rho^+}{\rho^-} = \frac{\sigma^-}{\sigma^+}$$

(détails au (vrai) tableau)

$$\rho^+ = L\rho^- \quad \text{et} \quad \sigma^+ = \frac{\sigma^-}{L}$$

II. a) Les PML en 1D

2.2 Corollaire

On a une transmission parfaite ssi $R = 0$, c'est à dire :

$$k^+ \sigma^+ = k^- \sigma^- \Leftrightarrow \rho^+ \sigma^+ = \rho^- \sigma^-$$

On peut interpréter la transmission parfaite comme un changement de variable dans la partie $x > 0$:

$$x \rightarrow \alpha(x) \quad \text{où} \quad \alpha(x) = Lx \quad \text{avec} \quad L = \frac{\rho^+}{\rho^-} = \frac{\sigma^-}{\sigma^+}$$

Dans l'autre sens, à partir d'un changement de variable, on peut déduire un milieu avec transmission parfaite !

$$\rho^+ = L\rho^- \quad \text{et} \quad \sigma^+ = \frac{\sigma^-}{L}$$

II. a) Les PML en 1D

Reprenons notre problème de transmission :

$$\left| \begin{array}{l} \rho^\pm \partial_{tt}^2 \mathbf{u}^\pm - \operatorname{div} (\sigma^\pm \nabla \mathbf{u}^\pm) = 0, \quad \pm x > 0 \\ \mathbf{u}^- = \mathbf{u}^+ \\ \sigma^- \partial_x \mathbf{u}^- = \sigma^+ \partial_x \mathbf{u}^+ \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\rho^-, \sigma^-) \\ \hline (\rho^+, \sigma^+) \end{array}$$

où $\mathbf{u}^- = \mathbf{u}^{inc} + \mathbf{u}^{ref}$ avec :

$$\mathbf{u}^{inc} = e^{i\omega t - ik^- x}, \quad \mathbf{u}^{ref} = R e^{i\omega t + ik^- x} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^+ = T e^{i\omega t - ik^+ x}$$

II. a) Les PML en 1D

Reprenons notre problème de transmission :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^\pm \partial_{tt}^2 \mathbf{u}^\pm - \operatorname{div}(\sigma^\pm \underline{\nabla} \mathbf{u}^\pm) = 0, \quad \pm x > 0 \\ \mathbf{u}^- = \mathbf{u}^+ \quad x = 0 \\ \sigma^- \partial_x \mathbf{u}^- = \sigma^+ \partial_x \mathbf{u}^+ \quad x = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{cc} (\rho^-, \sigma^-) & (\rho^+, \sigma^+) \\ \hline & \end{array}$$

où $\mathbf{u}^- = \mathbf{u}^{inc} + \mathbf{u}^{ref}$ avec :

$$\mathbf{u}^{inc} = e^{i\omega t - ik^- x}, \quad \mathbf{u}^{ref} = R e^{i\omega t + ik^- x} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^+ = T e^{i\omega t - ik^+ x}$$

Idée : Considérons le changement de variable complexe :

$$x \rightarrow \alpha(x) \quad \text{où} \quad \alpha(x) = Lx, \quad L = (\mu - i\varepsilon), \quad \varepsilon > 0$$

alors \mathbf{u}^+ sera exponentiellement décroissante !

L'idée est alors de choisir : $\rho^+ = L\rho^-$ et $\sigma^+ = \frac{\sigma^-}{L}$.

II. a) Les PML en 1D

Exemples problème de transmission (harmonique) :

$$\rho^\pm \partial_{tt}^2 \mathbf{u}^\pm - \text{div}(\sigma^\pm \nabla \mathbf{u}^\pm) = 0, \quad \pm x > 0$$

$$\mathbf{u}^- = \mathbf{u}^+ \quad x=0$$

$$\sigma^- \partial_x \mathbf{u}^- = \sigma^+ \partial_x \mathbf{u}^+ \quad x=0$$

$$(\rho^-, \sigma^-)$$

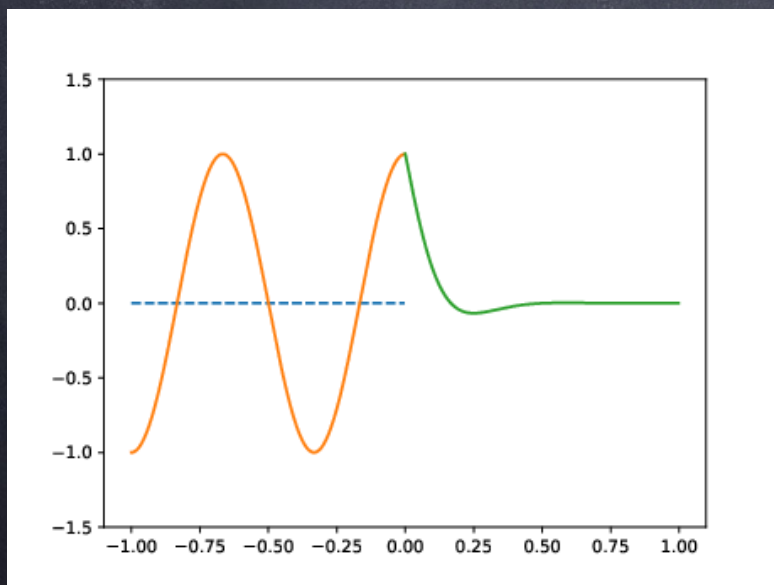
$$(\rho^+, \sigma^+)$$

$$(\rho^-, \sigma^-) = (1, 1)$$

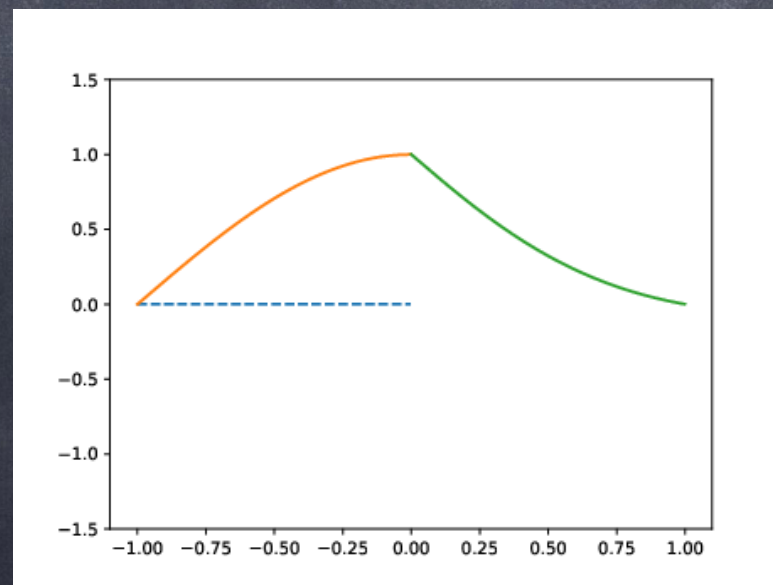
$$(\rho^+, \sigma^+) = (L, 1/L)$$

$$L = 1 - i$$

— u^- — u^+ ... u^{ref}



$$\omega = 3\pi$$



$$\omega = \pi/2$$

II. a) Les PML en 1D

Exemples problème de transmission (harmonique) :

$$\rho^\pm \partial_{tt}^2 \mathbf{u}^\pm - \text{div}(\sigma^\pm \nabla \mathbf{u}^\pm) = 0, \quad \pm x > 0$$

$$\mathbf{u}^- = \mathbf{u}^+ \quad x = 0$$

$$\sigma^- \partial_x \mathbf{u}^- = \sigma^+ \partial_x \mathbf{u}^+ \quad x = 0$$

$$(\rho^-, \sigma^-)$$

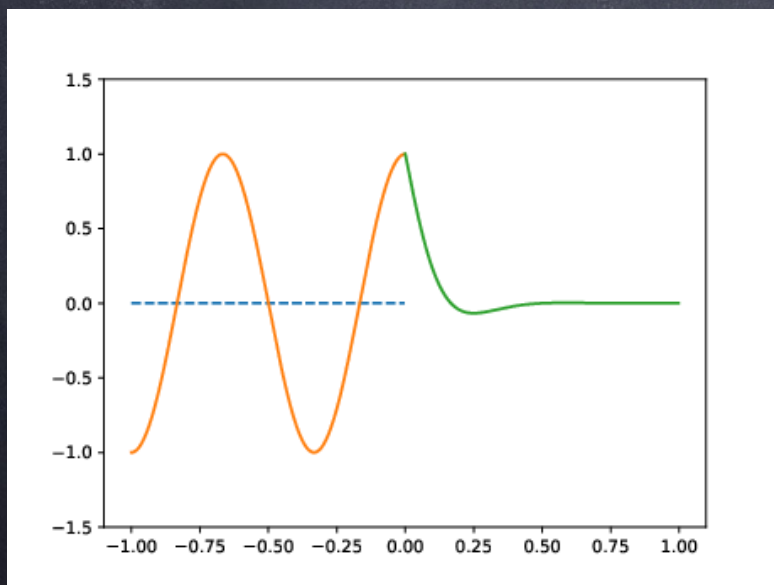
$$(\rho^+, \sigma^+)$$

$$(\rho^-, \sigma^-) = (1, 1)$$

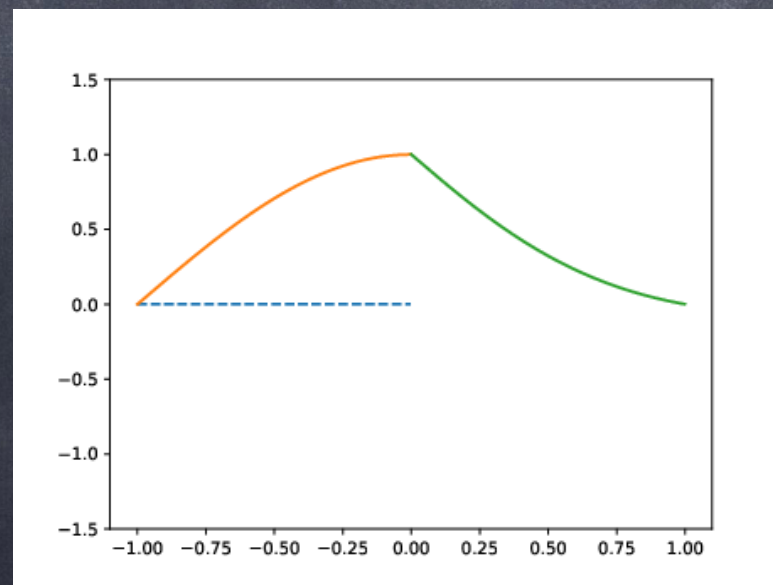
$$(\rho^+, \sigma^+) = (L, 1/L)$$

$$L = 1 - i$$

— u^- — u^+ ... u^{ref}



$$\omega = 3\pi$$



$$\omega = \pi/2$$

II. a) Les PML en 1D

Exemples problème de transmission (harmonique) :

$$\rho^\pm \partial_{tt}^2 \mathbf{u}^\pm - \text{div}(\sigma^\pm \nabla \mathbf{u}^\pm) = 0, \quad \pm x > 0$$

$$\mathbf{u}^- = \mathbf{u}^+ \quad x = 0$$

$$\sigma^- \partial_x \mathbf{u}^- = \sigma^+ \partial_x \mathbf{u}^+ \quad x = 0$$

$$(\rho^-, \sigma^-)$$

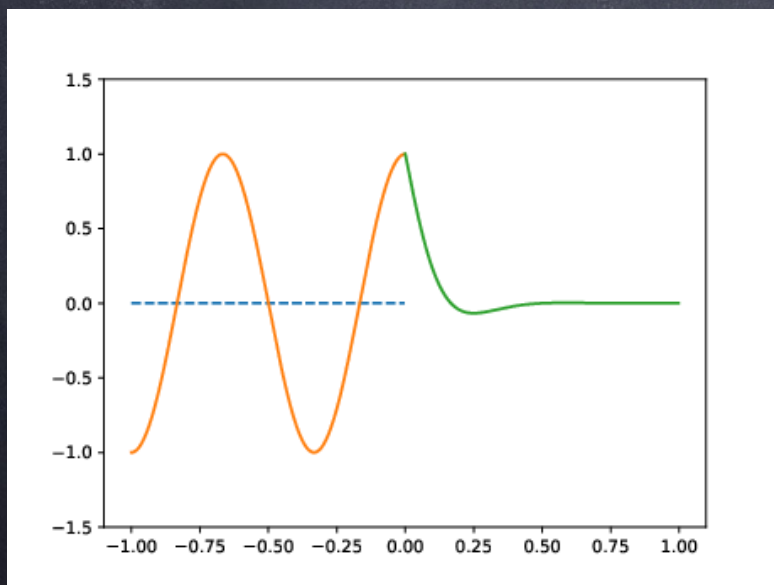
$$(\rho^+, \sigma^+)$$

$$(\rho^-, \sigma^-) = (1, 1)$$

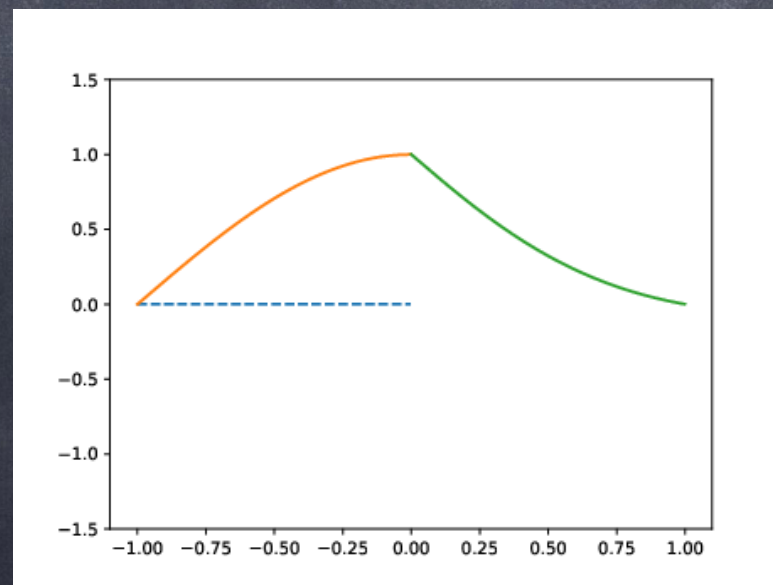
$$(\rho^+, \sigma^+) = (L, 1/L)$$

$$L = 1 - i$$

— \mathbf{u}^- — \mathbf{u}^+ ... \mathbf{u}^{ref}



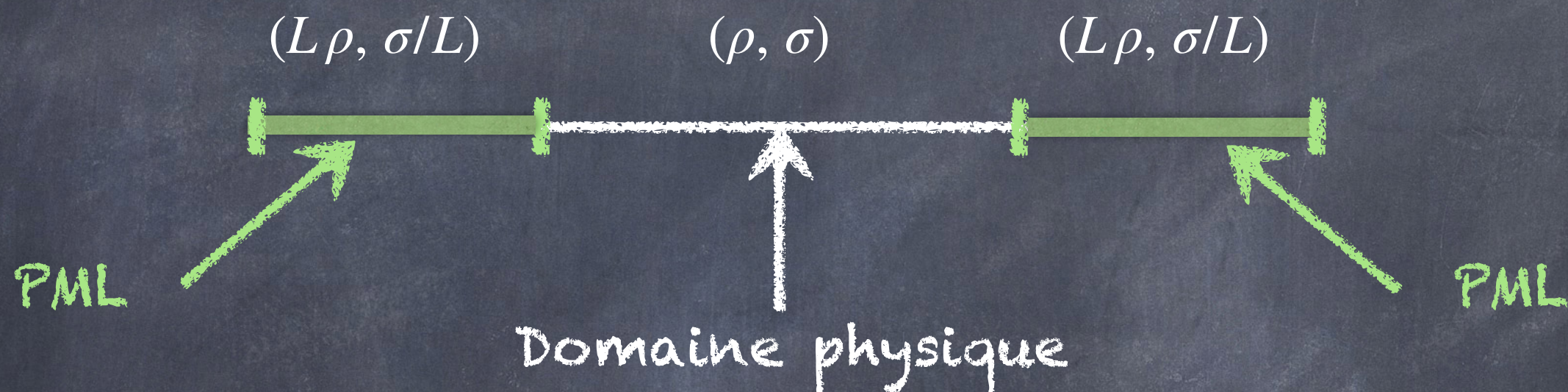
$$\omega = 3\pi$$



$$\omega = \pi/2$$

II. a) Les PML en 1D

Pour borner artificiellement le domaine de calculs, l'idée est alors d'encadrer ce dernier par des couches dites PML (Perfectly Matched Layers) :



Ces couches n'induisent aucune réflexion et rendent la solution décroissante.

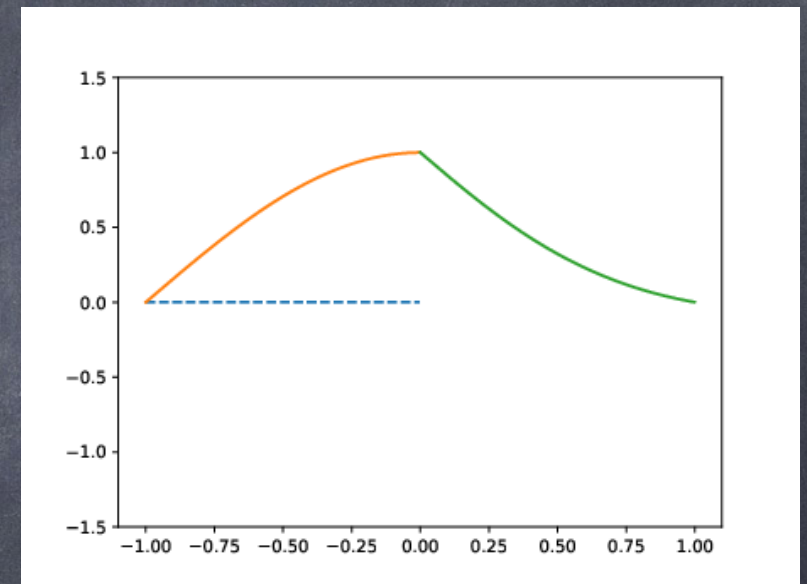
Remarque : La solution étant exponentiellement décroissante dans la PML, on pourra la tronquer à une distance finie.

II. a) Les PML en 1D

Comment choisir le paramètre L ?

Comme nous l'avons vu, pour un paramètre $L = \mu - i\varepsilon$ fixé, la décroissance dans la couche est lente pour ω petit.

$$u^+ = T e^{i\omega t - ik^+ \mu x} e^{-\varepsilon k^+ x} \quad \text{où} \quad k^+ = \omega \sqrt{\rho^- / \sigma^-}$$



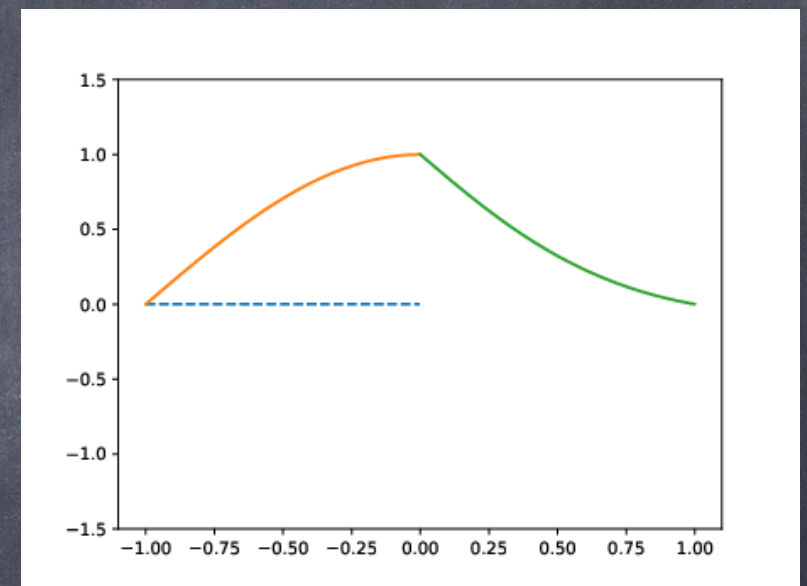
$$\omega = \pi/2, \quad L = 1 - i$$

II. a) Les PML en 1D

Comment choisir le paramètre L ?

Comme nous l'avons vu, pour un paramètre $L = \mu - i\varepsilon$ fixé, la décroissance dans la couche est lente pour ω petit.

$$u^+ = T e^{i\omega t - ik^+ \mu x} e^{-\varepsilon k^+ x} \quad \text{où} \quad k^+ = \omega \sqrt{\rho^- / \sigma^-}$$



$$\omega = \pi/2, \quad L = 1 - i$$

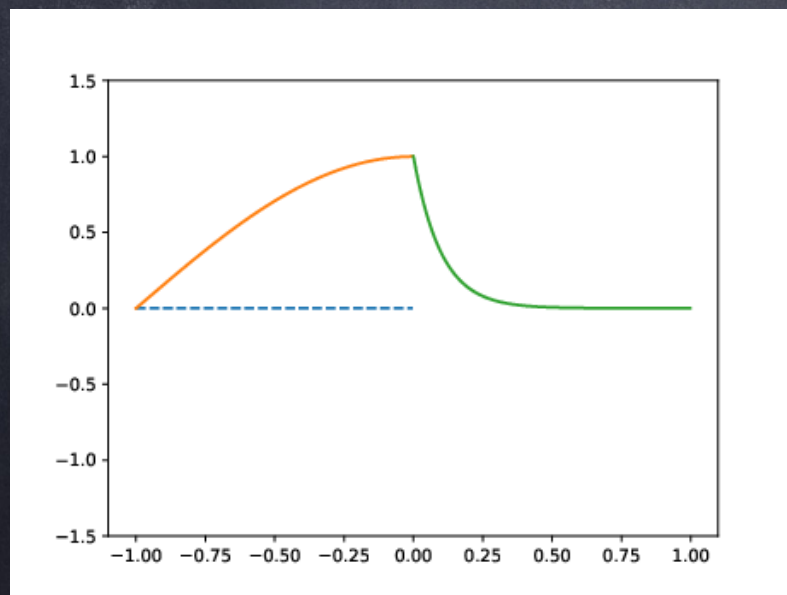
II. a) Les PML en 1D

Comment choisir le paramètre L ?

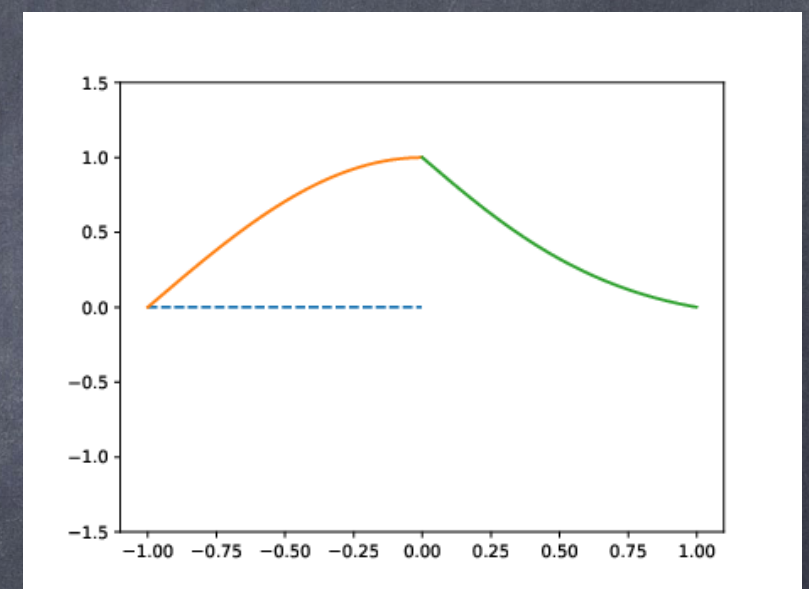
Comme nous l'avons vu, pour un paramètre $L = \mu - i\varepsilon$ fixé, la décroissance dans la couche est lente pour ω petit.

$$u^+ = T e^{i\omega t - ik^+ \mu x} e^{-\varepsilon k^+ x} \quad \text{où} \quad k^+ = \omega \sqrt{\rho^- / \sigma^-}$$

L'idée est alors de choisir le paramètre ε dépendant de la fréquence ω .



$$\omega = \pi/2, \quad L = 1 - 10i/\omega$$



$$\omega = \pi/2, \quad L = 1 - i$$

II. a) Les PML en 1D

Construction de la PML pour $x > 0$:

$$\rho \partial_{tt}^2 \underline{u} - \operatorname{div}(\sigma \underline{\nabla} \underline{u}) = 0 \quad \longrightarrow \quad -\omega^2 \rho \hat{\underline{u}} - \operatorname{div}(\sigma \underline{\nabla} \hat{\underline{u}}) = 0$$

TF ($\partial_t \leftrightarrow i\omega$)

Pour les $x > 0$, pour former le milieu PML, on remplace (ρ, σ) par :

$$\hat{\rho}^+ = \hat{L}(\omega) \rho = \rho \mu - i\rho \frac{\varepsilon}{\omega} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^+ = \frac{\sigma}{\hat{L}(\omega)} = \frac{i\sigma\omega}{i\omega\mu + \varepsilon}$$

avec $\hat{L}(\omega) = \mu - i\varepsilon/\omega$.

En appliquant la TF inverse, on déduit alors pour $x > 0$:

$$\partial_{tt}^2(\rho^+(t) * \underline{u}) - \operatorname{div}((\sigma^+(t) * \underline{\nabla} \underline{u})) = 0$$

où $*$ est le produit de convolution en temps.

II. a) Les PML en 1D

Construction de la PML pour $x > 0$:

Dans le milieu PML ($x > 0$), on a donc :

$$\partial_t^2(\rho^+(t)*\mathbf{u}) - \operatorname{div}((\sigma^+(t)*\underline{\nabla}\mathbf{u})) = 0$$

Pour éviter le calcul du produit de convolution (très coûteux), on remarque que :

$$(\rho^+(t)*\mathbf{u}) = \mathcal{F}^{-1}\left((\rho\mu - i\rho\frac{\varepsilon}{\omega})\hat{\mathbf{u}}\right) = \rho\mu\mathbf{u} - \mathcal{F}^{-1}\left(i\rho\frac{\varepsilon}{\omega}\hat{\mathbf{u}}\right)$$

L'idée (géniale) est alors de poser une variable auxiliaire $\hat{\mathbf{v}} = i\frac{\varepsilon}{\omega}\hat{\mathbf{u}}$. Ainsi, on a :

$$\textcircled{1} \quad (\rho^+(t)*\mathbf{u}) = \rho\mu\mathbf{u} - \rho\mathbf{v}$$

$$\textcircled{2} \quad i\omega\hat{\mathbf{v}} + \varepsilon\hat{\mathbf{u}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t\mathbf{v} + \varepsilon\mathbf{u} = 0$$

II. a) Les PML en 1D

Construction de la PML pour $x > 0$:

Dans le milieu PML ($x > 0$), on a donc :

$$\partial_{tt}^2(\rho^+(t)*\underline{u}) - \text{div}((\sigma^+(t)*\underline{\nabla}u)) = 0$$

De même, on a pour le second terme : $(\sigma^+(t)*\underline{u}) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{i\omega\sigma}{i\omega\mu + \varepsilon} \hat{u} \right)$

On introduit une seconde variable auxiliaire $\hat{\omega} = \frac{i\omega}{i\omega\mu + \varepsilon} \hat{u}$

pour déduire : $\textcircled{1} (\sigma^+(t)*\underline{u}) = \sigma\omega$

$$\textcircled{2} (i\omega\mu + \varepsilon)\hat{\omega} = i\omega\hat{u} \iff \mu\partial_t\omega + \varepsilon\omega = \partial_t u$$

II. a) Les PML en 1D

Construction de la PML pour $x > 0$:

Dans le milieu PML ($x > 0$), on a donc :

$$\partial_{tt}^2(\rho^+(t)*\underline{u}) - \text{div}((\sigma^+(t)*\underline{\nabla u})) = 0$$

De même, on a pour le second terme : $(\sigma^+(t)*\underline{u}) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{i\omega\sigma}{i\omega\mu + \varepsilon} \hat{u} \right)$

On introduit une seconde variable auxiliaire $\hat{\omega} = \frac{i\omega}{i\omega\mu + \varepsilon} \hat{u}$

pour déduire : \textcircled{a} $(\sigma^+(t)*\underline{u}) = \sigma\omega$

$$\textcircled{b} \quad (i\omega\mu + \varepsilon)\hat{\omega} = i\omega\hat{u} \quad \Leftrightarrow \quad \mu\partial_t\omega + \varepsilon\omega = \partial_t u$$

Remarque : On peut considérer $(\sigma^+(t)*\underline{u})$ à la place de $(\sigma^+(t)*\underline{\nabla u})$ car (μ, ε) ne dépendent pas de x dans la PML. 16

II. a) Les PML en 1D

Construction de la PML pour $x > 0$:

Dans le milieu PML ($x > 0$), on a donc :

$$\partial_{tt}^2(\rho^+(t)*\underline{u}) - \operatorname{div}((\sigma^+(t)*\underline{\nabla}\underline{u})) = 0$$

qui se réécrit grâce à l'aide d'une variable auxiliaire :

$$\mu\rho\partial_{tt}^2\underline{u} + \varepsilon\rho\partial_t\underline{u} - \operatorname{div}\left(\frac{\sigma}{\mu}\underline{\nabla}\underline{u}\right) - \operatorname{div}\left(\frac{\sigma}{\mu}\underline{\nabla}\underline{p}\right) = 0$$

$$\partial_t\underline{p} + \frac{\varepsilon}{\mu}(\underline{u} + \underline{p}) = 0$$

(détails au (vrai) tableau)

$$(\underline{p} = \mu\underline{w} - \underline{u})$$

II. a) Les PML en 1D

Construction de la PML pour $x > 0$:

Dans le milieu PML ($x > 0$), on a donc :

$$\partial_{tt}^2(\rho^+(t)*\underline{u}) - \operatorname{div}((\sigma^+(t)*\underline{\nabla}\underline{u})) = 0$$

qui se réécrit grâce à l'aide d'une variable auxiliaire :

$$\mu\rho\partial_{tt}^2\underline{u} + \varepsilon\rho\partial_t\underline{u} - \operatorname{div}\left(\frac{\sigma}{\mu}\underline{\nabla}\underline{u}\right) - \operatorname{div}\left(\frac{\sigma}{\mu}\underline{\nabla}\underline{p}\right) = 0$$

$$\partial_t\underline{p} + \frac{\varepsilon}{\mu}(\underline{u} + \underline{p}) = 0$$

(détails au (vrai) tableau)

$$(\underline{p} = \mu\underline{w} - \underline{u})$$

Remarque : Suivant la même démarche, on peut également considérer un paramètre $\hat{L}(\omega, x)$ dépendant de la variable d'espace x .

II. a) Les PML en 1D

Construction de la PML pour $x > 0$:

Dans le milieu PML ($x > 0$), on a donc :

$$\partial_{tt}^2(\rho^+(t)*\underline{u}) - \operatorname{div}((\sigma^+(t)*\underline{\nabla} \underline{u})) = 0$$

qui se réécrit grâce à l'aide d'une variable auxiliaire :

$$\mu\rho\partial_{tt}^2\underline{u} + \varepsilon\rho\partial_t\underline{u} - \operatorname{div}\left(\frac{\sigma}{\mu}\underline{\nabla}\underline{u}\right) - \operatorname{div}\left(\frac{\sigma}{\mu}\underline{\nabla}\underline{p}\right) = 0$$

$$\partial_t\underline{p} + \frac{\varepsilon}{\mu}(\underline{u} + \underline{p}) = 0$$

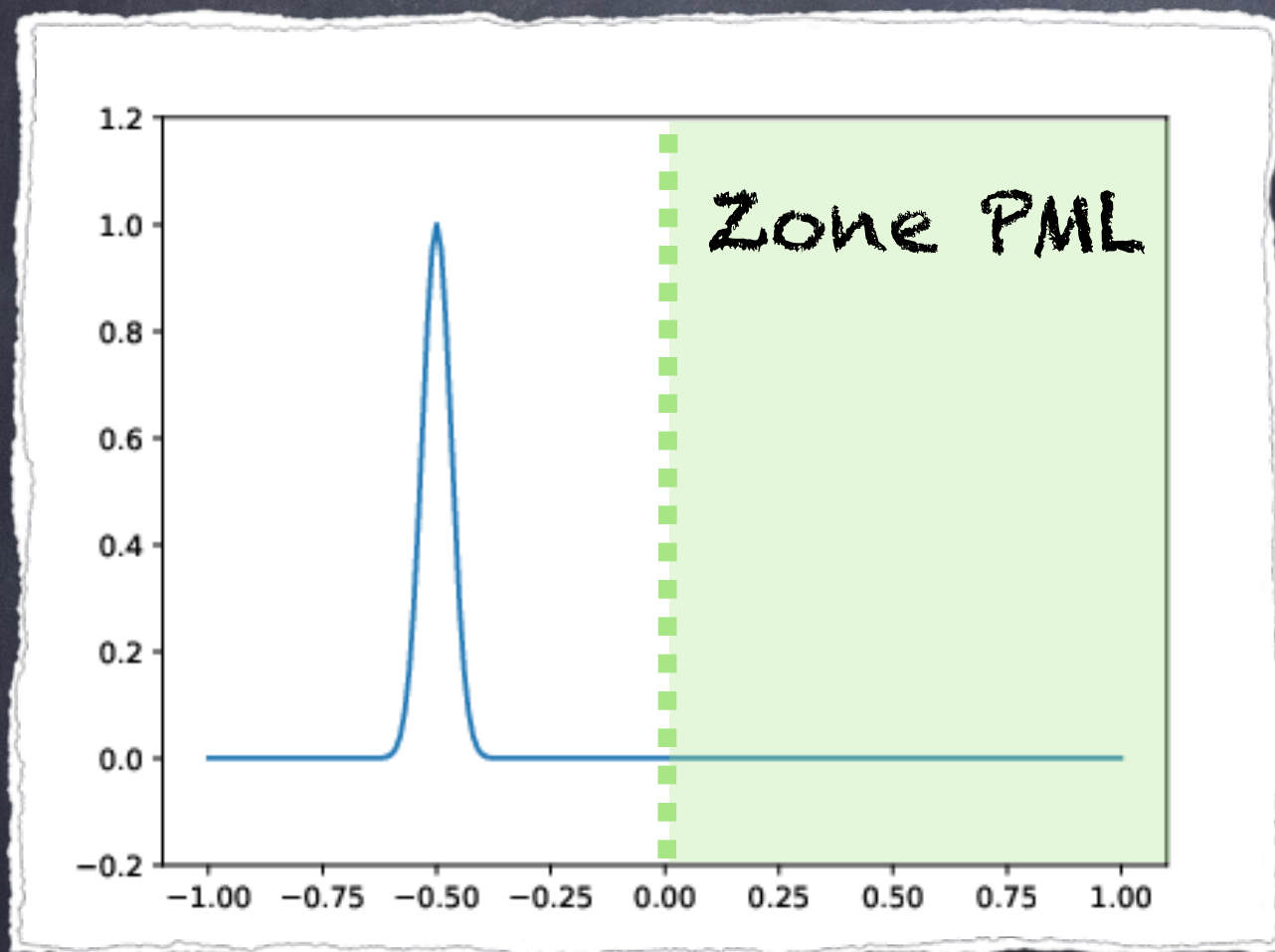
(détails au (vrai) tableau)

$$(\underline{p} = \mu\underline{w} - \underline{u})$$

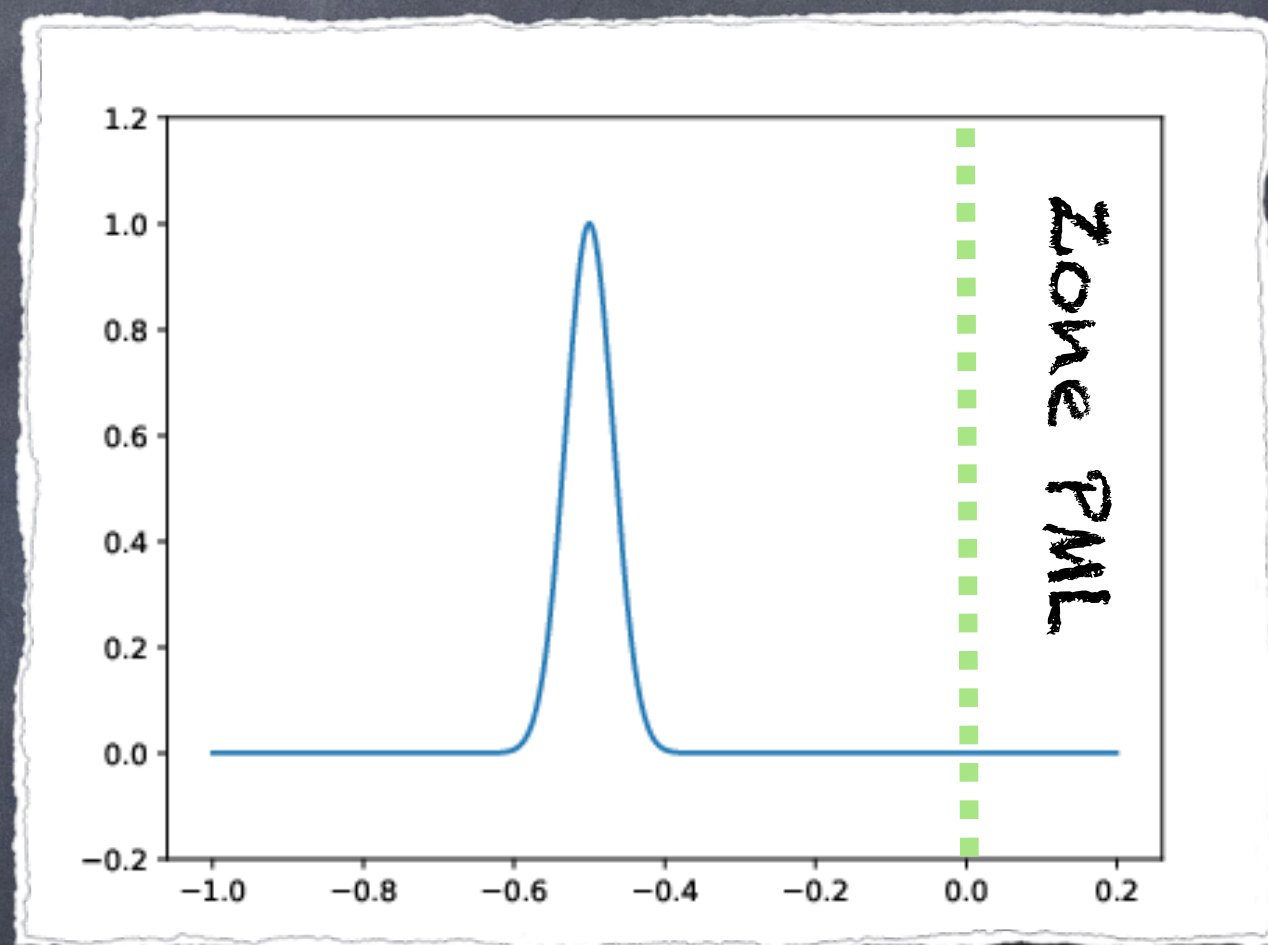
Remarque 2 : On peut « symétriser » la formulation en prenant le gradient de la seconde équation.

II. a) Les PML en 1D

Illustration des PML :



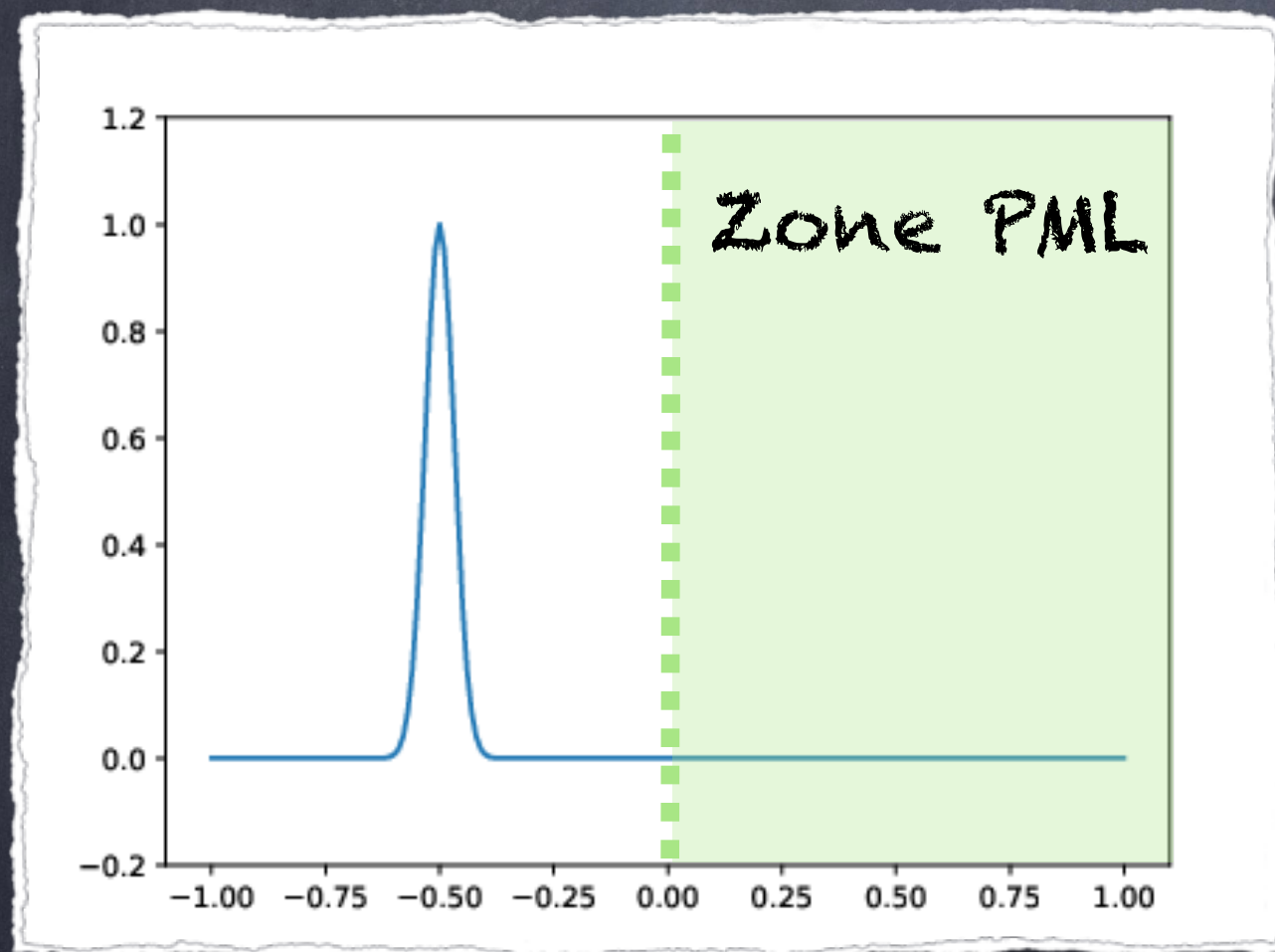
$$L = 1 - 10i$$



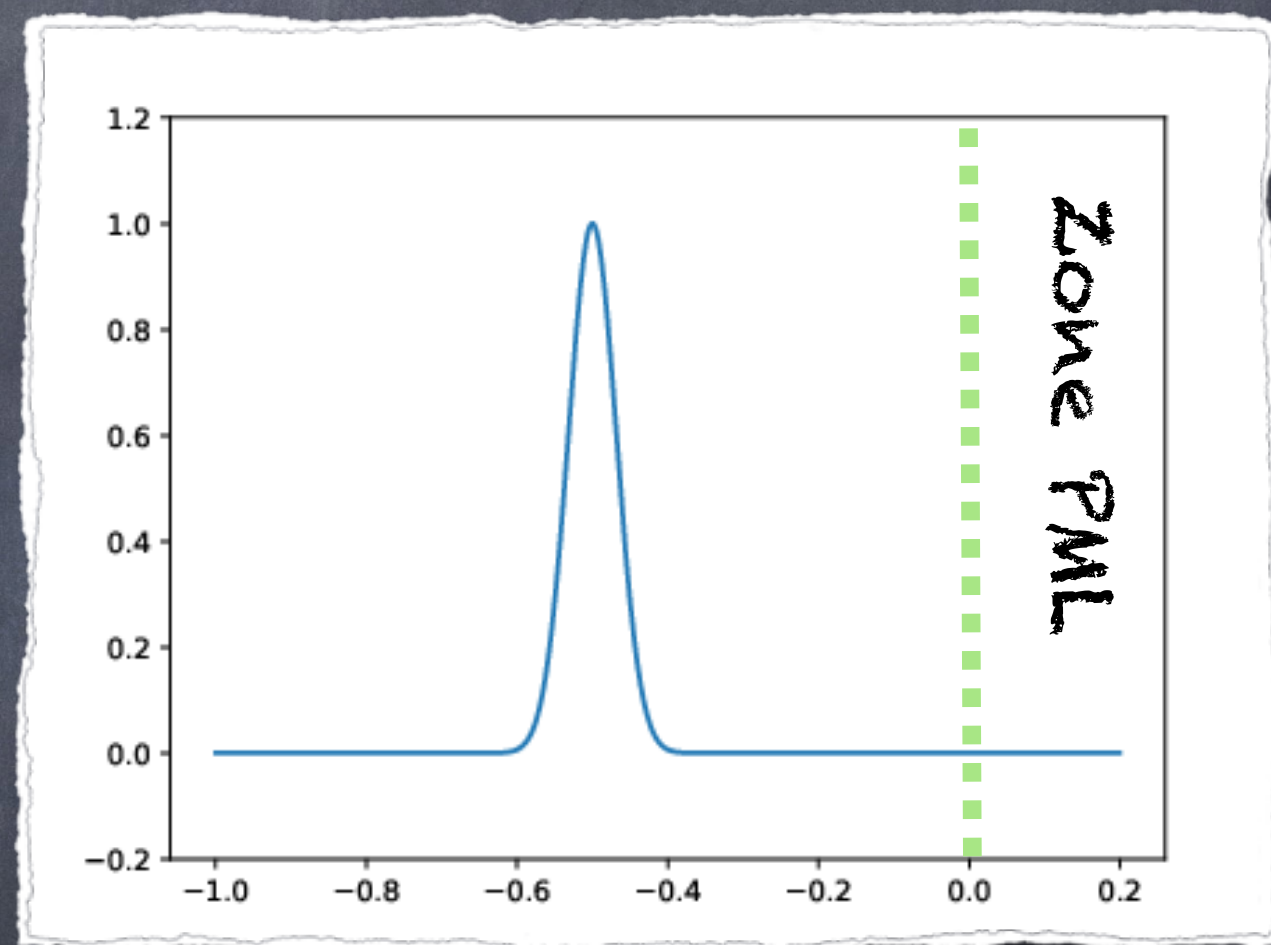
$$L = 3 - 20i$$

II. a) Les PML en 1D

Illustration des PML :



$$L = 1 - 10i$$

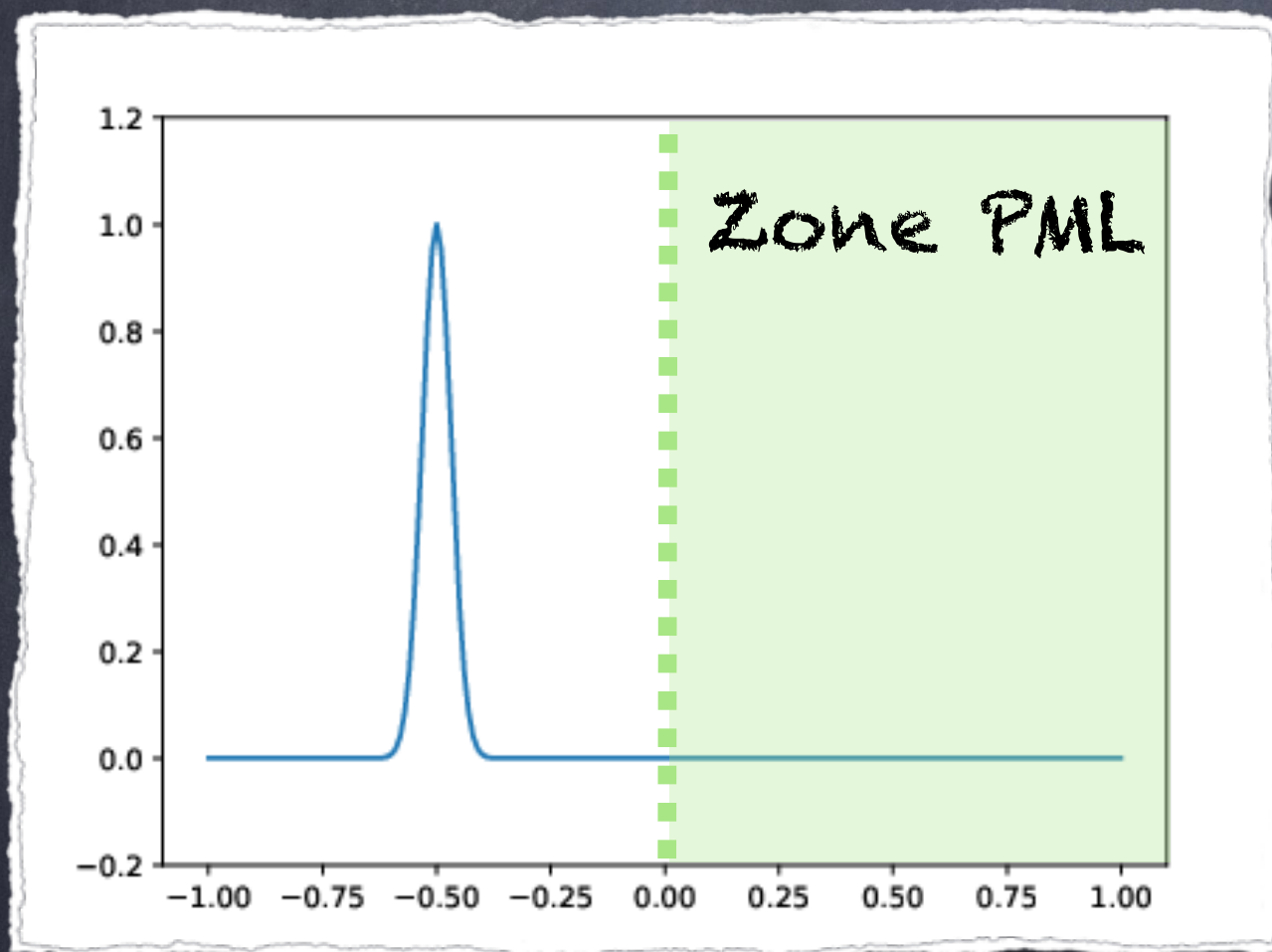


$$L = 3 - 20i$$

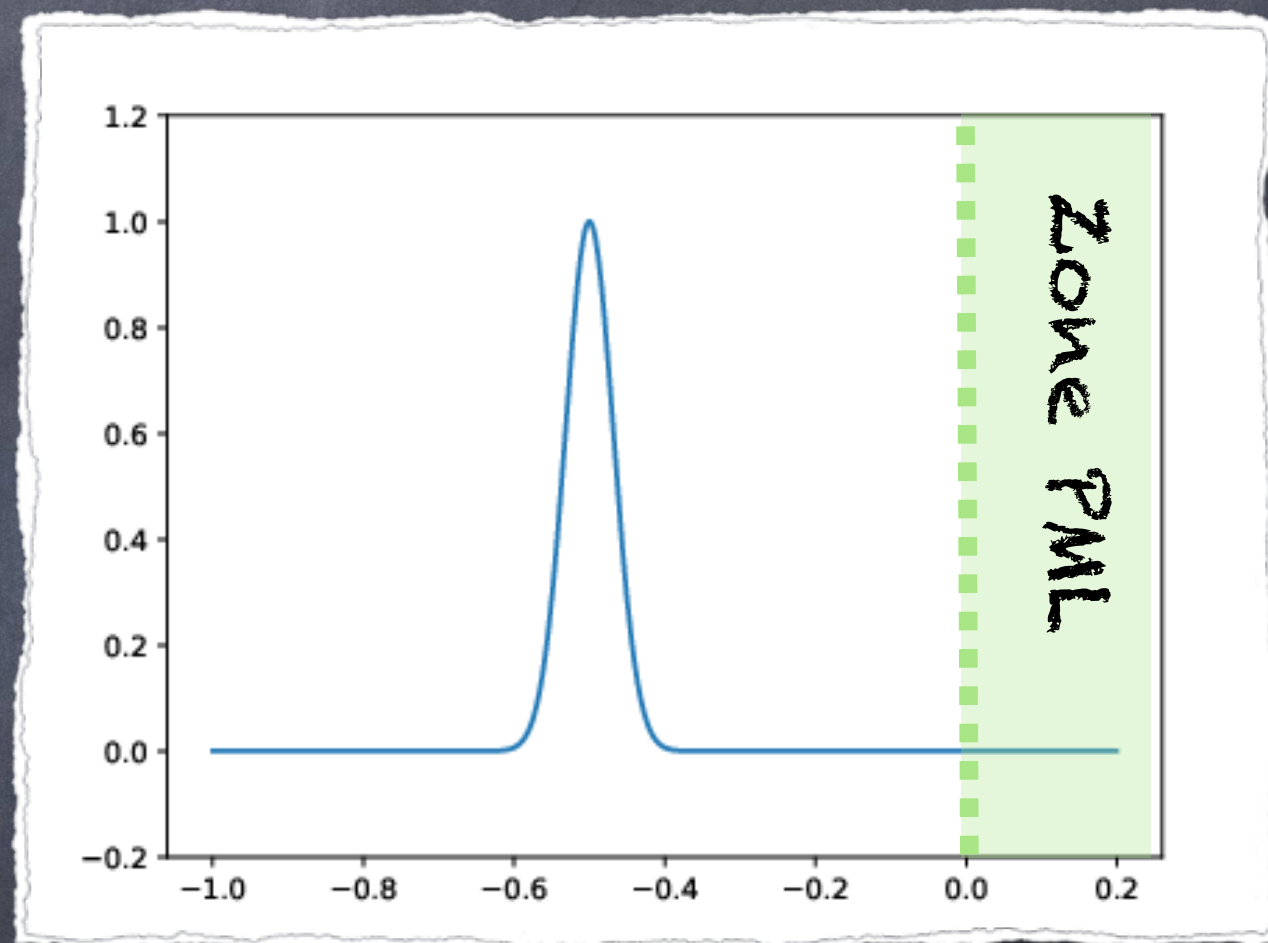
Remarque : La discrétisation rend la PML non parfaitement adaptée. Mais la réflexion est très petite.

II. a) Les PML en 1D

Illustration des PML :



$$L = 1 - 10i$$



$$L = 3 - 20i$$

Remarque 2 : Prendre des paramètres plus fort nécessite de discrétiser plus finement.

II. b) PML cartésienne en 2D

Considérons le problème posé cette fois dans \mathbb{R}^2 :

$$\rho \partial_{tt}^2 \underline{u} - \operatorname{div} (A \underline{\nabla} \underline{u}) = 0 \quad \text{où } A = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} \text{ est une matrice s.d.p.}$$

II. b) PML cartésienne en 2D

Considérons le problème posé cette fois dans \mathbb{R}^2 :

$$\rho \partial_{tt}^2 \underline{u} - \operatorname{div} (A \underline{\nabla} \underline{u}) = 0 \quad \text{où } A = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} \text{ est une matrice s.d.p.}$$

Comme précédemment, on applique une TF (en temps) :

$$-\rho \omega^2 \hat{u} - \partial_x (a_1 \partial_x \hat{u}) - \partial_x (a_3 \partial_y \hat{u}) - \partial_y (a_3 \partial_x \hat{u}) - \partial_y (a_2 \partial_y \hat{u}) = 0$$

II. b) PML cartésienne en 2D

Considérons le problème posé cette fois dans \mathbb{R}^2 :

$$\rho \partial_{tt}^2 \underline{u} - \operatorname{div} (A \underline{\nabla} \underline{u}) = 0 \quad \text{où } A = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} \text{ est une matrice s.d.p.}$$

Comme précédemment, on applique une TF (en temps) :

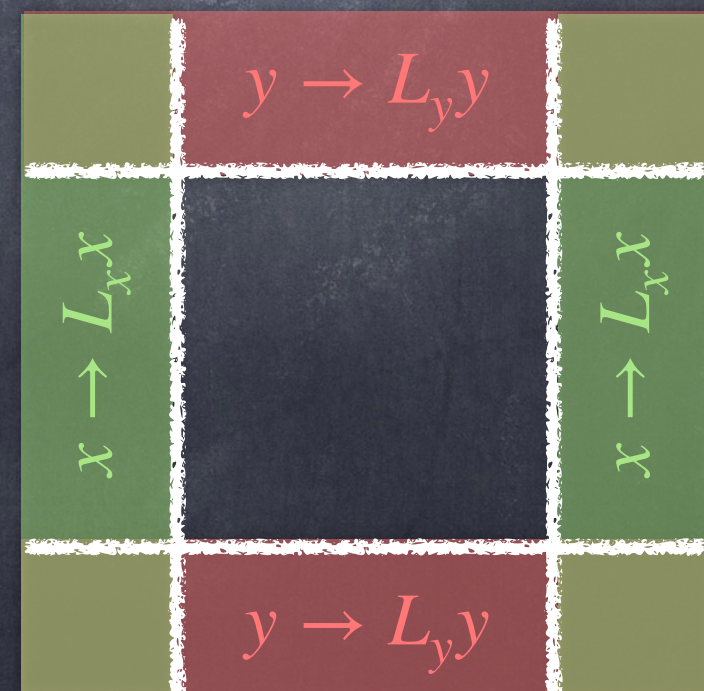
$$-\rho \omega^2 \hat{u} - \partial_x (a_1 \partial_x \hat{u}) - \partial_x (a_3 \partial_y \hat{u}) - \partial_y (a_3 \partial_x \hat{u}) - \partial_y (a_2 \partial_y \hat{u}) = 0$$

L'idée est alors d'appliquer un changement de variable dans les deux directions x et y :

$$-\rho \hat{L}_x \hat{L}_y \omega^2 \hat{u} - \operatorname{div} (\hat{B} \underline{\nabla} \hat{u}) = 0$$

$$\text{où } \hat{B} = \begin{bmatrix} a_1 L_y / L_x & a_3 \\ a_3 & a_2 L_x / L_y \end{bmatrix}$$

(détails au (vrai) tableau)



II. b) PML cartésienne en 2D

En appliquant la TF inverse, on obtient ainsi :

$$\rho \partial_{tt}^2 \mathcal{F}^{-1}(\hat{L}_x \hat{L}_y \hat{\underline{u}}) - \text{div} \left(\mathcal{F}^{-1}(\hat{B} \underline{\nabla} \hat{\underline{u}}) \right) = 0$$

En choisissant comme précédemment : $\hat{L}_i = \mu_i - i\varepsilon_i/\omega$, $i \in \{x, y\}$

on devra introduire des **variables auxiliaires** pour éliminer les convolutions en temps.

II. b) PML cartésienne en 2D

En appliquant la TF inverse, on obtient ainsi :

$$\rho \partial_{tt}^2 \mathcal{F}^{-1}(\hat{L}_x \hat{L}_y \hat{\mathbf{u}}) - \text{div} \left(\mathcal{F}^{-1}(\hat{B} \underline{\nabla} \hat{\mathbf{u}}) \right) = 0$$

En choisissant comme précédemment : $\hat{L}_i = \mu_i - i\varepsilon_i/\omega$, $i \in \{x, y\}$

on devra introduire des **variables auxiliaires** pour éliminer les convolutions en temps.

Pour le **premier terme**, on aura :

$$-\omega^2 \left(\mu_x - i \frac{\varepsilon_x}{\omega} \right) \left(\mu_y - i \frac{\varepsilon_y}{\omega} \right) \hat{\mathbf{u}} = -\omega^2 \mu_x \mu_y \hat{\mathbf{u}} + i\omega(\varepsilon_x \mu_y + \varepsilon_y \mu_x) \hat{\mathbf{u}} + \varepsilon_x \varepsilon_y \hat{\mathbf{u}}$$

$$\text{d'où : } \partial_{tt}^2 \mathcal{F}^{-1}(\hat{L}_x \hat{L}_y \hat{\mathbf{u}}) = \mu_x \mu_y \partial_{tt}^2 \mathbf{u} + (\varepsilon_x \mu_y + \varepsilon_y \mu_x) \partial_t \mathbf{u} + (\varepsilon_x \varepsilon_y) \mathbf{u}$$

II. b) PML cartésienne en 2D

En appliquant la TF inverse, on obtient ainsi :

$$\rho \partial_{tt}^2 \mathcal{F}^{-1}(\hat{L}_x \hat{L}_y \hat{u}) - \text{div} \left(\mathcal{F}^{-1}(\hat{B} \nabla \hat{u}) \right) = 0$$

Pour le deuxième terme, on aura :

$$\hat{B} \nabla \hat{u} = \begin{bmatrix} a_1 L_y / L_x \partial_x & a_3 \partial_y \\ a_3 \partial_x & a_2 L_x / L_y \partial_y \end{bmatrix} \hat{u}$$

D'une part, on pose :

$$\begin{aligned} \frac{\omega \mu_y - i \varepsilon_y}{\omega \mu_x - i \varepsilon_x} \partial_x \hat{u} &= \hat{\omega}_1 \Leftrightarrow i\omega(\mu_y \partial_x \hat{u} - \mu_x \hat{\omega}_1) + \varepsilon_y \partial_x \hat{u} - \hat{\omega}_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \partial_t(\mu_y \partial_x u - \mu_x \omega_1) + \varepsilon_y \partial_x u - \varepsilon_x \omega_1 = 0 \end{aligned}$$

II. b) PML cartésienne en 2D

En appliquant la TF inverse, on obtient ainsi :

$$\rho \partial_{tt}^2 \mathcal{F}^{-1}(\hat{L}_x \hat{L}_y \hat{u}) - \text{div} \left(\mathcal{F}^{-1}(\hat{B} \nabla \hat{u}) \right) = 0$$

Pour le deuxième terme, on aura :

$$\hat{B} \nabla \hat{u} = \begin{bmatrix} a_1 L_y / L_x \partial_x & a_3 \partial_y \\ a_3 \partial_x & a_2 L_x / L_y \partial_y \end{bmatrix} \hat{u}$$

D'une part, on pose :

$$\begin{aligned} \frac{\omega \mu_y - i \varepsilon_y}{\omega \mu_x - i \varepsilon_x} \partial_x \hat{u} &= \hat{\omega}_1 \Leftrightarrow i\omega(\mu_y \partial_x \hat{u} - \mu_x \hat{\omega}_1) + \varepsilon_y \partial_x \hat{u} - \hat{\omega}_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \partial_t(\mu_y \partial_x u - \mu_x \omega_1) + \varepsilon_y \partial_x u - \varepsilon_x \omega_1 = 0 \end{aligned}$$

Remarque : Ici, on ne peut plus éviter la dérivée ∂_x car L_x et L_y varient (au coins).

II. b) PML cartésienne en 2D

En appliquant la TF inverse, on obtient ainsi :

$$\rho \partial_{tt}^2 \mathcal{F}^{-1}(\hat{L}_x \hat{L}_y \hat{u}) - \operatorname{div} \left(\mathcal{F}^{-1}(\hat{B} \nabla \hat{u}) \right) = 0$$

Pour le deuxième terme, on aura :

$$\hat{B} \nabla \hat{u} = \begin{bmatrix} a_1 L_y / L_x \partial_x & a_3 \partial_y \\ a_3 \partial_x & a_2 L_x / L_y \partial_y \end{bmatrix} \hat{u}$$

D'une part, on pose : $\partial_t(\mu_y \partial_x u - \mu_x \omega_1) + \varepsilon_y \partial_x u - \varepsilon_x \omega_1 = 0$

De même, on aura : $\partial_t(\mu_x \partial_y u - \mu_y \omega_2) + \varepsilon_x \partial_y u - \varepsilon_y \omega_2 = 0$

d'où on déduit :

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{B} \nabla \hat{u}) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_3 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{bmatrix}$$

II. b) PML cartésienne en 2D

En appliquant la TF inverse, on obtient ainsi :

$$\rho \partial_{tt}^2 \mathcal{F}^{-1}(\hat{L}_x \hat{L}_y \hat{u}) - \text{div} \left(\mathcal{F}^{-1}(\hat{B} \nabla \hat{u}) \right) = 0$$

Pour le deuxième terme, on aura :

$$\hat{B} \nabla \hat{u} = \begin{bmatrix} a_1 L_y / L_x \partial_x & a_3 \partial_y \\ a_3 \partial_x & a_2 L_x / L_y \partial_y \end{bmatrix} \hat{u}$$

D'une part, on pose : $\partial_t p_1 + \varepsilon_y \partial_x u - \frac{\varepsilon_x}{\mu_x} (\mu_y \partial_x u - p_1) = 0$

De même, on aura : $\partial_t p_2 + \varepsilon_x \partial_y u - \frac{\varepsilon_y}{\mu_y} (\mu_x \partial_y u - p_2) = 0$

d'où on déduit :

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{B} \nabla \hat{u}) = \begin{bmatrix} a_1 \mu_y / \mu_x & a_3 \\ a_3 & a_2 \mu_x / \mu_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 / \mu_x & 0 \\ 0 & a_2 / \mu_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

II. b) PML cartésienne en 2D

Enfin, le système à résoudre est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\mu_x \mu_y \partial_{tt}^2 \mathbf{u} + (\varepsilon_x \mu_y + \varepsilon_y \mu_x) \partial_t \mathbf{u} + (\varepsilon_x \varepsilon_y) \mathbf{u}) - \operatorname{div}(\tilde{A} \nabla \mathbf{u}) + \operatorname{div} \begin{bmatrix} a_1 / \mu_x \mathbf{p}_1 \\ a_2 / \mu_y \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = 0 \\ \partial_t \mathbf{p}_1 + \varepsilon_y \partial_x \mathbf{u} - \frac{\varepsilon_x}{\mu_x} (\mu_y \partial_x \mathbf{u} - \mathbf{p}_1) = 0 \\ \partial_t \mathbf{p}_2 + \varepsilon_x \partial_y \mathbf{u} - \frac{\varepsilon_y}{\mu_y} (\mu_x \partial_y \mathbf{u} - \mathbf{p}_2) = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{où } \tilde{A} = \begin{bmatrix} a_1 \mu_y / \mu_x & a_3 \\ a_3 & a_2 \mu_x / \mu_y \end{bmatrix}.$$

II. b) PML cartésienne en 2D

Finalement, le système à résoudre est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\mu_x \mu_y \partial_{tt}^2 \mathbf{u} + (\varepsilon_x \mu_y + \varepsilon_y \mu_x) \partial_t \mathbf{u} + (\varepsilon_x \varepsilon_y) \mathbf{u}) - \operatorname{div}(\tilde{A} \nabla \mathbf{u}) + \operatorname{div} \begin{bmatrix} a_1 / \mu_x \mathbf{p}_1 \\ a_2 / \mu_y \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = 0 \\ \partial_t \mathbf{p}_1 + \varepsilon_y \partial_x \mathbf{u} - \frac{\varepsilon_x}{\mu_x} (\mu_y \partial_x \mathbf{u} - \mathbf{p}_1) = 0 \\ \partial_t \mathbf{p}_2 + \varepsilon_x \partial_y \mathbf{u} - \frac{\varepsilon_y}{\mu_y} (\mu_x \partial_y \mathbf{u} - \mathbf{p}_2) = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{où } \tilde{A} = \begin{bmatrix} a_1 \mu_y / \mu_x & a_3 \\ a_3 & a_2 \mu_x / \mu_y \end{bmatrix}.$$

Remarque : La discrétisation (stable) d'un tel système n'est pas évidente, cf [article](#).

II. b) PML cartésienne en 2D

Enfin, le système à résoudre est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\mu_x \mu_y \partial_{tt} \mathbf{u} + (\varepsilon_x \mu_y + \varepsilon_y \mu_x) \partial_t \mathbf{u} + (\varepsilon_x \varepsilon_y) \mathbf{u}) - \operatorname{div}(\tilde{A} \nabla \mathbf{u}) + \operatorname{div} \begin{bmatrix} a_1 / \mu_x \mathbf{p}_1 \\ a_2 / \mu_y \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = 0 \\ \partial_t \mathbf{p}_1 + \varepsilon_y \partial_x \mathbf{u} - \frac{\varepsilon_x}{\mu_x} (\mu_y \partial_x \mathbf{u} - \mathbf{p}_1) = 0 \\ \partial_t \mathbf{p}_2 + \varepsilon_x \partial_y \mathbf{u} - \frac{\varepsilon_y}{\mu_y} (\mu_x \partial_y \mathbf{u} - \mathbf{p}_2) = 0 \end{array} \right.$$

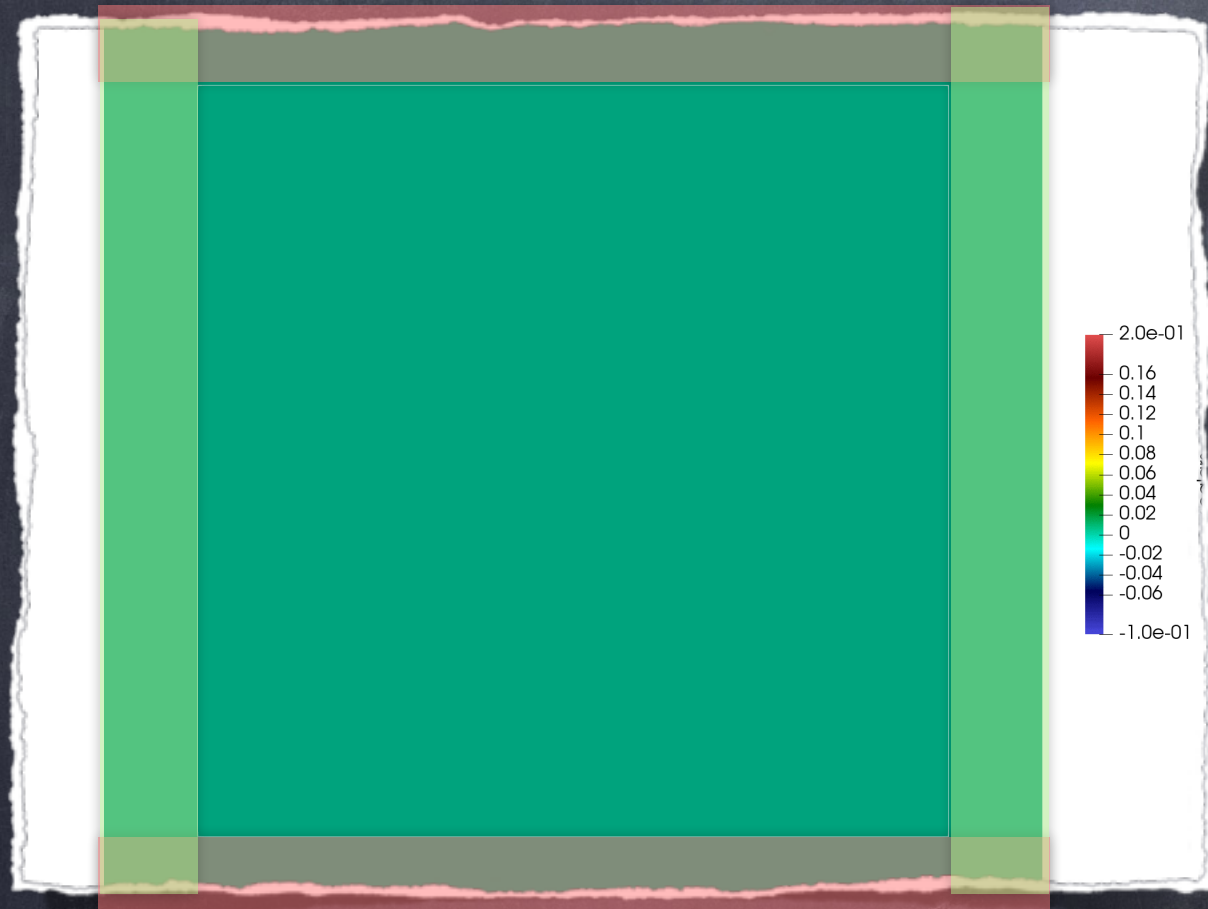
$$\text{où } \tilde{A} = \begin{bmatrix} a_1 \mu_y / \mu_x & a_3 \\ a_3 & a_2 \mu_x / \mu_y \end{bmatrix}.$$

Remarque : La discrétisation (stable) d'un tel système n'est pas évidente, cf [article](#).

Remarque 2 : Par ailleurs, en 3D, il est nécessaire d'introduire 4 variables auxiliaires, et non 3.

II. b) PML cartésienne en 2D

Illustration des PML 2D :

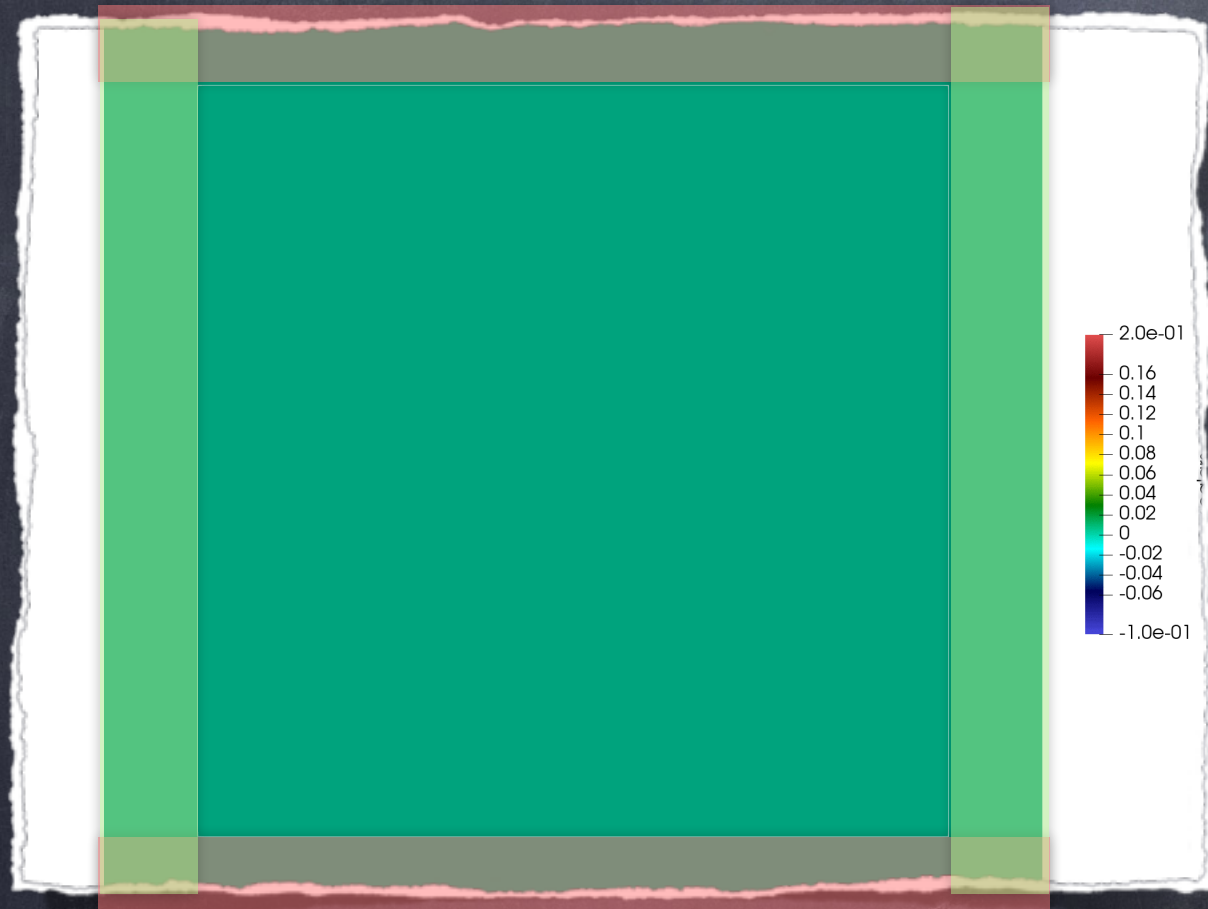


$$L_x = L_y = 1 - 20i$$

$$a_1 = a_2 = 1.0, \quad a_3 = 0$$

II. b) PML cartésienne en 2D

Illustration des PML 2D :

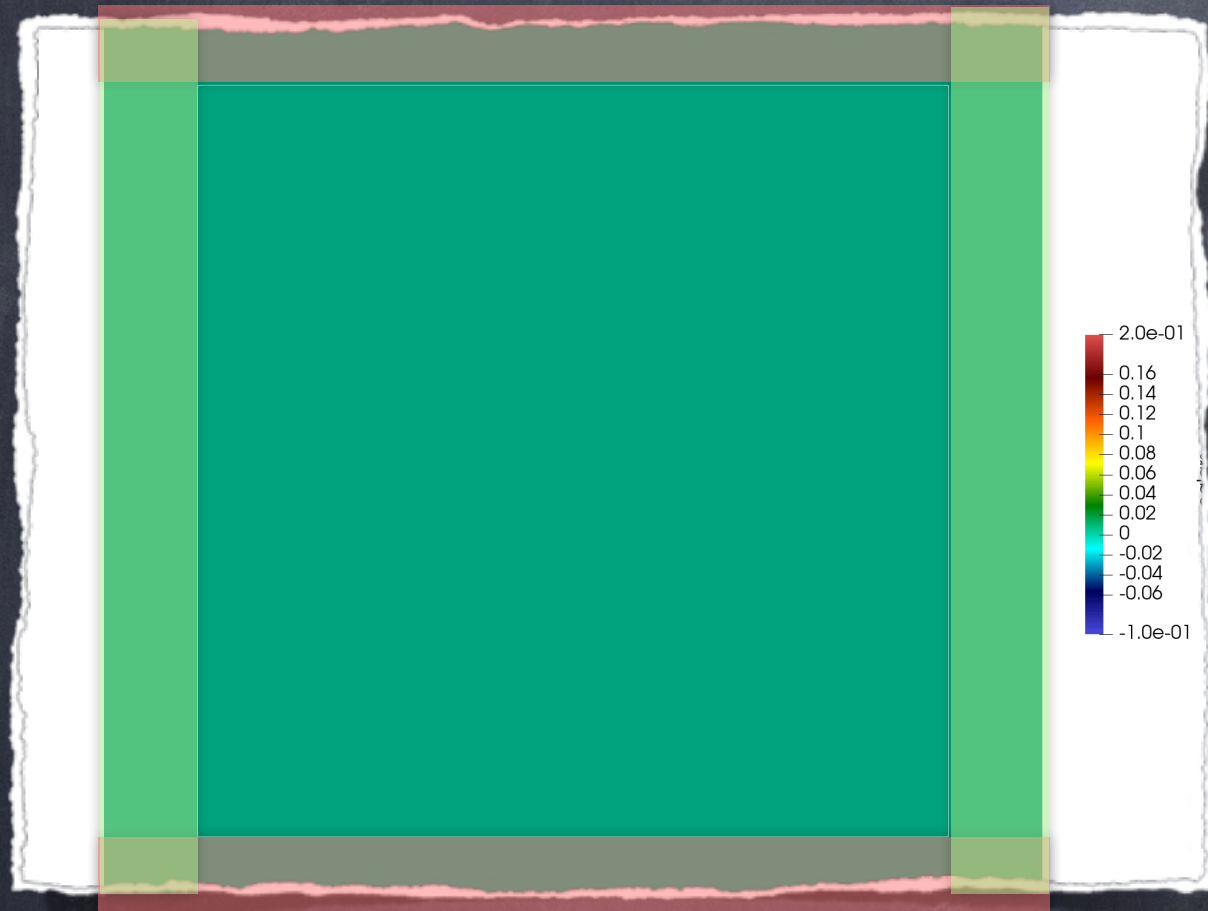


$$L_x = L_y = 1 - 20i$$

$$a_1 = a_2 = 1.0, \quad a_3 = 0$$

II. b) PML cartésienne en 2D

Illustration des PML 2D :



$$L_x = L_y = 1 - 20i$$
$$a_1 = a_2 = 1.0, a_3 = 0$$



$$L_x = L_y = 1 - 20i$$
$$a_1 = a_2 = 1.0, a_3 = 0$$

Remarque : Il est facile de généraliser la méthode pour résoudre des problèmes dans un demi-espace.

II. b) PML cartésienne en 2D

Illustration des PML 2D :



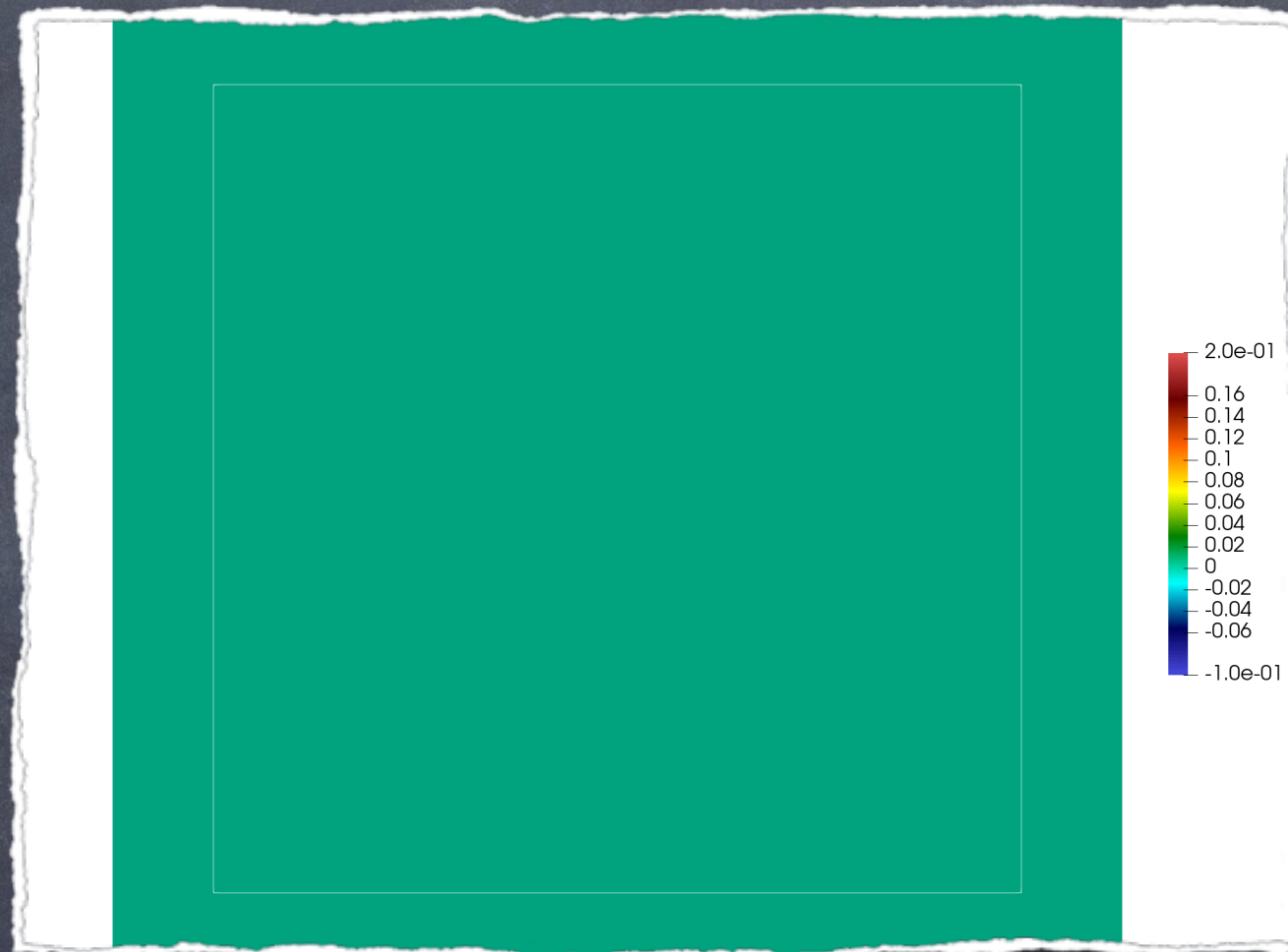
$$L_x = L_y = 1 - 20i$$

$$a_1 = a_2 = 1.0, a_3 = 0.8$$

Remarque 2 : Dans le cas de milieu anisotrope, les PML ne fonctionnent plus !

II. b) PML cartésienne en 2D

Illustration des PML 2D :



$$L_x = L_y = 1 - 20i$$

$$a_1 = a_2 = 1.0, a_3 = 0.8$$

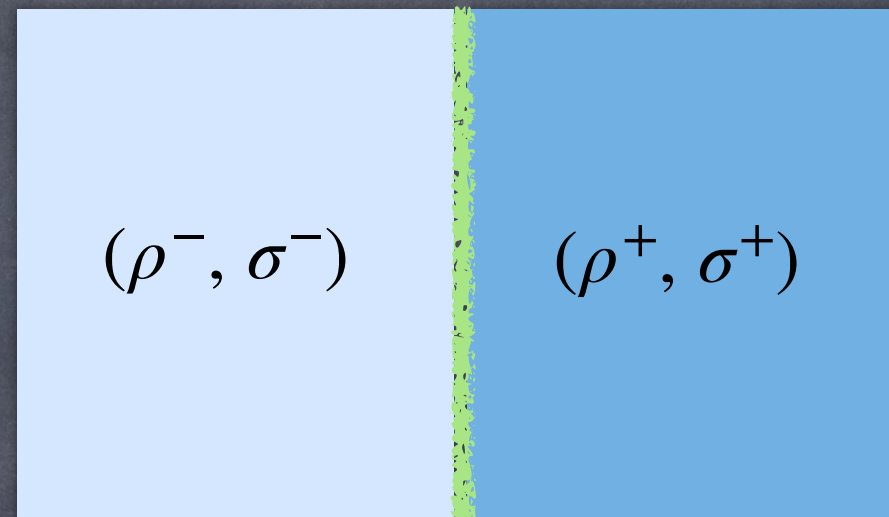
Remarque 2 : Dans le cas de milieu anisotrope, les PML ne fonctionnent plus !

II. b) PML cartésienne en 2D

A partir sur la Loi de Snell-Descartes :

Considérons le problème de transmission suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \rho^{\pm} \partial_{tt}^2 \underline{u}^{\pm} - \operatorname{div} (\sigma^{\pm} \underline{\nabla} \underline{u}^{\pm}) = 0, \quad \pm x > 0 \\ \underline{u}^{-} = \underline{u}^{+} \quad x = 0 \\ \sigma^{-} \partial_x \underline{u}^{-} = \sigma^{+} \partial_x \underline{u}^{+} \quad x = 0 \end{array} \right.$$



où $\underline{u}^{-} = \underline{u}^{inc} + \underline{u}^{ref}$ avec :

$$\underline{u}^{inc} = e^{i\omega t - i\bar{k}^{-} \cdot \underline{x}}, \quad \underline{u}^{ref} = \operatorname{Re} e^{i\omega t + i\tilde{\bar{k}}^{-} \cdot \underline{x}} \quad \text{et} \quad \underline{u}^{+} = T e^{i\omega t - i\bar{k}^{+} \cdot \underline{x}}$$

II. b) PML cartésienne en 2D

A partir sur la Loi de Snell-Descartes :

Considérons le problème de transmission suivant :

$$\rho^{\pm} \partial_{tt}^2 \mathbf{u}^{\pm} - \operatorname{div}(\sigma^{\pm} \underline{\nabla} \mathbf{u}^{\pm}) = 0, \quad \pm x > 0$$

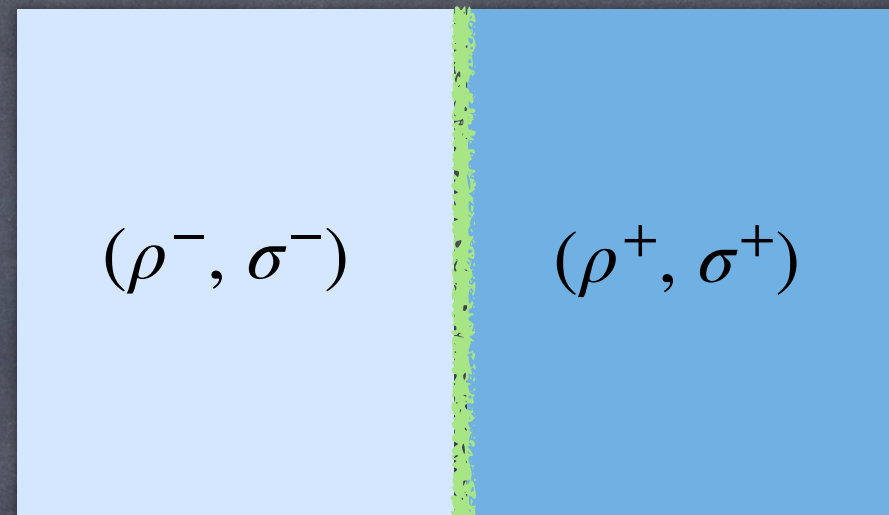
$$\mathbf{u}^{-} = \mathbf{u}^{+}$$

$$x = 0$$

$$\sigma^{-} \partial_x \mathbf{u}^{-} = \sigma^{+} \partial_x \mathbf{u}^{+}$$

$$x = 0$$

CT



où $\mathbf{u}^{-} = \mathbf{u}^{inc} + \mathbf{u}^{ref}$ avec :

$$\mathbf{u}^{inc} = e^{i\omega t - i\mathbf{k}^{-} \cdot \underline{x}}, \quad \mathbf{u}^{ref} = \operatorname{Re} e^{i\omega t + i\tilde{\mathbf{k}}^{-} \cdot \underline{x}} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^{+} = T e^{i\omega t - i\mathbf{k}^{+} \cdot \underline{x}}$$

Les conditions de transmission impose une relation entre les vecteurs d'ondes qui correspond à la loi de S.D. !

(Exercice pour vous !)

II. b) PML cartésienne en 2D

A parte sur la Loi de Snell-Descartes :

Considérons le **problème de transmission** suivant :

$$\rho^{\pm} \partial_{tt}^2 \mathbf{u}^{\pm} - \operatorname{div}(\sigma^{\pm} \underline{\nabla} \mathbf{u}^{\pm}) = 0, \quad \pm x > 0$$

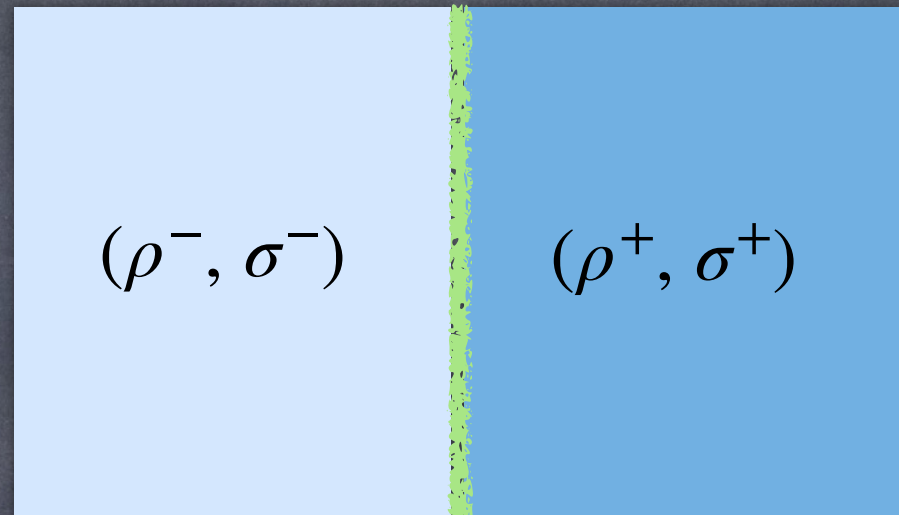
$$\mathbf{u}^{-} = \mathbf{u}^{+}$$

$$x = 0$$

$$\sigma^{-} \partial_x \mathbf{u}^{-} = \sigma^{+} \partial_x \mathbf{u}^{+}$$

$$x = 0$$

CT



où $\mathbf{u}^{-} = \mathbf{u}^{inc} + \mathbf{u}^{ref}$ avec :

$$\mathbf{u}^{inc} = e^{i\omega t - i\mathbf{k}^{-} \cdot \underline{x}}, \quad \mathbf{u}^{ref} = \operatorname{Re} e^{i\omega t + i\tilde{\mathbf{k}}^{-} \cdot \underline{x}} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^{+} = T e^{i\omega t - i\mathbf{k}^{+} \cdot \underline{x}}$$

Les **conditions de transmission** impose une relation entre les vecteurs d'ondes qui correspond à la **loi de S.D.** !

Remarque : Si le milieu de droite est un milieu PML, alors quelque soit l'onde incidente, le coefficient de réflexion R sera nul ! (Exercice)

Au programme...

Plan :

I. Introduction

II. Les PML (Perfectly Matched Layers)

a) Construction en 1D

b) PML cartésiennes en 2D

III. Les CLA (Conditions aux limites Absorbantes)

III. Les CLA

Considérons le problème de demi-espace suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \rho \partial_{tt}^2 \mathbf{u} - \operatorname{div}(\sigma \underline{\nabla} \mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{x} > 0, \quad y \in \mathbb{R} \\ \mathbf{u} = \varphi, \quad \mathbf{x} = 0 \end{array} \right.$$

où (ρ, σ) sont supposés constants.

(ρ, σ)

3.1 Proposition (admis)

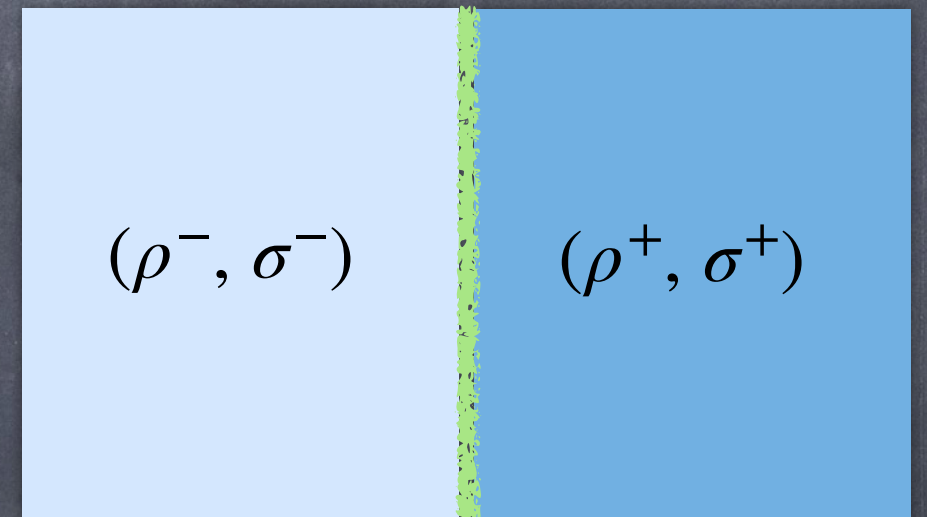
La solution de ce problème est donnée par :

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_t(\mathcal{F}_y(\varphi)) e^{-i \frac{\sqrt{\rho\omega^2 - \sigma\xi^2}}{\sigma^+} x} e^{i\xi y} d\xi e^{i\omega t} d\omega$$

III. Les CLA

Revenons au **problème de transmission** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^\pm \partial_{tt}^2 \mathbf{u}^\pm - \operatorname{div} (\sigma^\pm \underline{\nabla} \mathbf{u}^\pm) = 0, \quad \pm x > 0 \\ \mathbf{u}^- = \mathbf{u}^+ \quad \quad \quad x = 0 \\ \sigma^- \partial_x \mathbf{u}^- = \sigma^+ \partial_x \mathbf{u}^+ \quad \quad x = 0 \end{array} \right.$$



où (ρ^+, σ^+) sont supposés constants.

On peut reformuler ce problème uniquement dans le demi-espace gauche en utilisant la solution sur $x > 0$:

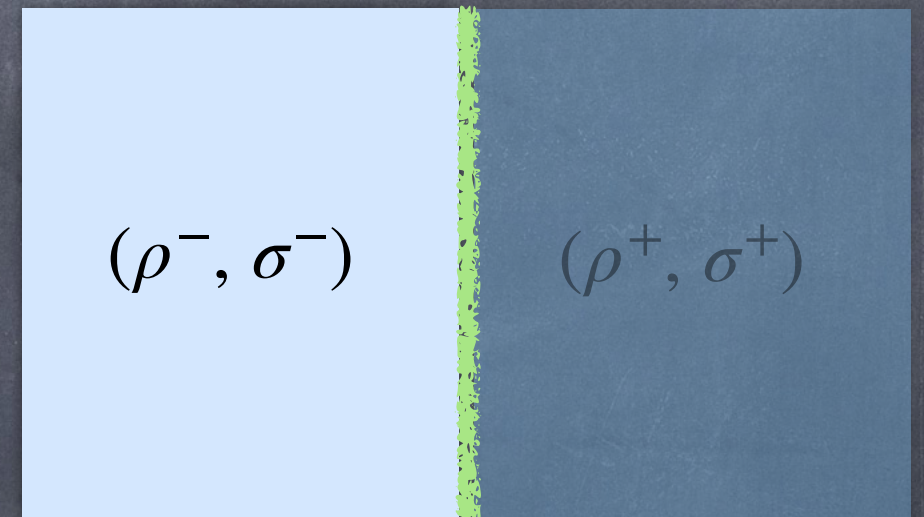
$$\mathbf{u}^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_t(\mathcal{F}_y(\mathbf{u}^-|_{x=0})) e^{-i \frac{\sqrt{\rho\omega^2 - \sigma\xi^2}}{\sigma^+} x} e^{i\xi y} d\xi e^{i\omega t} d\omega$$

$$\rightarrow \sigma^+ \partial_x \mathbf{u}^+ = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_t(\mathcal{F}_y(\mathbf{u}^-|_{x=0})) i \sqrt{\rho^+ \omega^2 - \sigma^+ \xi^2} e^{i\xi y} d\xi e^{i\omega t} d\omega$$

III. Les CLA

Revenons au problème de transmission :

$$\left| \begin{array}{l} \rho^\pm \partial_{tt}^2 \mathbf{u}^\pm - \operatorname{div} (\sigma^\pm \underline{\nabla} \mathbf{u}^\pm) = 0, \quad \pm x > 0 \\ \mathbf{u}^- = \mathbf{u}^+ \quad \quad \quad x = 0 \\ \sigma^- \partial_x \mathbf{u}^- = \sigma^+ \partial_x \mathbf{u}^+ \quad \quad x = 0 \end{array} \right.$$



où (ρ^+, σ^+) sont supposés constants.

Reformulation :

$$\left| \begin{array}{l} \rho^- \partial_{tt}^2 \mathbf{u}^- - \operatorname{div} (\sigma^- \underline{\nabla} \mathbf{u}^-) = 0, \quad x < 0 \\ \sigma^- \partial_x \mathbf{u}^- + \mathcal{T}(\mathbf{u}^-|_{x=0}) = 0 \quad \quad x = 0 \end{array} \right.$$

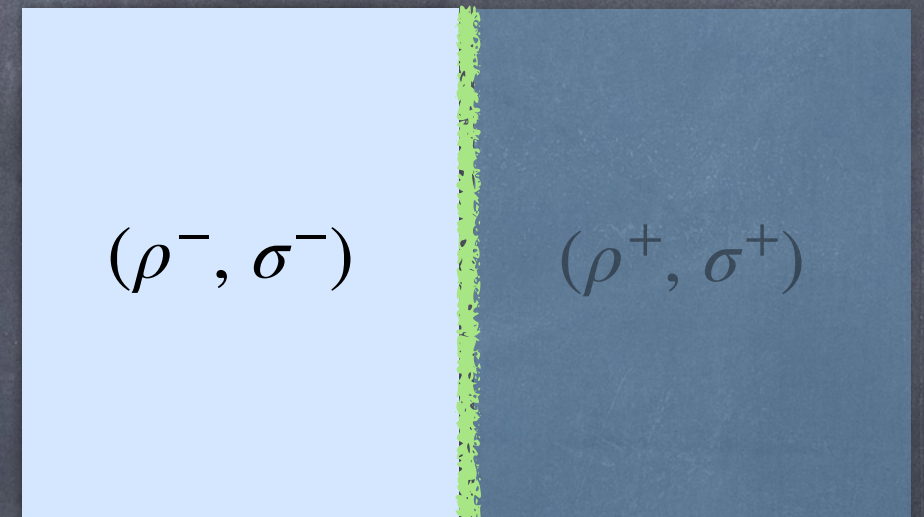
où l'opérateur \mathcal{T} est définie par :

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_t(\mathcal{F}_y(\boldsymbol{\varphi}|_{x=0})) i \sqrt{\rho^+ \omega^2 - \sigma^+ \xi^2} e^{i\xi y} d\xi e^{i\omega t} d\omega$$

III. Les CLA

Revenons au problème de transmission :

$$\left| \begin{array}{l} \rho^\pm \partial_{tt}^2 \mathbf{u}^\pm - \operatorname{div} (\sigma^\pm \underline{\nabla} \mathbf{u}^\pm) = 0, \quad \pm x > 0 \\ \mathbf{u}^- = \mathbf{u}^+ \quad x = 0 \\ \sigma^- \partial_x \mathbf{u}^- = \sigma^+ \partial_x \mathbf{u}^+ \quad x = 0 \end{array} \right.$$



où (ρ^+, σ^+) sont supposés constants.

Reformulation :

$$\left| \begin{array}{l} \rho^- \partial_{tt}^2 \mathbf{u}^- - \operatorname{div} (\sigma^- \underline{\nabla} \mathbf{u}^-) = 0, \quad x < 0 \\ \sigma^- \partial_x \mathbf{u}^- + \mathcal{T}(\mathbf{u}^- |_{x=0}) = 0 \quad x = 0 \end{array} \right.$$

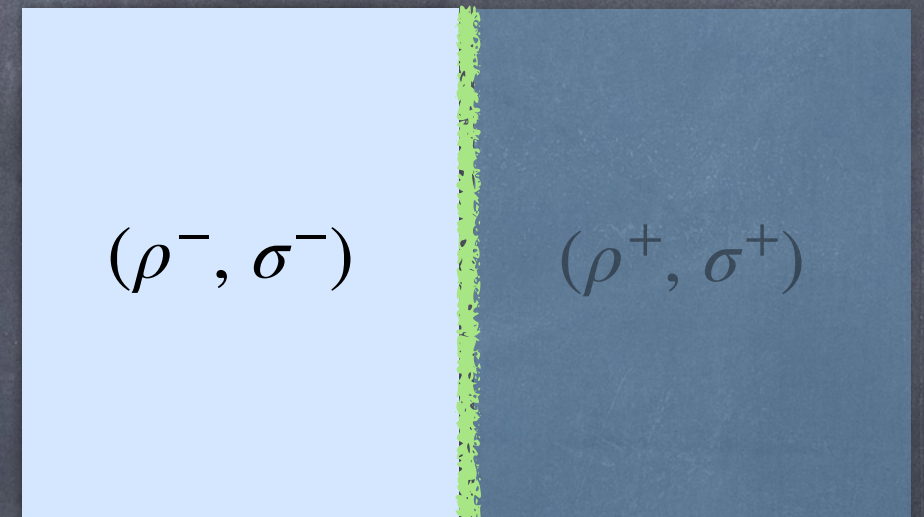
où l'opérateur \mathcal{T} est définie par :

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_t(\mathcal{F}_y(\boldsymbol{\varphi} |_{x=0})) i \sqrt{\rho^+ \omega^2 - \sigma^+ \xi^2} e^{i\xi y} d\xi e^{i\omega t} d\omega$$

III. Les CLA

Revenons au problème de transmission :

$$\left| \begin{array}{l} \rho^\pm \partial_{tt}^2 \mathbf{u}^\pm - \operatorname{div} (\sigma^\pm \underline{\nabla} \mathbf{u}^\pm) = 0, \quad \pm x > 0 \\ \mathbf{u}^- = \mathbf{u}^+ \quad x = 0 \\ \sigma^- \partial_x \mathbf{u}^- = \sigma^+ \partial_x \mathbf{u}^+ \quad x = 0 \end{array} \right.$$



où (ρ^+, σ^+) sont supposés constants.

Reformulation :

$$\left| \begin{array}{l} \rho^- \partial_{tt}^2 \mathbf{u}^- - \operatorname{div} (\sigma^- \underline{\nabla} \mathbf{u}^-) = 0, \quad x < 0 \\ \sigma^- \partial_x \mathbf{u}^- + \mathcal{T}(\mathbf{u}^-|_{x=0}) = 0 \quad x = 0 \end{array} \right. \quad (\text{Condition transparente})$$

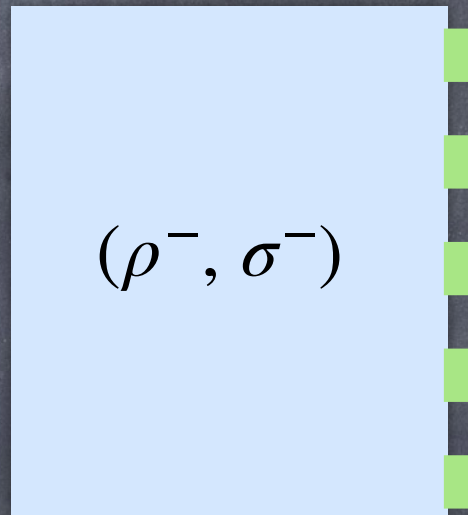
où l'opérateur \mathcal{T} est définie par :

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_t(\mathcal{F}_y(\boldsymbol{\varphi}|_{x=0})) i \sqrt{\rho^+ \omega^2 - \sigma^+ \xi^2} e^{i\xi y} d\xi e^{i\omega t} d\omega$$

III. Les CLA

Nous avons donc le problème dans un demi espace :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^- \partial_{tt}^2 \underline{u}^- - \operatorname{div}(\sigma^- \underline{\nabla} \underline{u}^-) = 0, \quad \mathbf{x} < 0 \\ \sigma^- \partial_x \underline{u}^- = \mathcal{T}(\underline{u}^-|_{x=0}) \quad \mathbf{x} = 0 \end{array} \right.$$



où :

$$\mathcal{T}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_t(\mathcal{F}_y(\varphi|_{x=0})) i \frac{\sqrt{\rho^+ \omega^2 - \sigma^+ \xi^2}}{\sigma^+} e^{i\xi y} d\xi e^{i\omega t} d\omega$$

Idée des CLA : Approcher \mathcal{T} par un opérateur « local »

Pour ω grand, on peut noter que : $\sqrt{\rho^+ \omega^2 - \sigma^+ \xi^2} \simeq \sqrt{\rho^+} \omega$
d'où on déduit l'approximation simple :

$$\mathcal{T}(\varphi) \simeq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_t(\mathcal{F}_y(\varphi|_{x=0})) \sqrt{\rho^+} i \omega e^{i\xi y} d\xi e^{i\omega t} d\omega = \sqrt{\rho^+} \partial_t \varphi|_{x=0}$$

III. Les CLA

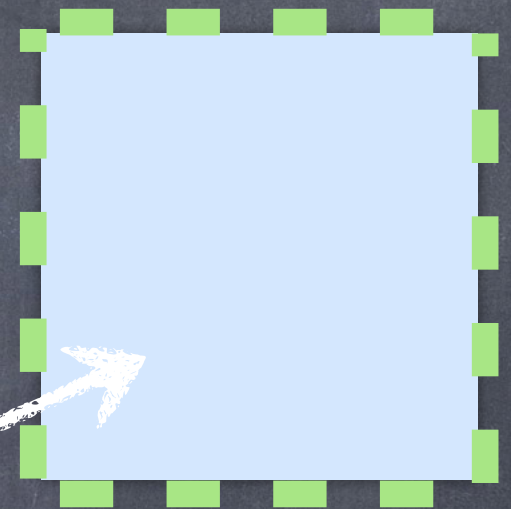
Pour reformuler un problème en domaine ouvert :

$$\rho \partial_{tt}^2 \mathbf{u} - \operatorname{div}(\sigma \underline{\nabla} \mathbf{u}) = 0$$

L'idée est alors d'imposer les CLA sur les bords artificiels.

Problème avec CLA :

$$\begin{cases} \rho \partial_{tt}^2 \mathbf{u} - \operatorname{div}(\sigma \underline{\nabla} \mathbf{u}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma \partial_\nu \mathbf{u} + \partial_t \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$



III. Les CLA

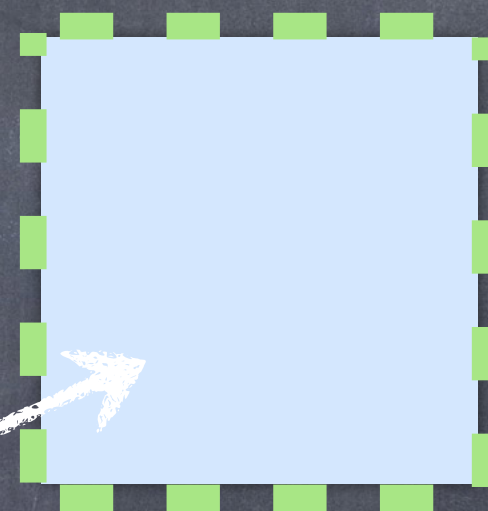
Pour reformuler un problème en domaine ouvert :

$$\rho \partial_{tt}^2 \mathbf{u} - \operatorname{div}(\sigma \underline{\nabla} \mathbf{u}) = 0$$

L'idée est alors d'imposer les CLA sur les bords artificiels.

Problème avec CLA :

$$\begin{cases} \rho \partial_{tt}^2 \mathbf{u} - \operatorname{div}(\sigma \underline{\nabla} \mathbf{u}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma \partial_\nu \mathbf{u} + \partial_t \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$



Remarque : À l'aide du théorème de Hille-Yosida, on peut montrer que le problème avec CLA est bien posé.

III. Les CLA

Illustration des CLA d'ordre 1 :



III. Les CLA

Illustration des CLA d'ordre 1 :



III. Les CLA

Illustration des CLA d'ordre 1 :



Remarque : On peut construire des CLA d'ordre plus élevé à l'aide du meilleure approximation de la racine.

III. Les CLA

Illustration des CLA d'ordre 1 vs PML



Remarque : Généralement, les PML donnent de meilleurs résultats que les CLA. Cependant, les CLA ont l'avantage de se généraliser au cas de milieu anisotrope !

III. Les CLA

Illustration des CLA d'ordre 1 vs PML



Remarque : Généralement, les PML donnent de meilleurs résultats que les CLA. Cependant, les CLA ont l'avantage de se généraliser au cas de milieu anisotrope !

Plan détaillé du cours 3

Plan :

I. Introduction

II. Les PML (Perfectly Matched Layers)

a) Construction en 1D

b) PML cartésiennes en 2D

III. Les CLA (Conditions aux limites Absorbantes)

Pour aller un peu plus loin...

De par leur efficacité, les PML sont devenus une technique standard pour borner le domaine de calculs. Cependant, comme les CLA, cette méthode est limitée à des milieux extérieurs homogènes.

Pour des milieux extérieurs **hétérogènes périodiques**, on peut également construire des méthodes pour borner le domaine de calculs (voir ici ou là).

Enfin, soulignons que les **milieux anisotropes** apparaissent lorsqu'on s'intéresse à la propagation d'ondes dans des matériaux composites (homogénéisés) qu'on retrouve dans de nombreuses applications. Pour ces milieux, il existe des méthodes similaires aux PML comme les couches SMART. Cependant, on perd le côté parfaitement adapté !