

GM 5 :

Méthodes numériques avancées
pour l'équation des ondes

Cours 2 :

Condensation de masse et équation
modifiée.

GM 5 Année 2020 - 2021

Contact : A. Tonnoir

antoine.tonnoir@insa-rouen.fr

I. Introduction

Dans l'épisode précédent, nous avons étudié les θ -schémas pour discretiser l'équation des ondes :

$$M \frac{\underline{u}^{n+1} - 2\underline{u}^n + \underline{u}^{n-1}}{\Delta t^2} + K (\theta \underline{u}^{n+1} + (1 - 2\theta) \underline{u}^n + \theta \underline{u}^{n-1}) = M \underline{f}^n$$

Dans le cas particulier $\theta = 0$, on a alors

$$\underline{u}^{n+1} = 2\underline{u}^n - \underline{u}^{n-1} - \Delta t^2 M^{-1} K \underline{u}^n + \Delta t^2 \underline{f}^n$$

I. Introduction

Dans l'épisode précédent, nous avons étudié les θ -schémas pour discretiser l'équation des ondes :

$$\mathbb{M} \frac{\underline{u}^{n+1} - 2\underline{u}^n + \underline{u}^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbb{K} (\theta \underline{u}^{n+1} + (1 - 2\theta) \underline{u}^n + \theta \underline{u}^{n-1}) = \mathbb{M} \underline{f}^n$$

Dans le cas particulier $\theta = 0$, on a alors

$$\underline{u}^{n+1} = 2\underline{u}^n - \underline{u}^{n-1} - \Delta t^2 \mathbb{M}^{-1} \mathbb{K} \underline{u}^n + \Delta t^2 \underline{f}^n$$

On a donc à chaque itération en temps un système linéaire à résoudre.

Dans le cas d'une discrétisation DF en espace, on a vu que la matrice \mathbb{M} est diagonale, ce qui simplifie nettement la mise en oeuvre.

I. Introduction

Dans l'épisode précédent, nous avons étudié les θ -schémas pour discretiser l'équation des ondes :

$$M \frac{\underline{u}^{n+1} - 2\underline{u}^n + \underline{u}^{n-1}}{\Delta t^2} + K (\theta \underline{u}^{n+1} + (1 - 2\theta) \underline{u}^n + \theta \underline{u}^{n-1}) = M \underline{f}^n$$

Dans le cas particulier $\theta = 0$, on a alors

$$\underline{u}^{n+1} = 2\underline{u}^n - \underline{u}^{n-1} - \Delta t^2 M^{-1} K \underline{u}^n + \Delta t^2 \underline{f}^n$$

On a donc à chaque itération en temps un système linéaire à résoudre.

Objectifs :

- ① Éviter la résolution du système linéaire en rendant la matrice M diagonale (discretisation EF).
- ② Construire des schémas d'ordre élevé en temps.

Au programme...

Plan :

I. Introduction

II. Condensation de masse

a) Le cas 1D et les quadrangles

b) Le cas des maillages triangulaires

III. Schémas d'ordre élevé en temps

a) L'équation modifiée

b) Propriétés des schémas

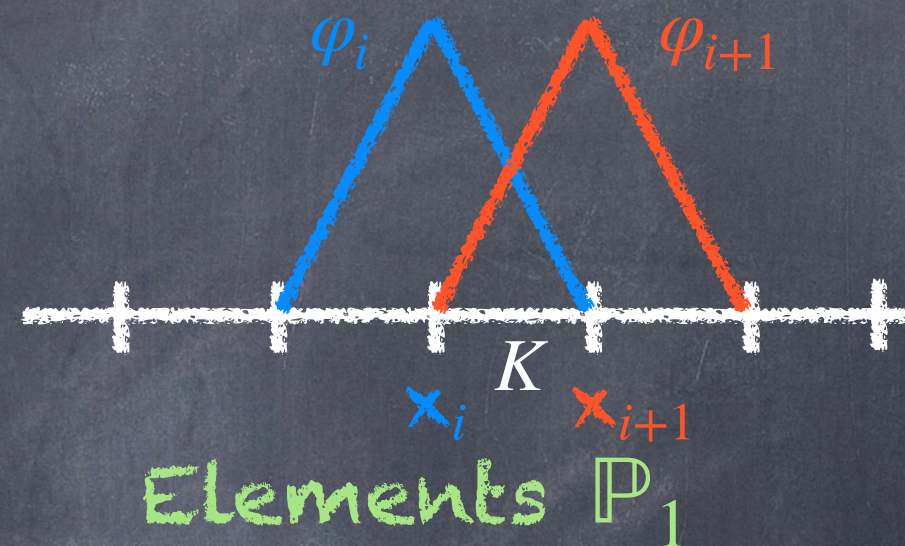
II. a) Le cas 1D et les quadrangles

Rappel (discretisation EF):

Dans le cas 1D, la matrice de masse M est définie ainsi

$$M_{ij} = \left(\varphi_j, \varphi_i \right) = \sum_K \sum_{l=1}^{N_q} \varphi_j(\xi_l^K) \varphi_i(\xi_l^K) \omega_l^K$$

où sur chaque segment K , on utilise une formule de quadrature.



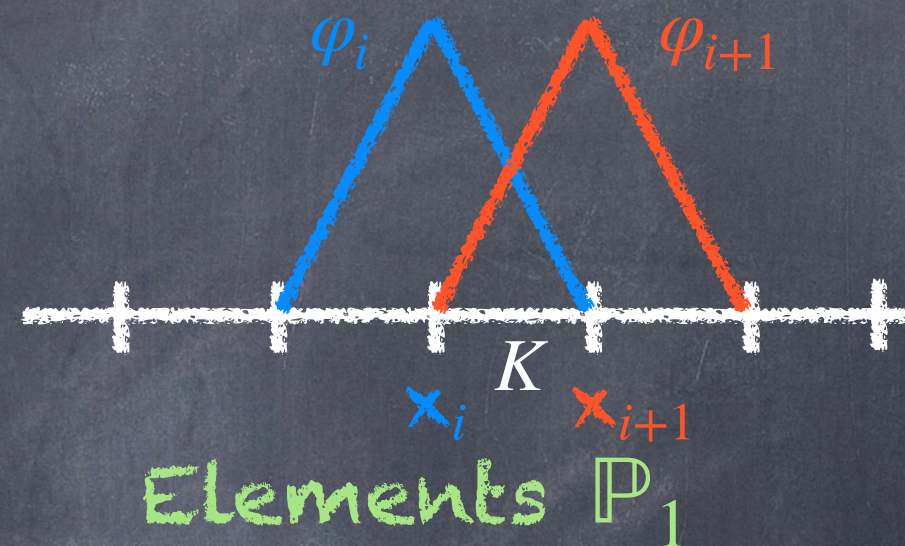
II. a) Le cas 1D et les quadrangles

Rappel (discretisation EF):

Dans le cas 1D, la matrice de masse M est définie ainsi

$$M_{ij} = (\varphi_j, \varphi_i) = \sum_K \sum_{l=1}^{N_q} \varphi_j(\xi_l^K) \varphi_i(\xi_l^K) \omega_l^K$$

où sur chaque segment K , on utilise une formule de quadrature.



Remarque : Pour des éléments de Lagrange \mathbb{P}_1 , on déduit que la matrice est tridiagonale.

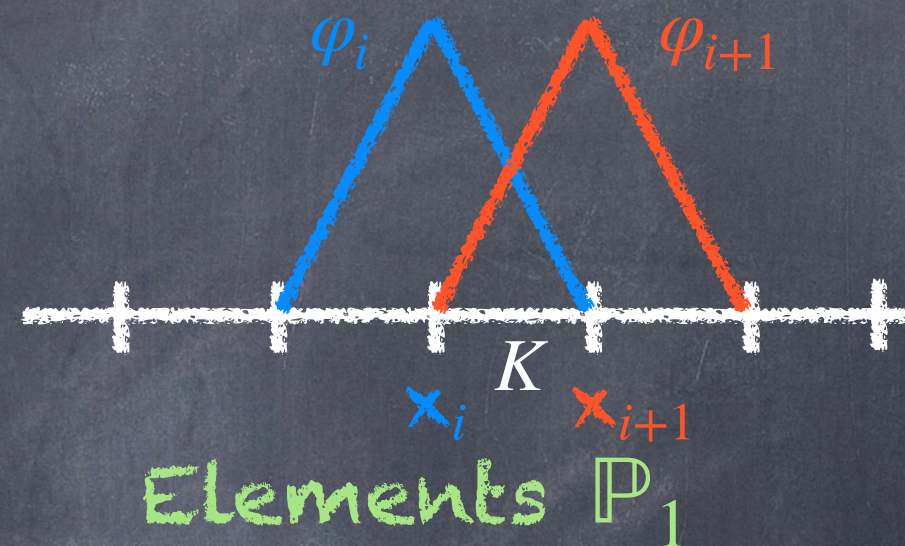
II. a) Le cas 1D et les quadrangles

Rappel (discretisation EF):

Dans le cas 1D, la matrice de masse \mathbb{M} est définie ainsi

$$\mathbb{M}_{ij} = \left(\varphi_j, \varphi_i \right) = \sum_K \sum_{l=1}^{N_q} \varphi_j(\xi_l^K) \varphi_i(\xi_l^K) \omega_l^K$$

où sur chaque segment K , on utilise une formule de quadrature.



2.1 Lemme (admis, preuve directe)

La matrice \mathbb{M} est diagonale si les points de quadrature sont choisis t.q. $\varphi_i(\xi_l^K) = \delta_{i,\tilde{l}}$ où \tilde{l} est l'indice global du noeuds de quadrature ξ_l^K .

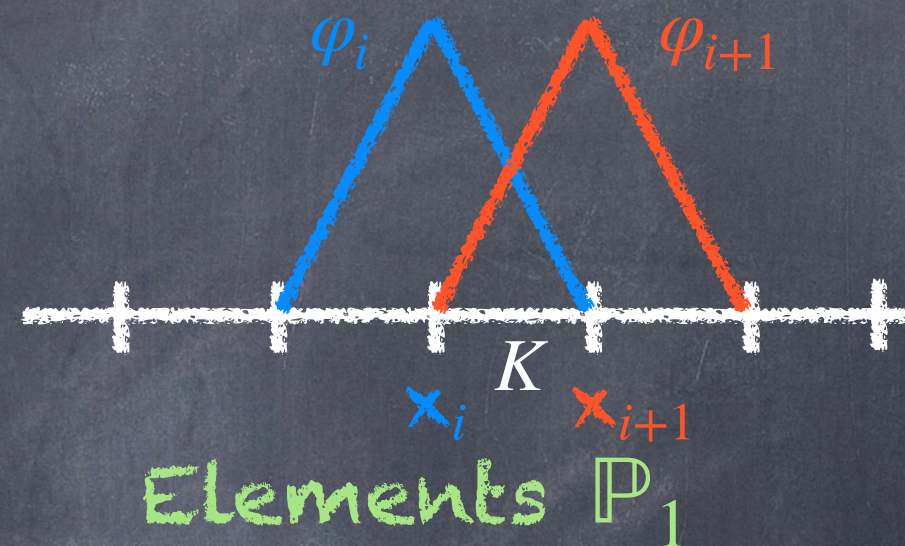
II. a) Le cas 1D et les quadrangles

Rappel (discretisation EF):

Dans le cas 1D, la matrice de masse \mathbb{M} est définie ainsi

$$\mathbb{M}_{ij} = \left(\varphi_j, \varphi_i \right) = \sum_K \sum_{l=1}^{N_q} \varphi_j(\xi_l^K) \varphi_i(\xi_l^K) \omega_l^K$$

où sur chaque segment K , on utilise une formule de quadrature.



2.1 Lemme (admis, preuve directe)

La matrice \mathbb{M} est diagonale si les points de quadrature sont choisis t.q. $\varphi_i(\xi_l^K) = \delta_{i,\tilde{l}}$ où \tilde{l} est l'indice global du noeuds de quadrature ξ_l^K .

Remarque : $\varphi \in \mathbb{P}_k \Rightarrow k+1$ points par éléments.

II. a) Le cas 1D et les quadrangles

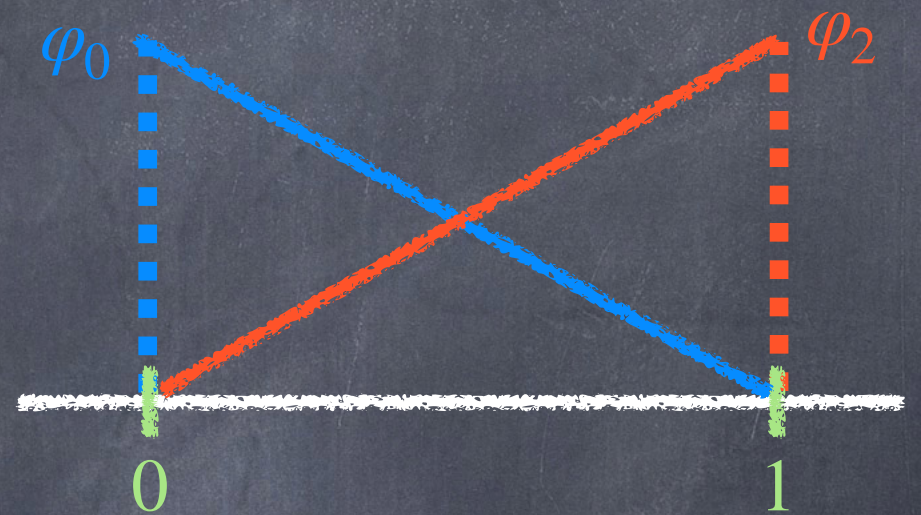
Exemples :

Considérons un élément de référence $\hat{K} = [0,1]$.

$$\hat{M}_{ij} = \left(\varphi_j, \varphi_i \right)_K = \sum_{l=1}^{N_q} \varphi_j(\xi_l) \varphi_i(\xi_l) \omega_l$$

⊙ Pour des éléments \mathbb{P}_1 , les noeuds

de quadrature sont alors : $\xi_0 = 0$ et $\xi_1 = 1$



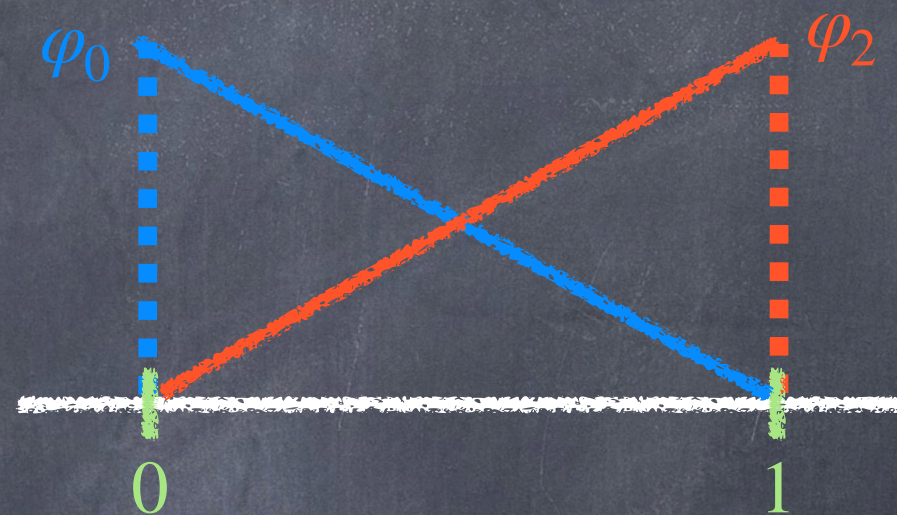
II. a) Le cas 1D et les quadrangles

Exemples :

Considérons un élément de référence $\hat{K} = [0,1]$.

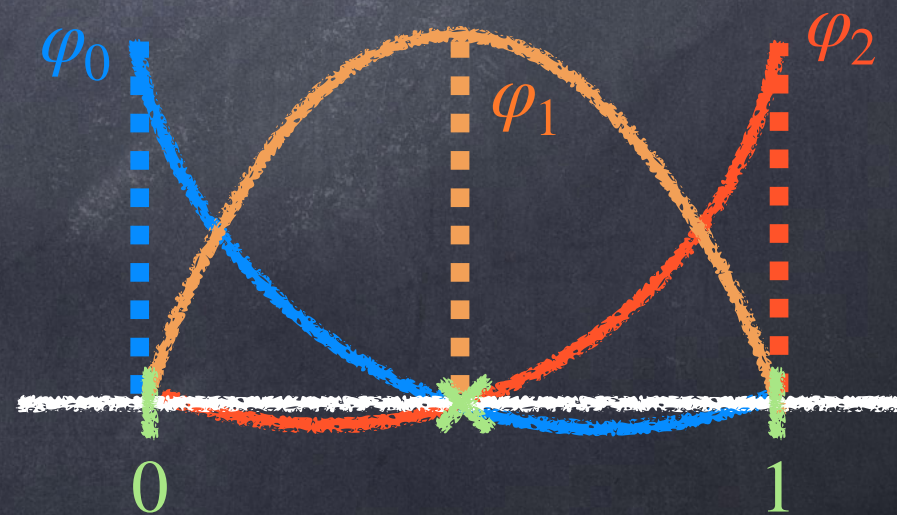
$$\hat{M}_{ij} = \left(\varphi_j, \varphi_i \right)_K = \sum_{l=1}^{N_q} \varphi_j(\xi_l) \varphi_i(\xi_l) \omega_l$$

⊙ Pour des éléments \mathbb{P}_1 , les noeuds de quadrature sont alors : $\xi_0 = 0$ et $\xi_1 = 1$



⊙ Pour des éléments \mathbb{P}_2 , les noeuds de quadrature sont alors :

$\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 1/2$ et $\xi_2 = 1$



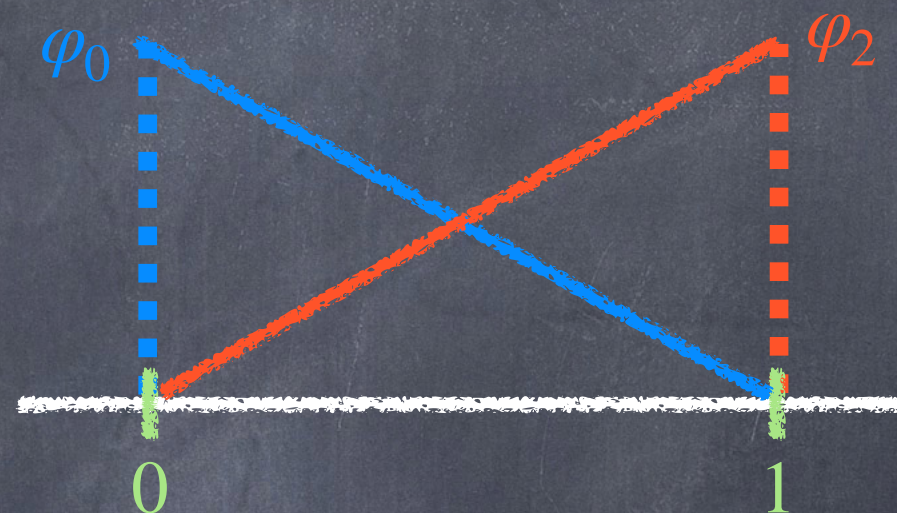
II. a) Le cas 1D et les quadrangles

Exemples :

Considérons un élément de référence $\hat{K} = [0,1]$.

$$\hat{M}_{ij} = \left(\varphi_j, \varphi_i \right)_K \neq \sum_{l=1}^{N_q} \varphi_j(\xi_l) \varphi_i(\xi_l) \omega_l$$

⊙ Pour des éléments \mathbb{P}_1 , les noeuds de quadrature sont alors : $\xi_0 = 0$ et $\xi_1 = 1$



⊙ Pour des éléments \mathbb{P}_2 , les noeuds de quadrature sont alors :

$\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 1/2$ et $\xi_2 = 1$



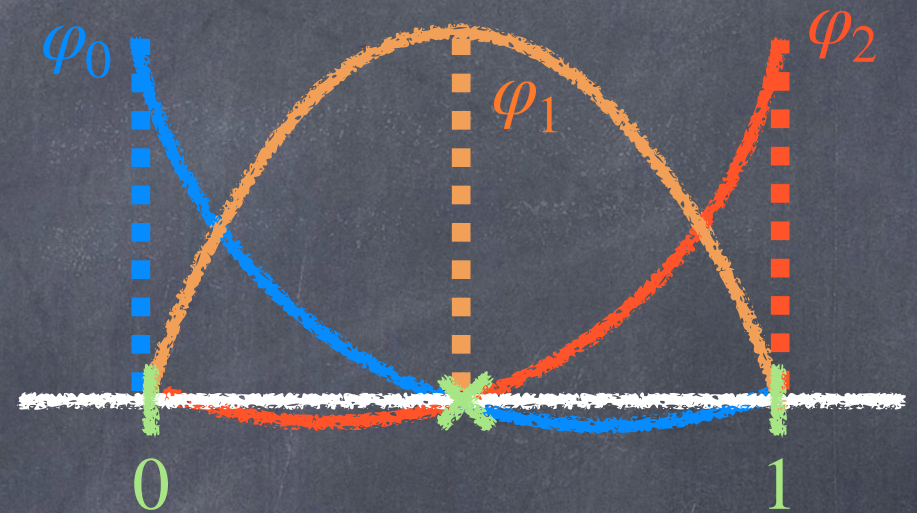
Les formules de quadrature ne peuvent plus être exactes !

II. a) Le cas 1D et les quadrangles

Considérons un élément de référence $\hat{K} = [0,1]$.

$$\hat{M}_{ij} = \left(\varphi_j, \varphi_i \right)_K \simeq \sum_{l=1}^{N_q} \varphi_j(\xi_l) \varphi_i(\xi_l) \omega_l$$

Si $\varphi \in \mathbb{P}_k$, alors la formule de quadrature devrait être exacte sur \mathbb{P}_{2k} .



2.2 Lemme (exercice)

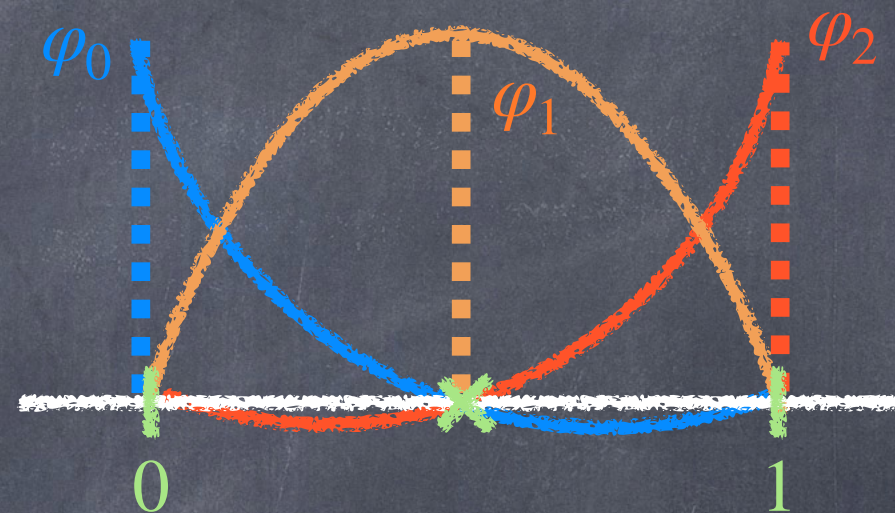
Une formule de quadrature à $k+1$ points t.q. $\xi_0 = 0$ et $\xi_k = 1$ est exacte sur \mathbb{P}_{2k-1} au plus.

II. a) Le cas 1D et les quadrangles

Considérons un élément de référence $\hat{K} = [0,1]$.

$$\hat{M}_{ij} = \left(\varphi_j, \varphi_i \right)_K \simeq \sum_{l=1}^{N_q} \varphi_j(\xi_l) \varphi_i(\xi_l) \omega_l$$

Si $\varphi \in \mathbb{P}_k$, alors la formule de quadrature devrait être exacte sur \mathbb{P}_{2k} .



2.2 Lemme (exercice)

Une formule de quadrature à $k+1$ points t.q. $\xi_0 = 0$ et $\xi_k = 1$ est exacte sur \mathbb{P}_{2k-1} au plus.

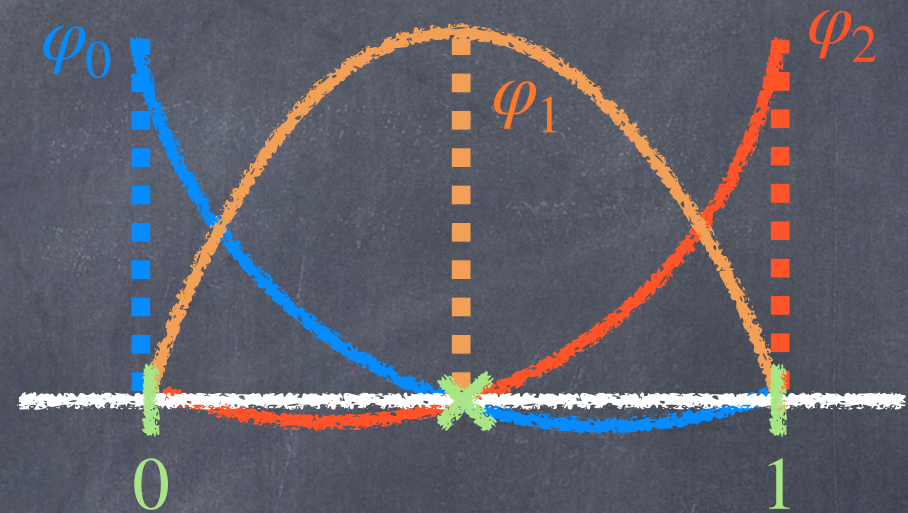
Remarque : On doit imposer $\xi_0 = 0$ et $\xi_k = 1$ pour construire des éléments H^1 conforme.

II. a) Le cas 1D et les quadrangles

Considérons un élément de référence $\hat{K} = [0,1]$.

$$\hat{M}_{ij} = \left(\varphi_j, \varphi_i \right)_K \simeq \sum_{l=1}^{N_q} \varphi_j(\xi_l) \varphi_i(\xi_l) \omega_l$$

Si $\varphi \in \mathbb{P}_k$, alors la formule de quadrature devrait être exacte sur \mathbb{P}_{2k} .



2.2 Lemme (exercice)

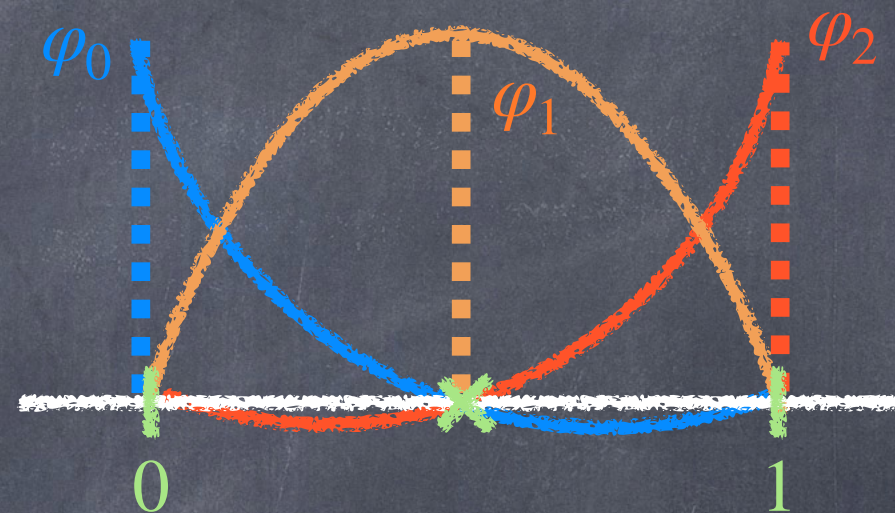
Une formule de quadrature à $k+1$ points t.q. $\xi_0 = 0$ et $\xi_k = 1$ est exacte sur \mathbb{P}_{2k-1} au plus.

II. a) Le cas 1D et les quadrangles

Considérons un élément de référence $\hat{K} = [0,1]$.

$$\hat{M}_{ij} = \left(\varphi_j, \varphi_i \right)_K \simeq \sum_{l=1}^{N_q} \varphi_j(\xi_l) \varphi_i(\xi_l) \omega_l$$

Si $\varphi \in \mathbb{P}_k$, alors la formule de quadrature devrait être exacte sur \mathbb{P}_{2k} .



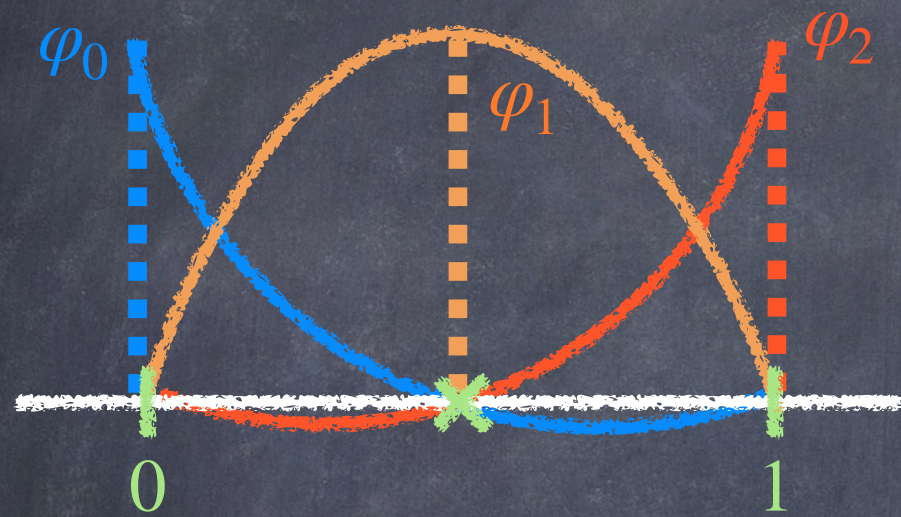
2.2 Lemme (exercice)

Une formule de quadrature à $k+1$ points t.q. $\xi_0 = 0$ et $\xi_k = 1$ est exacte sur \mathbb{P}_{2k-1} au plus.

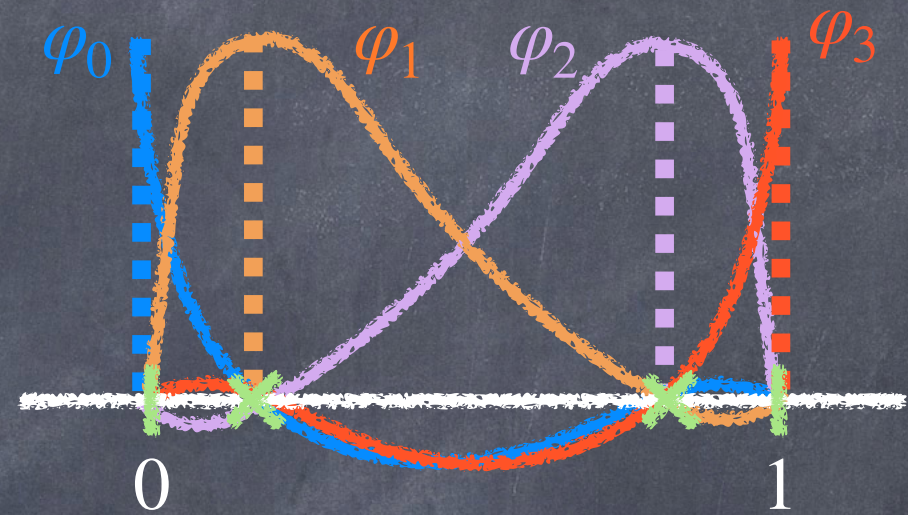
Il existe une unique formule de quadrature optimale, il s'agit de la quadrature de Gauss-Lobatto.

II. a) Le cas 1D et les quadrangles

Illustrations points de Gauss-Lobatto :



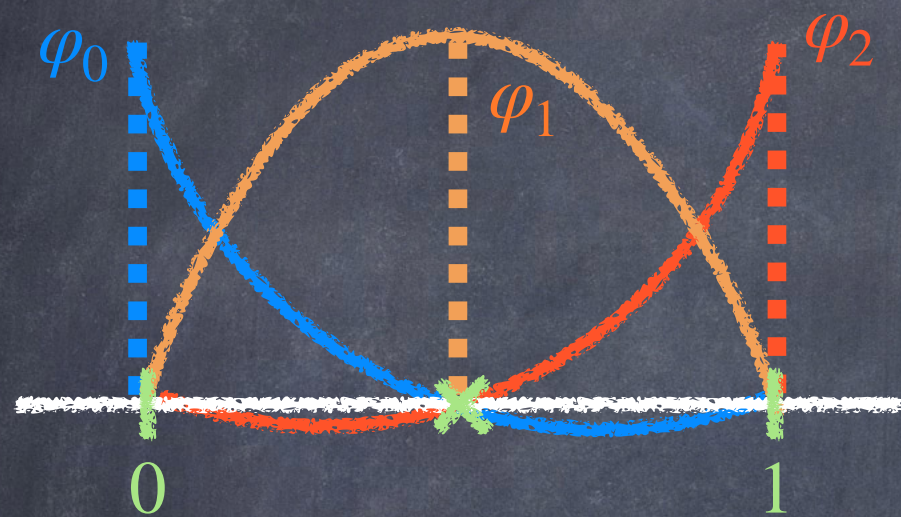
Elements \mathbb{P}_2



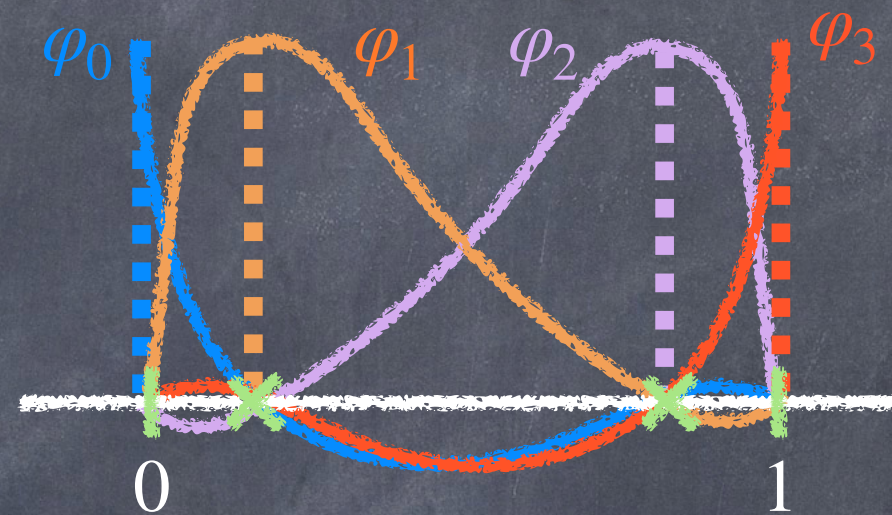
Elements \mathbb{P}_3

II. a) Le cas 1D et les quadrangles

Illustrations points de Gauss-Lobatto :



Elements \mathbb{P}_2



Elements \mathbb{P}_3

À partir de $k \geq 3$, les points ne correspondent plus aux points équirépartis classiques des éléments de Lagrange.

II. a) Le cas 1D et les quadrangles

Considérons un élément de référence $\hat{K} = [0,1]$.

$$\hat{M}_{ij} = \left(\varphi_j, \varphi_i \right)_K \simeq \sum_{l=1}^{N_q} \varphi_j(\xi_l) \varphi_i(\xi_l) \omega_l$$

où la formule de quadrature est celle de GL.

On a vu que ce choix de formule (et de fonctions de base associées) conduit à une matrice \mathbb{M} diagonale.

La question naturelle est alors de savoir si cette approximation détériore l'estimation d'erreur du schéma ?

$$\sqrt{E_{\theta}^{n+1/2}} \leq \sqrt{E_{\theta}^{1/2}} + \left(O(\Delta t^2) + O(h^p) \right) t^n$$

II. a) Le cas 1D et les quadrangles

Considérons un élément de référence $\hat{K} = [0,1]$.

$$\hat{M}_{ij} = \left(\varphi_j, \varphi_i \right)_K \simeq \sum_{l=1}^{N_q} \varphi_j(\xi_l) \varphi_i(\xi_l) \omega_l$$

où la formule de quadrature est celle de GL.

On a vu que ce choix de formule (et de fonctions de base associées) conduit à une matrice \mathbb{M} diagonale.

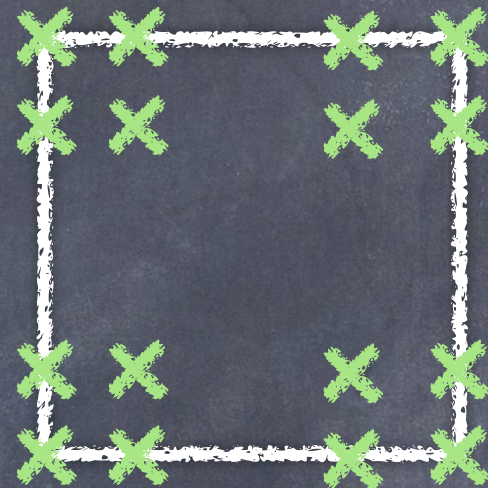
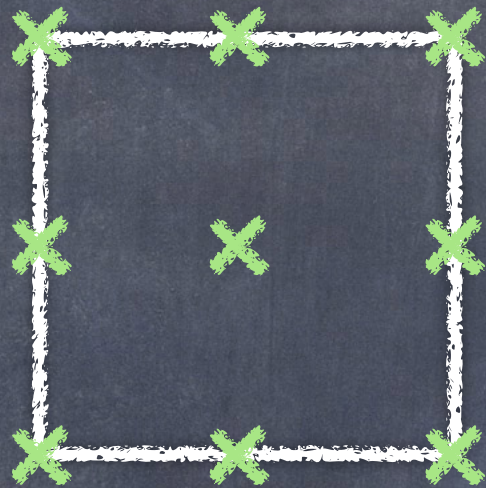
2.3 Théorème (admis)

Si la formule de quadrature est exacte sur \mathbb{P}_{2k-1} sur l'élément de référence, alors on a :

$$\sqrt{E_{\theta}^{n+1/2}} \leq \sqrt{E_{\theta}^{1/2}} + \left(O(\Delta t^2) + O(h^p) \right) t^n$$

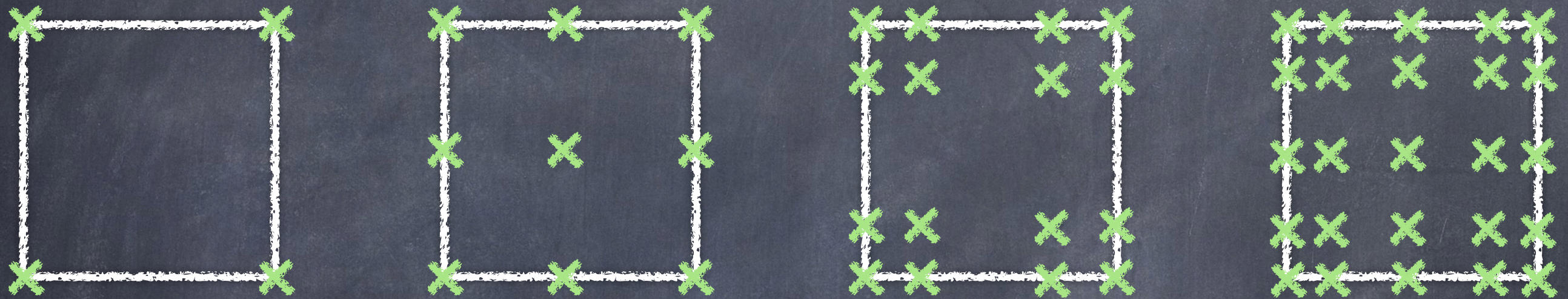
II. a) Le cas 1D et Les quadrangles

En 2D, on généralise facilement au cas des quadrangles à l'aide du **produit tensoriel** :



II. a) Le cas 1D et les quadrangles

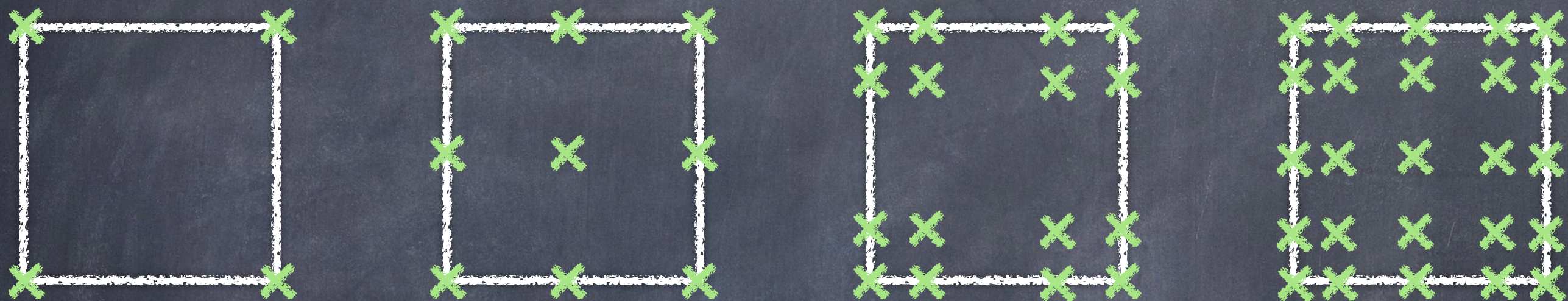
En 2D, on généralise facilement au cas des quadrangles à l'aide du **produit tensoriel** :



Remarque 1 : Dans le cas de quadrangle, les fonctions de référence appartiennent à \mathbb{Q}_k . En revanche, même pour des éléments \mathbb{Q}_1 , les **fonctions sur l'élément déformé ne sont (généralement) pas dans \mathbb{Q}_1** .

II. a) Le cas 1D et les quadrangles

En 2D, on généralise facilement au cas des quadrangles à l'aide du **produit tensoriel** :



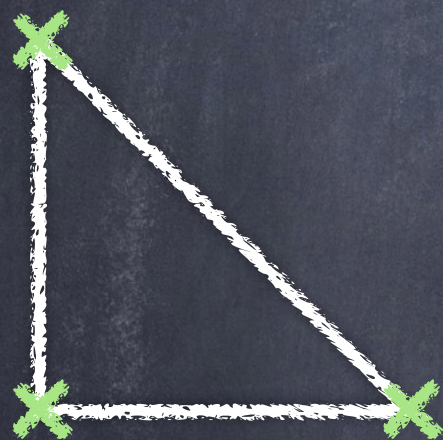
Remarque 1 : Dans le cas de quadrangle, les fonctions de référence appartiennent à \mathbb{Q}_k . En revanche, même pour des éléments \mathbb{Q}_1 , les **fonctions sur l'élément déformé ne sont (généralement) pas dans \mathbb{Q}_1** .

Remarque 2 : En dimension $d \geq 2$, l'estimation d'erreur précédente se détériore en $O(h^{p-d+1})$ (cf [article](#)).

II. b) Les maillages triangulaires

Pour certaines géométries, il est très difficile de construire un maillage quadrangulaire (d'ordre élevé).

La question se pose alors : peut-on construire un élément condensé sur un triangle de référence ?



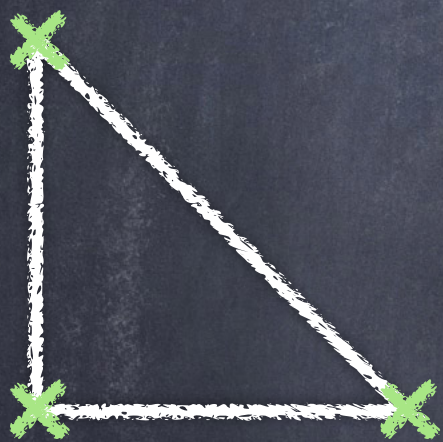
Elements \mathbb{P}_1

$$\hat{M}_{ij} = \left(\varphi_j, \varphi_i \right)_K \simeq \sum_{l=1}^{N_q} \varphi_j(\xi_l) \varphi_i(\xi_l) \omega_l$$

II. b) Les maillages triangulaires

Pour certaines géométries, il est très difficile de construire un maillage quadrangulaire (d'ordre élevé).

La question se pose alors : peut-on construire un élément condensé sur un triangle de référence ?



Elements \mathbb{P}_1

$$\hat{M}_{ij} = \left(\varphi_j, \varphi_i \right)_K \simeq \sum_{l=1}^{N_q} \varphi_j(\xi_l) \varphi_i(\xi_l) \omega_l$$

Remarque : Dans ce cas, on ne peut bien sur plus construire l'élément à l'aide du produit tensoriel.

II. b) Les maillages triangulaires

Exemples :

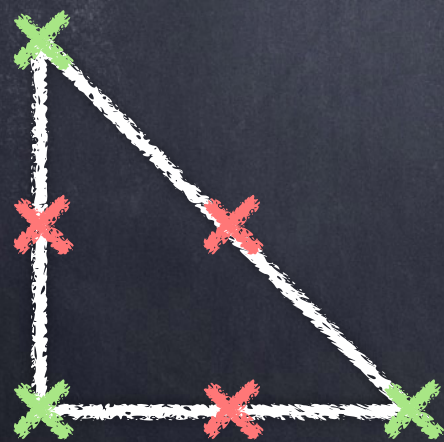


Elements \mathbb{P}_1

$$\hat{M}_{ij} = \left(\varphi_j, \varphi_i \right)_K \simeq \sum_{l=1}^3 \varphi_j(\xi_l) \varphi_i(\xi_l) \omega$$

où $\omega = \frac{1}{3}$ (formule trapèze).

(détails au (vrai) tableau)



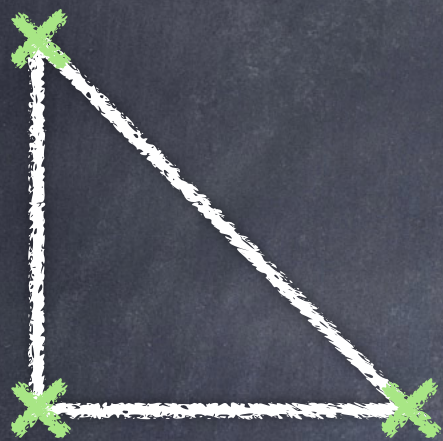
Elements \mathbb{P}_2

$$\hat{M}_{ij} = \left(\varphi_j, \varphi_i \right)_K \simeq \sum_{l=1}^3 \varphi_j(\xi_l) \varphi_i(\xi_l) \omega_S + \sum_{l=1}^3 \varphi_j(\xi_l) \varphi_i(\xi_l) \omega_M$$

où $\omega_S = 0$ et $\omega_M = \frac{1}{3}$.

II. b) Les maillages triangulaires

Exemples :



Elements \mathbb{P}_1

$$\hat{M}_{ij} = \left(\varphi_j, \varphi_i \right)_K \simeq \sum_{l=1}^3 \varphi_j(\xi_l) \varphi_i(\xi_l) \omega$$

où $\omega = \frac{1}{3}$ (formule trapèze).

(détails au (vrai) tableau)



Elements \mathbb{P}_2

$$\hat{M}_{ij} = \left(\varphi_j, \varphi_i \right)_K \simeq \sum_{l=1}^3 \varphi_j(\xi_l) \varphi_i(\xi_l) \omega_S + \sum_{l=1}^3 \varphi_j(\xi_l) \varphi_i(\xi_l) \omega_M$$

où $\omega_S = 0$ et $\omega_M = \frac{1}{3}$.

Conduit à une matrice non définie !

II. b) Les maillages triangulaires

Construction d'un élément $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ condensé

L'objectif est de construire un espace $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ t.q. :

- ① Les noeuds de quadrature forment un ensemble unisolvant sur $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ (pour garantir la condensation),

II. b) Les maillages triangulaires

Construction d'un élément $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ condensé

L'objectif est de construire un espace $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ t.q. :

- ① Les noeuds de quadrature forment un ensemble unisolvant sur $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ (pour garantir la condensation),
- ② Les poids de quadrature soient strictement positifs (pour garantir \mathbb{M} définie positive),

II. b) Les maillages triangulaires

Construction d'un élément $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ condensé

L'objectif est de construire un espace $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ t.q. :

- ① Les noeuds de quadrature forment un ensemble unisolvant sur $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ (pour garantir la condensation),
- ② les poids de quadrature soient strictement positifs (pour garantir \mathbb{M} définie positive),
- ③ l'élément construit soit H^1 conforme,

II. b) Les maillages triangulaires

Construction d'un élément $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ condensé

L'objectif est de construire un espace $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ t.q. :

- ① Les noeuds de quadrature forment un ensemble unisolvant sur $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ (pour garantir la condensation),
- ② les poids de quadrature soient strictement positifs (pour garantir \mathbb{M} définie positive),
- ③ l'élément construit soit H^1 conforme,
- ④ et la formule de quadrature soit suffisamment précise pour conduire à une méthode du même ordre que l'élément \mathbb{P}_2 classique.

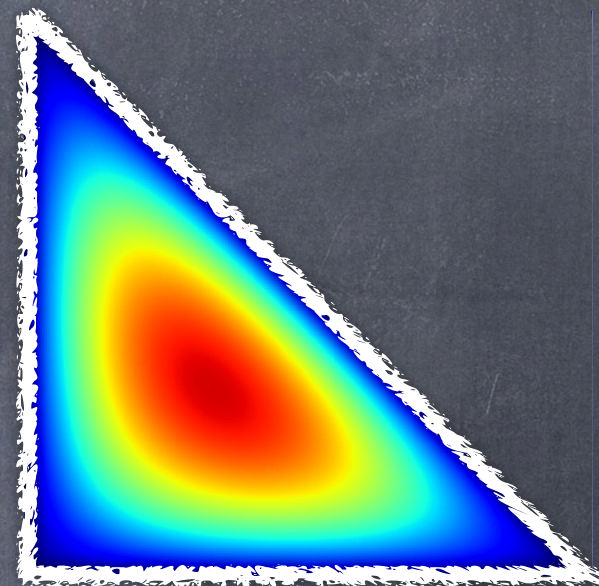
II. b) Les maillages triangulaires

Construction d'un élément $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ condensé

L'idée est d'enrichir l'espace \mathbb{P}_2 comme suit :

$$\widetilde{\mathbb{P}}_2 = \mathbb{P}_2 \oplus b$$

où la fonction « bulle » b est définie par $b(x,y) = xy(1-x-y)$.



II. b) Les maillages triangulaires

Construction d'un élément $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ condensé

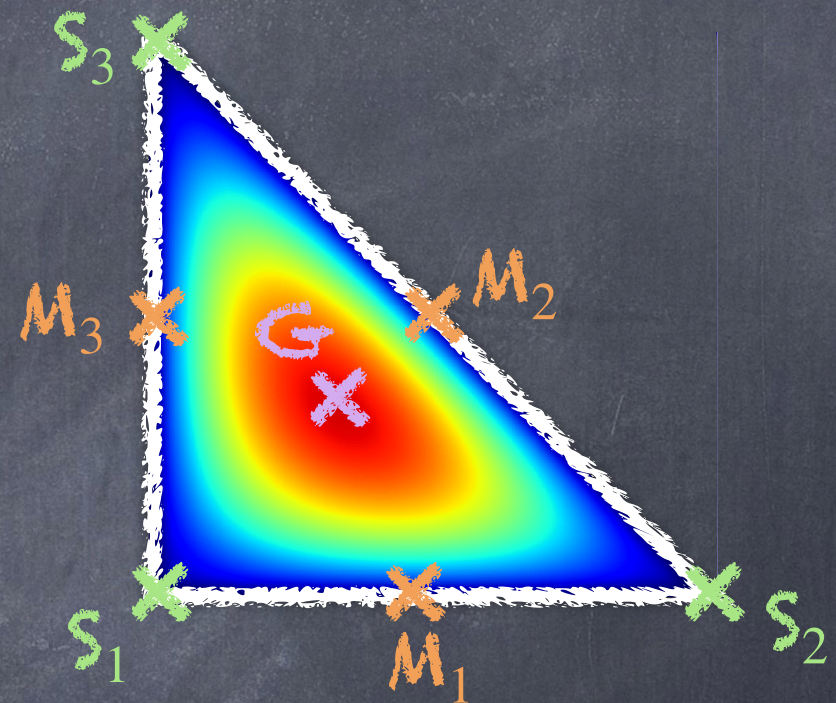
L'idée est d'enrichir l'espace \mathbb{P}_2 comme suit :

$$\widetilde{\mathbb{P}}_2 = \mathbb{P}_2 \oplus b$$

où la fonction « bulle » b est définie par $b(x,y) = xy(1-x-y)$.

On a alors :

- ① L'ensemble des noeuds S_i , M_i et G est unisolvant (détails au (vrai) tableau)



II. b) Les maillages triangulaires

Construction d'un élément $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ condensé

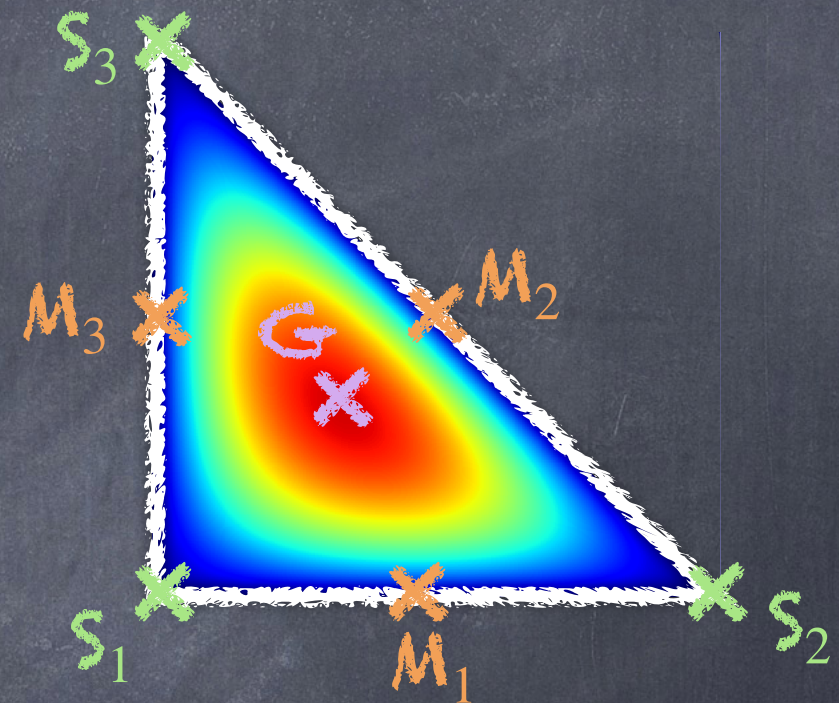
L'idée est d'enrichir l'espace \mathbb{P}_2 comme suit :

$$\widetilde{\mathbb{P}}_2 = \mathbb{P}_2 \oplus b$$

où la fonction « bulle » b est définie par $b(x,y) = xy(1-x-y)$.

On a alors :

- ① L'ensemble des noeuds S_i , M_i et G est unisolvant,
- ② les poids de quadrature associé sont strictement positifs
 $\omega_S = 1/40$, $\omega_M = 2/30$ et $\omega_G = 9/40$,



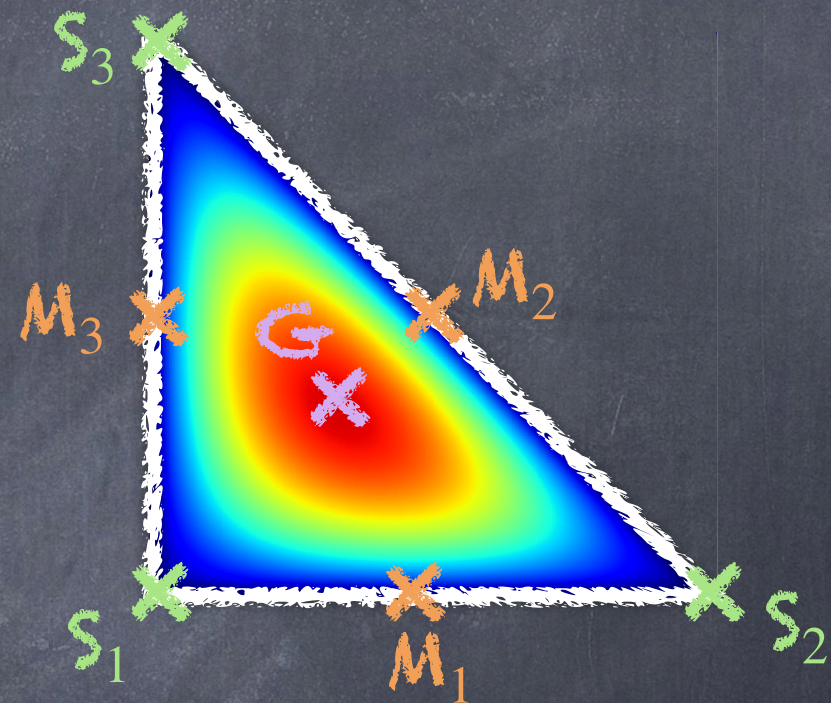
II. b) Les maillages triangulaires

Construction d'un élément $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ condensé

L'idée est d'enrichir l'espace \mathbb{P}_2 comme suit :

$$\widetilde{\mathbb{P}}_2 = \mathbb{P}_2 \oplus b$$

où la fonction « bulle » b est définie par $b(x,y) = xy(1-x-y)$.



On a alors :

- ① L'ensemble des noeuds S_i , M_i et G est unisolvant,
- ② les poids de quadrature associé sont strictement positifs $\omega_S = 1/40$, $\omega_M = 2/30$ et $\omega_G = 9/40$,
- ③ l'élément construit est bien H^1 conforme car la fonction bulle est nulle sur le bord du triangle de référence.

II. b) Les maillages triangulaires

2.4 Théorème (admis)

Si on a $\mathbb{P}_k \subset \widetilde{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}_{k'}$ et une formule de quadrature exacte sur $\mathbb{P}_{k+k'-2}$, alors on obtient une erreur en h^k comme pour les éléments standard \mathbb{P}_k .

Dans notre cas, on a bien une formule exacte sur \mathbb{P}_3 ($k' = 3$), donc l'élément construit satisfait bien tous les critères !

II. b) Les maillages triangulaires

2.4 Théorème (admis)

Si on a $\mathbb{P}_k \subset \widetilde{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}_{k'}$ et une formule de quadrature exacte sur $\mathbb{P}_{k+k'-2}$, alors on obtient une erreur en h^k comme pour les éléments standard \mathbb{P}_k .

Dans notre cas, on a bien une formule exacte sur \mathbb{P}_3 ($k' = 3$), donc l'élément construit satisfait bien tous les critères !

Remarque : Il est possible de construire de même un élément condensé $\widetilde{\mathbb{P}}_3$ (cf [article](#)). Cependant, ce n'est pas possible de manière systématique à tout ordre (cf [article](#)).

II. b) Les maillages triangulaires

2.4 Théorème (admis)

Si on a $\mathbb{P}_k \subset \widetilde{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}_{k'}$ et une formule de quadrature exacte sur $\mathbb{P}_{k+k'-2}$, alors on obtient une erreur en h^k comme pour les éléments standard \mathbb{P}_k .

Dans notre cas, on a bien une formule exacte sur \mathbb{P}_3 ($k' = 3$), donc l'élément construit satisfait bien tous les critères !

Remarque 2 : L'élément $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ présenté précédemment est connu (et utilisé) également en mécanique des fluides.

Au programme...

Plan :

I. Introduction

II. Condensation de masse

a) Le cas 1D et les quadrangles

b) Le cas des maillages triangulaires

III. Schémas d'ordre élevé en temps

a) L'équation modifiée

b) Propriétés des schémas

III. a) L'équation modifiée

Considérons un système d'EDO : $\underline{y}''(t) + \mathbb{A}\underline{y}(t) = \underline{0}$

avec \mathbb{A} une matrice sym. def. pos., et le schéma de discrétisation (en temps) :

$$\frac{\underline{y}^{n+1} - 2\underline{y}^n + \underline{y}^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbb{A}\underline{y}^n = \underline{0}$$

Remarque : On peut se ramener à ce cas en prenant par exemple $\mathbb{A} = \mathbb{M}^{-1/2} \mathbb{K} \mathbb{M}^{-1/2}$ et $\underline{y}^n = \mathbb{M}^{1/2} \underline{u}^n$ (\mathbb{M} étant s.d.p.).

III. a) L'équation modifiée

Considérons un système d'EDO : $\underline{y}''(t) + \mathbb{A}\underline{y}(t) = \underline{0}$

avec \mathbb{A} une matrice sym. def. pos., et le schéma de discrétisation (en temps) :

$$\frac{\underline{y}^{n+1} - 2\underline{y}^n + \underline{y}^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbb{A}\underline{y}^n = \underline{0}$$

3.1 Proposition

L'approximation :

$$\frac{\underline{y}(t^{n+1}) - 2\underline{y}(t^n) + \underline{y}(t^{n-1}))}{\Delta t^2} \approx \underline{y}''(t^n) + 2 \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{l+1} \frac{\Delta t^{2l}}{(2l+2)!} \mathbb{A}^{l+1} \underline{y}(t^n)$$

est d'ordre Δt^{2k} .

Preuve : au (vrai) tableau !

III. a) L'équation modifiée

3.2 Définition

On déduit le schéma d'ordre $2k$:

$$(\underline{y}^{n+1} - 2\underline{y}^n + \underline{y}^{n-1}) + \Delta t^2 \tilde{\mathbb{A}}_k \underline{y}^n = \underline{0}$$

$$\text{où } \tilde{\mathbb{A}}_k = \mathbb{A} - 2 \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{l+1} \frac{\Delta t^{2l}}{(2l+2)!} \mathbb{A}^{l+1}$$

Remarques :

- ⊙ Le schéma obtenu est toujours explicite.
- ⊙ Pour évaluer $\tilde{\mathbb{A}}_k \underline{y}$, on applique la règle d'Horner.
- ⊙ On déduit le schéma directement pour $\underline{u}^n = \mathbb{M}^{-1/2} \underline{y}^n$:

$$(\underline{u}^{n+1} - 2\underline{u}^n + \underline{u}^{n-1}) + \Delta t^2 \widetilde{(\mathbb{M}^{-1} \mathbb{K})}_k \underline{u}^n = \underline{0}$$

III. b) Propriétés des schémas

3.2 Définition

On déduit le schéma d'ordre $2k$:

$$(\underline{y}^{n+1} - 2\underline{y}^n + \underline{y}^{n-1}) + \Delta t^2 \tilde{A}_k \underline{y}^n = \underline{0}$$

$$\text{où } \tilde{A}_k = A - 2 \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{l+1} \frac{\Delta t^{2l}}{(2l+2)!} A^{l+1}$$

3.3 Lemme

La matrice \tilde{A}_k est symétrique semi-définie positive et ses valeurs propres sont données par :

$$\tilde{\lambda} = \frac{Q_k(\Delta t^2 \lambda)}{\Delta t^2} \quad \text{où} \quad Q_k(x) = x - 2 \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{l+1} \frac{x^{l+1}}{(2l+2)!}, \quad \lambda \in \sigma(A)$$

Preuve : au (vrai) tableau !

III. b) Propriétés des schémas

3.2 Définition

On déduit le schéma d'ordre $2k$:

$$(\underline{y}^{n+1} - 2\underline{y}^n + \underline{y}^{n-1}) + \Delta t^2 \tilde{A}_k \underline{y}^n = \underline{0}$$

$$\text{où } \tilde{A}_k = A - 2 \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{l+1} \frac{\Delta t^{2l}}{(2l+2)!} A^{l+1}$$

3.4 Théorème (Stabilité)

Le schéma est stable si $\Delta t^2 \|\tilde{A}_k\| \leq 4\alpha_k$ où

$$\alpha_k = \sup \{ \alpha > 0, \text{ t.q. } \forall x \in [0, \alpha], 0 \leq x Q_k(x) \leq 4 \}$$

Preuve : au (vrai) tableau !



III. b) Propriétés des schémas

3.2 Définition

On déduit le schéma d'ordre $2k$:

$$(\underline{y}^{n+1} - 2\underline{y}^n + \underline{y}^{n-1}) + \Delta t^2 \tilde{A}_k \underline{y}^n = \underline{0}$$

$$\text{où } \tilde{A}_k = A - 2 \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{l+1} \frac{\Delta t^{2l}}{(2l+2)!} A^{l+1}$$

3.4 Théorème (Stabilité)

Le schéma est stable si $\Delta t^2 \|\tilde{A}_k\| \leq 4\alpha_k$ où

$$\alpha_k = \sup \{ \alpha > 0, \text{ t.q. } \forall x \in [0, \alpha], 0 \leq x Q_k(x) \leq 4 \}$$

Exemples : $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 \simeq 1.893$, $\alpha_4 \simeq 5.37$.

On notera que la CFL s'améliore avec k !

III. b) Propriétés des schémas

Illustration schéma d'ordre élevé et CFL :

$$\Delta t = 0,0012$$



Ordre 2 (tps)



Ordre 4 (tps)



Ordre 6 (tps)

III. b) Propriétés des schémas

Illustration schéma d'ordre élevé et CFL :

$$\Delta t = 0,0012$$



Ordre 2 (tps)



Ordre 4 (tps)



Ordre 6 (tps)

Plan détaillé du cours 2

Plan :

I. Introduction

II. Condensation de masse

a) Le cas 1D et les quadrangles

b) Le cas des maillages triangulaires

III. Schémas d'ordre élevé en temps

a) L'équation modifiée

b) Propriétés des schémas

Pour aller un peu plus loin...

Les techniques de condensation de masse s'applique pour toute équation d'évolution où on peut établir un **schéma explicite stable**.

Pour certaines géométries 3D, des éléments quadrangulaires ne peuvent pas être utilisé partout. On peut alors se tourner vers des maillages mixtes (tétraèdres / cubes). Il faut alors construire un élément condensé sur des pyramides (pour avoir des maillages conformes).

La technique de l'équation modifiée se prête particulièrement bien aux système d'EDO linéaire. On peut l'étendre à des systèmes non linéaires, mais cela devient vite compliqué !