GM 5 :
Méthodes numériques avancées pour l'équation des ondes

Cours 1 :
Modèles classiques et premières techniques de discrétisation.

GM 5 Année 2021 - 2022

Contact : A. Tonnoir

antoine.tonnoir@insa-rouen.fr

I. Introduction

Ce cours est une introduction a différentes méthodes pour la simulation numérique de phénomènes liées aux ondes.

Il s'appuie (notamment) sur les références suivantes :

- Le cours de E. Becache
  « Schémas numériques pour l'équation des ondes »
- Le cours de S. Tordeux
  « Analyse mathématiques des phénomènes de propagation d'ondes »
- Le cours de P. Joly
  « Introduction à l'analyse mathématiques des équations de Maxwell en régime transitoire »

I. Introduction

1.1 Définition

Une équation d'ondes est une équation de la forme

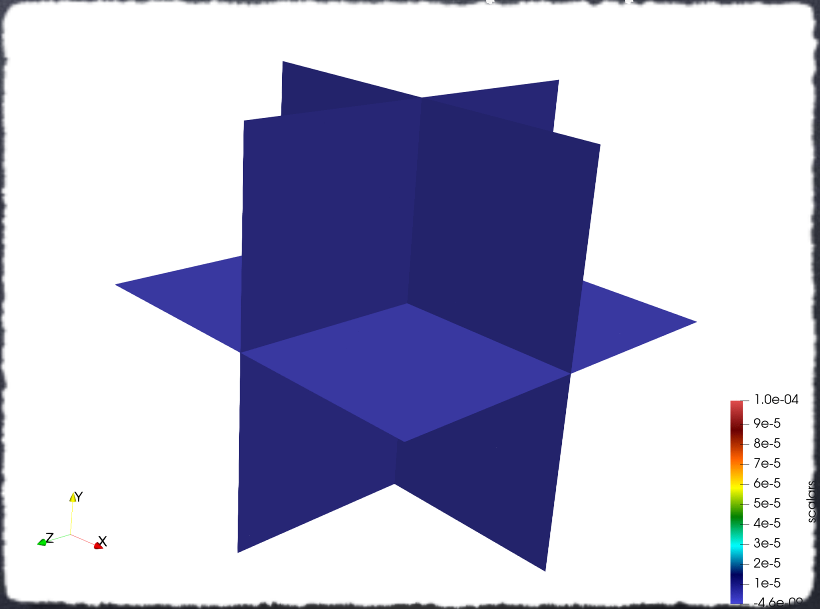
$$\partial_{tt}^2 \mathbf{u} + A\mathbf{u} = f$$

où $\mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, et A est un opérateur différentiel d'ordre 2 (positif) sur les variables d'espace.

Exemple 1

L'équation de d'Alembert $\partial_{tt}^2 \mathbf{u} - \partial_{xx}^2 \mathbf{u} = f$ décrit la propagation d'une onde le long d'une corde.

En dimension supérieure, elle décrit par exemple la propagation du son dans l'air.



I. Introduction

1.1 Définition

Une équation d'ondes est une équation de la forme

$$\partial^2_{tt}\underline{\mathbf{u}} + \mathrm{A}\underline{\mathbf{u}} = \underline{f}$$

où $\underline{\mathbf{u}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, et A est un opérateur différentiel d'ordre 2 (positif) sur les variables d'espace.

Exemple 2

L'équation des ondes élastiques $\partial_{tt}\underline{\mathbf{u}} - \operatorname{div}\sigma(\underline{\mathbf{u}}) = \underline{f}$ décrit la propagation dans les solides.

On la retrouve typiquement en géophysique.

I. Introduction

1.1 Définition

Une équation d'ondes est une équation de la forme

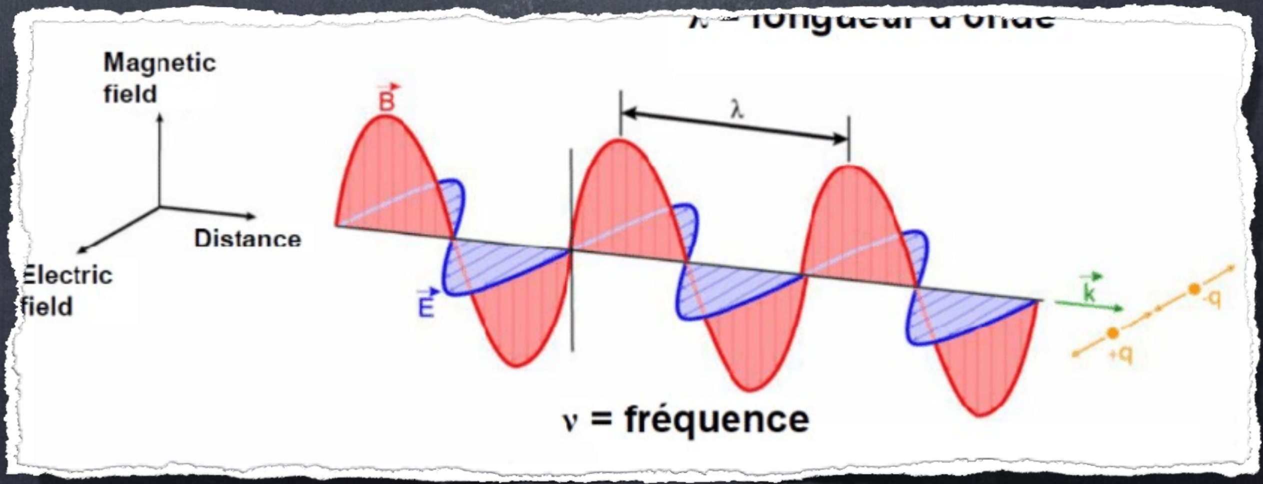
$$\partial_{tt}^2 \underline{u} + A\underline{u} = \underline{f}$$

où $\underline{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, et A est un opérateur différentiel d'ordre 2 (positif) sur les variables d'espace.

Exemple 3

Les équations des Maxwell décrivent la propagation des ondes électromagnétiques.

Elles servent par exemple dans la modélisation des radars.



I. Introduction

1.1 Définition

Une équation d'ondes est une équation de la forme

$$\partial_{tt}^2 \underline{u} + A\underline{u} = \underline{f}$$

où $\underline{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, et A est un opérateur différentiel d'ordre 2 (positif) sur les variables d'espace.

Objectifs (Théoriques) :

- Montrer l'existence et l'unicité d'une solution
- Propriétés qualitatives de la solution

I. Introduction

1.1 Définition

Une équation d'ondes est une équation de la forme

$$\partial^2_{tt}\underline{u}+A\underline{u}=\underline{f}$$

où $\underline{u} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, et A est un opérateur différentiel d'ordre 2 (positif) sur les variables d'espace.

Objectifs (Numériques) :

- Méthodes de discrétisation de l'EDP
- Résolution rapide et précise.

I. Introduction

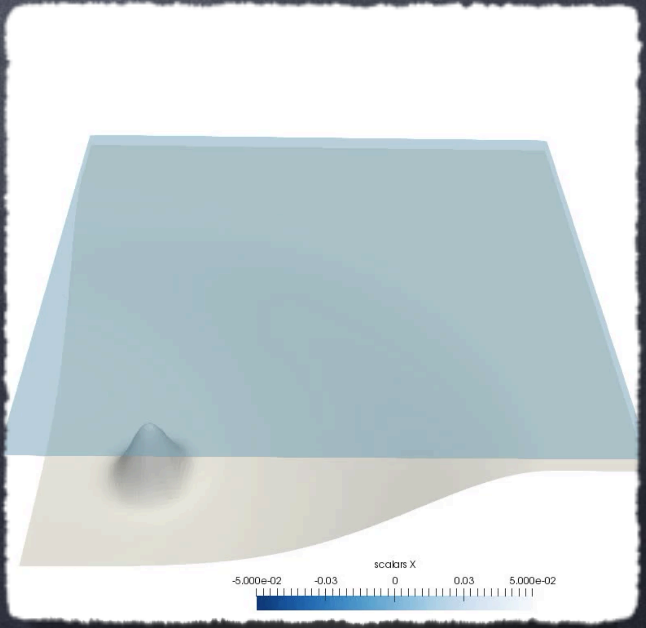
Dans la suite de ce cours, on s'intéressera principalement au modèle suivant :

$$\rho \partial_{tt}^2 \mathbf{u} - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \mathbf{u}\right) = f$$

où ρ et σ sont deux fonctions strictement positives caractérisant les propriétés du milieu.

Dans ce modèle, $\mathbf{u}$ peut représenter (notamment) :

- la pression dans l'air (son).
- la hauteur d'une membrane vibrante ou d'une vague



Au programme...

Plan :

I. Introduction

II. Aspects théoriques

a) Le Théorème de Hille-Yosida

b) Propriétés de la solution

III. Méthodes de discrétisation

a) Les θ-schémas

b) Propriétés des schémas

II.a) Le théorème de Hille-Yosida

Notons par H un espace de Hilbert et A un opérateur linéaire de $D(A) \subset H$ dans H.

2.1 Définition

On dira que l'opérateur A est maximal monotone ssi

- A+I est surjectif de D(A) dans H
- $\forall u \in D(A), \ (Au,u) \geq 0$

Exemple

L'opérateur $A = -\partial^2_{xx}$ de

$$D(A) = \left\{ u \in H^1(0,1), \text{ t.q. } \partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0 \right\} \subset H = L^2(0,1)$$

est maximal monotone.

II.a) Le théorème de Hille-Yosida

Considérons alors le problème d'évolution :

Trouver $U : t \in \mathbb{R}^+ \to U(t) \in D(A)$ t.q. : $\dfrac{d}{dt}U + AU = F$

muni de la condition initiale $U(0) = U_0 \in D(A)$.

2.2 Définition

On appellera solution forte toute fonction U solution de l'équation dans $C^1([0,T],H) \cap C^0([0,T],D(A))$, i.e :

- l'application $t \to U(t)$ est dans $C^1([0,T],H)$,
- $\forall t \geq 0$, $U(t)$ est dans $D(A)$,
- l'application $t \to AU(t)$ est dans $C^0([0,T],D(A))$.

II.a) Le théorème de Hille-Yosida

Considérons alors le problème d'évolution :

Trouver $U : t \in \mathbb{R}^+ \to U(t) \in D(A)$ t.q. : $\dfrac{d}{dt}U + AU = F$

muni de la condition initiale $U(0) = U_0 \in D(A)$.

2.3 Théorème de Hille-Yosida (admis)

S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $A+\lambda I$ soit maximal monotone, alors pour tout $F \in C^1([0,T],H)$ le problème ci-dessus admet une unique solution forte.

Remarque : Dans le cas où A est un opérateur borné, on montre l'existence et l'unicité d'une solution forte à l'aide du Thm. De Cauchy-Lipschitz.

II.a) Le théorème de Hille-Yosida

Application :

Considérons le problème suivant :

$$\left|\begin{array}{lll} \rho\partial_{tt}^2 \mathbf{u} - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla} \mathbf{u}\right) = f & \text{dans} & \Omega \\ \sigma \partial_\nu \mathbf{u} = 0 & \text{sur} & \partial\Omega \end{array}\right.$$

avec comme condition initiale $\mathbf{u}(0,\cdot) = \mathbf{u}_0$ et $\partial_t \mathbf{u}(0,\cdot) = v_0$.

En posant $\underline{U} = \left(\mathbf{u}, \partial_t \mathbf{u}\right)$, on peut alors réécrire le problème ci-dessus ainsi :

$$\frac{d}{dt}\underline{U} + A\underline{U} = F$$

et appliquer le théorème de Hille-Yosida.

(détails au (vrai) tableau)

II.b) Propriétés de la solution

Considérons le problème suivant :

$$\left|\begin{array}{lll} \rho\partial^2_{tt}\mathbf{u} - \mathrm{div}\,(\sigma\underline{\nabla}\mathbf{u}) = f & \text{dans} & \Omega \\ \sigma\partial_\nu \mathbf{u} = 0 & \text{sur} & \partial\Omega \end{array}\right.$$

avec comme condition initiale $\mathbf{u}(0,\cdot) = \mathbf{u}_0$ et $\partial_t\mathbf{u}(0,\cdot) = \mathbf{v}_0$.

2.4 Proposition (Identité d'énergie)

La solution du problème ci-dessus satisfait l'identité d'énergie suivante :

$$\frac{d}{dt}E(\mathbf{u},t) = \left(f(t), \frac{d}{dt}\mathbf{u}(t) \right) \text{ où } E(\mathbf{u},t) = \frac{1}{2}\left\|\frac{d}{dt}\mathbf{u}(t)\right\|^2_\rho + \frac{1}{2}\|\underline{\nabla}\mathbf{u}(t)\|^2_\sigma$$

au tableau !

Remarque : si $f(t)=0$, on notera que l'énergie est conservée.

II.b) Propriétés de la solution

Considérons le problème suivant :

$$\left|\begin{array}{ll} \rho\partial^2_{tt}\mathbf{u} - \mathrm{div}\,(\sigma\underline{\nabla}\mathbf{u}) = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \sigma\partial_\nu\mathbf{u} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{array}\right.$$

avec comme condition initiale $\mathbf{u}(0,\cdot) = \mathbf{u}_0$ et $\partial_t\mathbf{u}(0,\cdot) = \mathbf{v}_0$.

2.5 Théorème (Propagation à vitesse finie, admis)

Si $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{v}_0$ et f sont à support compact dans $B(\underline{A},r)$, $r>0$ alors

$$\forall t \geq 0, \quad \mathrm{supp}\ \mathbf{u}(.,t) \subset B(\underline{A},r) + B(\underline{0}, t\,c^+)$$

où $c^+ = \mathrm{supp}\ (\sigma/\rho)^{\frac{1}{2}}$.

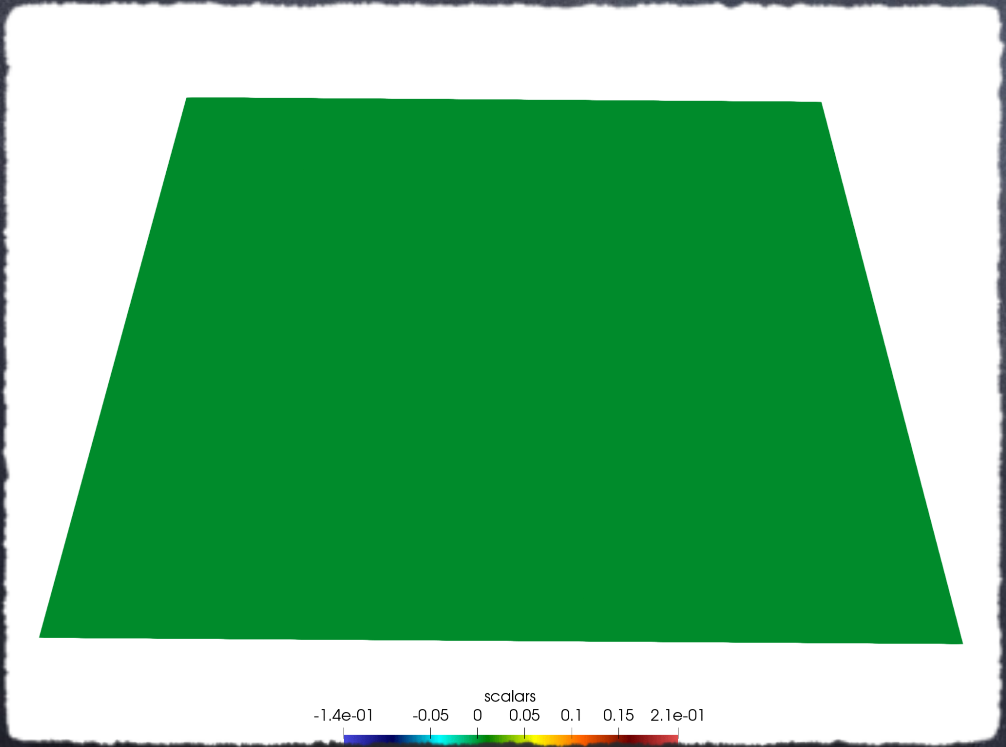
II.b) Propriétés de la solution

Considérons le problème suivant :

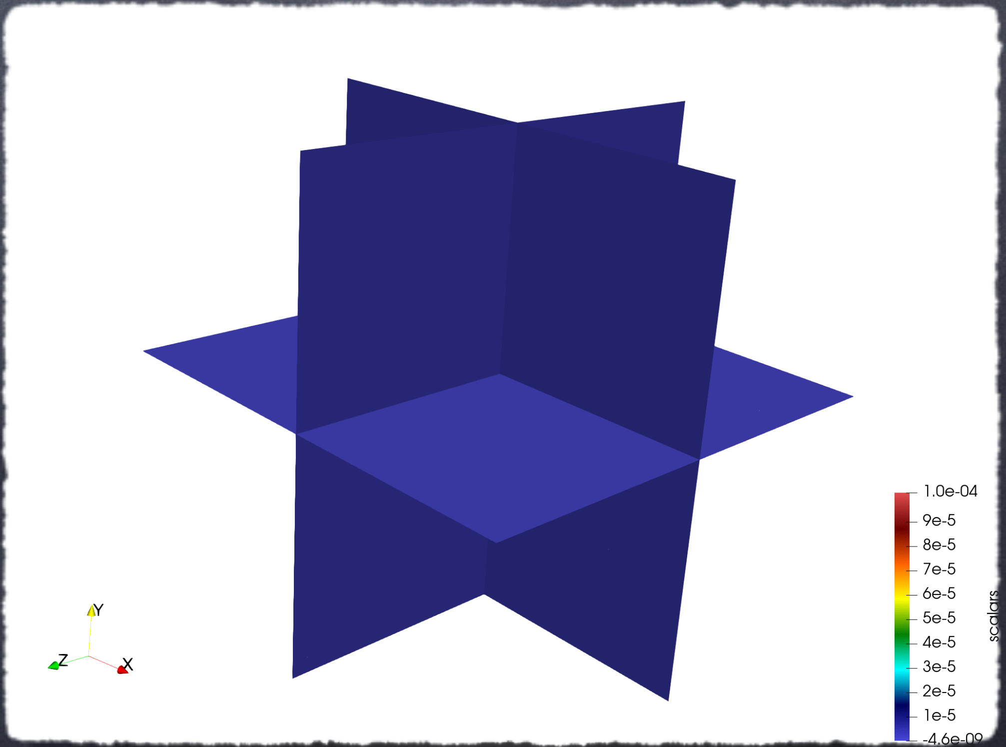
$$\begin{cases} \rho \partial_{tt}^2 \mathbf{u} - \mathrm{div}\,(\sigma \underline{\nabla} \mathbf{u}) = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \sigma \partial_\nu \mathbf{u} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

avec comme condition initiale $\mathbf{u}(0,\cdot) = \mathbf{u}_0$ et $\partial_t \mathbf{u}(0,\cdot) = \mathbf{v}_0$.

Illustration de la propagation à vitesse finie :



En 2D



En 3D

II.b) Propriétés de la solution

Considérons le problème homogène dans tout l'espace :

$$\partial^2_{tt}\mathbf{u} - c^2 \Delta \mathbf{u} = 0 \qquad \text{dans} \qquad \mathbb{R}^n \qquad (c^2 = \sigma/\rho)$$

2.6 Définition

On appelle ondes planes des solutions de l'équation ci-dessus de la forme $U e^{i(\omega t + \underline{k}\cdot\underline{x})}$.

2.7 Proposition (relation de dispersion)

Les ondes planes vérifient la relation de dispersion :

$$\omega^2 = c^2 \|\underline{k}\|_2^2$$

Remarque : [illegible] solution de l'équation homogène peut s'écrire comme la superposition d'ondes planes. ∎

Au programme...

Plan :

I. Introduction

II. Aspects théoriques

a) Le Théorème de Hille-Yosida

b) Propriétés de la solution

III. Méthodes de discrétisation

a) Les θ-schémas

b) Propriétés des schémas

III.a) Les θ-schémas

Une approche classique pour discrétiser l'équation d'ondes :

$$\partial_{tt}^2 \underline{u} + A\underline{u} = \underline{f}$$

est la suivante :

- discrétiser en espace à l'aide d'une méthode EF, DF ou autre :

$$\partial_{tt}^2 \mathbb{M}\,\underline{u} + \mathbb{K}\underline{u} = \mathbb{M}\,\underline{f}$$

Exemple : Pour le problème

$$\left| \begin{array}{lr} \rho\partial_{tt}^2 u - \mathrm{div}\left(\sigma \underline{\nabla}\, u\right) = f \quad \text{dans} & \Omega \\ \sigma\partial_\nu u = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur} & \partial\Omega \end{array} \right.$$

la discrétisation EF conduit à :

$$\mathbb{M}_{ij} = \int_\Omega \rho\, \varphi_j \varphi_i \, d\Omega \qquad \text{et} \qquad \mathbb{K}_{ij} = \int_\Omega \sigma\, \underline{\nabla}\varphi_j \cdot \underline{\nabla}\varphi_i \, d\Omega$$

III.a) Les θ-schémas

Une approche classique pour discrétiser l'équation d'ondes :

$$\partial_{tt}^2 \underline{u} + A\underline{u} = \underline{f}$$

est la suivante :

- discrétiser en espace à l'aide d'une méthode EF, DF ou autre :

$$\partial_{tt}^2 M \underline{u} + K\underline{u} = M \underline{f}$$

- puis discrétiser en temps le système d'EDO, généralement avec une méthode DF ou RK, par exemple

$$M \frac{\underline{u}^{n+1} - 2\underline{u}^{n} + \underline{u}^{n-1}}{\Delta t^2} + K\underline{u}^n = M \underline{f}^n$$

III.a) Les θ-schémas

3.1 Définition

Le θ-schéma est défini comme suit

$$\mathbb{M}\,\frac{\underline{u}^{n+1} - 2\underline{u}^{n} + \underline{u}^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbb{K}\left(\theta\underline{u}^{n+1} + (1-2\theta)\underline{u}^{n} + \theta\underline{u}^{n-1}\right) = \mathbb{M}\,\underline{f}^{n}$$

Remarques :

- On notera que pour initialiser la suite de vecteur $\left(\underline{u}^n\right)_n$ il faut $\underline{u}^0$ et $\underline{u}^1$ (obtenus à partir des données initiales $\underline{u}^0$ et $\underline{v}^0$).

- De plus, pour calculer $\underline{u}^{n+1}$, on vérifie facilement que la matrice $\dfrac{\mathbb{M}}{\Delta t^2} + \theta\mathbb{K}$ est inversible, $\forall \theta \geq 0$.

III.b) Propriétés des schémas

3.1 Définition

Le θ-schéma est défini comme suit

$$\mathbb{M}\,\frac{\underline{u}^{n+1}-2\underline{u}^{n}+\underline{u}^{n-1}}{\Delta t^2} \;+\; \mathbb{K}\left(\theta\underline{u}^{n+1}+(1-2\theta)\underline{u}^{n}+\theta\underline{u}^{n-1}\right) \;=\; \mathbb{M}\,\underline{f}^{n}$$

3.2 Proposition (Identité d'énergie discrète)

On a l'identité d'énergie suivante :

$$\frac{E_\theta^{n+1/2}-E_\theta^{n-1/2}}{2\Delta t} = \left(\mathbb{M}\,\underline{f}^{n}, \frac{\underline{u}^{n+1}-\underline{u}^{n-1}}{2\Delta t}\right) \qquad \text{où}$$

$$E_\theta^{n+1/2} = \left\|\frac{\underline{u}^{n+1}-\underline{u}^{n}}{\Delta t}\right\|_{\mathbb{M}}^2 + \left\|\frac{\underline{u}^{n+1}+\underline{u}^{n}}{2}\right\|_{\mathbb{K}}^2 + \Delta t^2\left(\theta-\frac{1}{4}\right)\left\|\frac{\underline{u}^{n+1}-\underline{u}^{n}}{\Delta t}\right\|_{\mathbb{K}}^2$$

Preuve : au (vrai) tableau !

III.b) Propriétés des schémas

3.3 Corollaire

On peut alors déduire que :

- Si $\theta \geq \frac{1}{4}$, alors l'énergie est positive et le schéma est stable.
- Sinon, l'énergie est positive et le schéma est stable sous condition CFL (Courant - Friedrich - Lewy)

Remarque : La condition CFL revient à dire que la vitesse de propagation « numérique » doit être plus grande que la vitesse de propagation du problème continue. En pratique, elle contraint le pas Δt par rapport au « pas d'espace ».

III.b) Propriétés des schémas

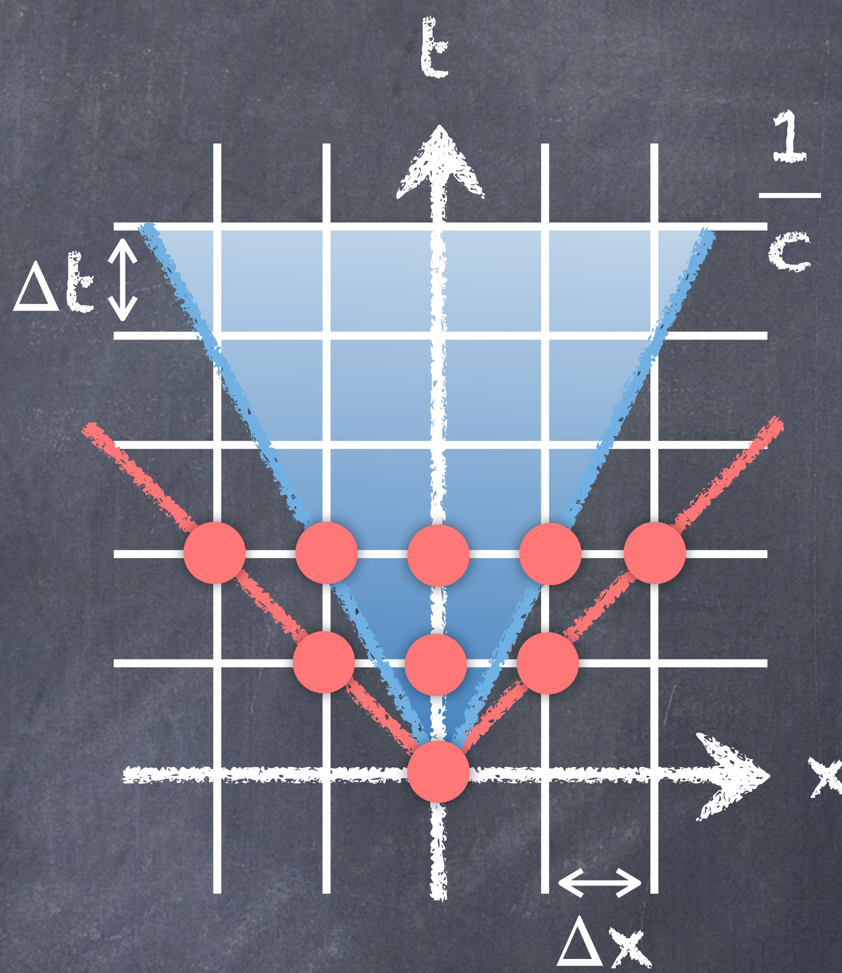
Exemple

Considérons l'équation des ondes 1D

$$\partial^2_{tt}\mathbf{u} - c^2\partial^2_{xx}\mathbf{u} = 0$$

et le schéma différences finis :

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + c^2\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$



Dans ce cas, la vitesse de propagation est c, et la vitesse numérique V_{num} doit vérifier la condition CFL :

$$\frac{1}{V_{num}} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \boxed{\frac{1}{c}} \quad \Leftrightarrow \quad c\Delta t \leq \Delta x$$

III.b) Propriétés des schémas

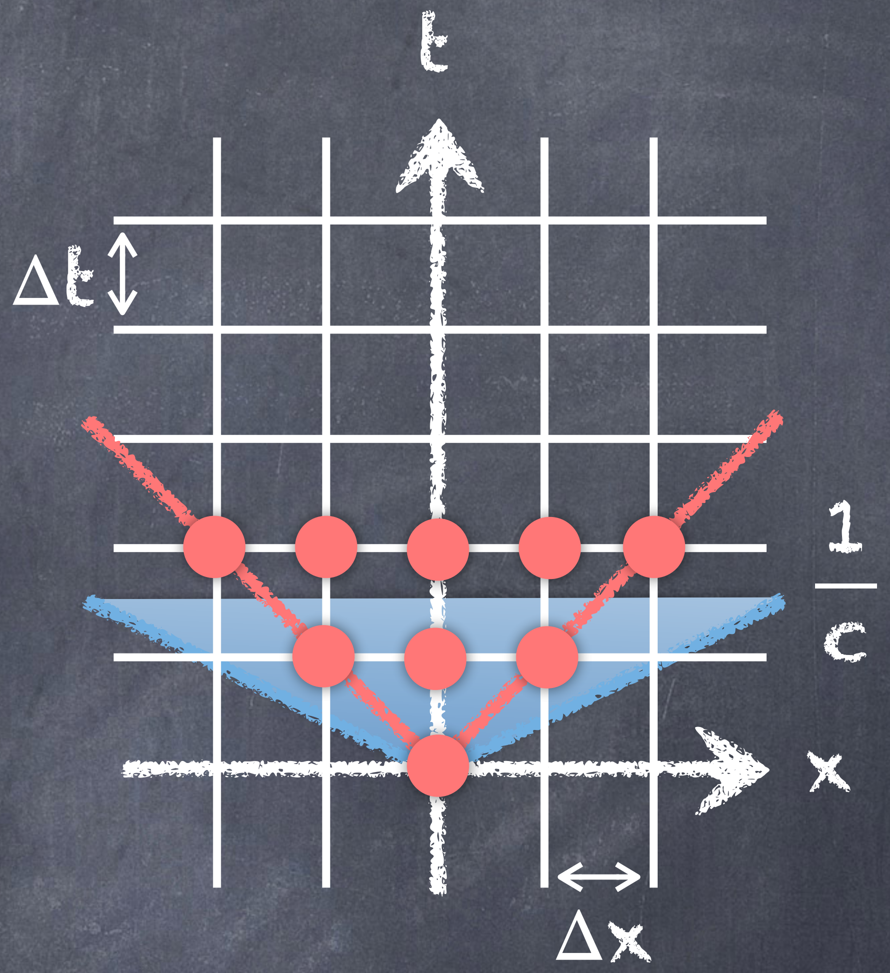
Exemple

Considérons l'équation des ondes 1D

$$\partial^2_{tt}u - c^2\partial^2_{xx}u = 0$$

et le schéma différences finis :

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + c^2\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0$$



Dans ce cas, la vitesse de propagation est c, et la vitesse numérique V_{num} doit vérifier la condition CFL :

$$\frac{1}{V_{num}} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{c} \quad \Leftrightarrow \quad c\Delta t \leq \Delta x$$

Sinon, le schéma ne peut pas converger.

III.b) Propriétés des schémas

3.4 Théorème (admis)

Si la solution est suffisamment régulière, alors le schéma discret est convergent et on a :

$$\sqrt{E_\theta^{n+1/2}} \leq \sqrt{E_\theta^{1/2}} + \Big(O(\Delta t^2) + O(h^p) \Big)\, t^n$$

où h représente la taille caractéristique du maillage et l'énergie $E_\theta^{n+1/2}$ l'énergie associée à l'erreur.

Idée de la preuve : En posant $e^n = u^n - u(t^n, \cdot)$, on déduit :

$$m\left(\frac{e^{n+1} - 2e^n + e^{n-1}}{\Delta t^2}, v_h\right) \;+\; k\Big(e_\theta^n, v_h\Big) \;=\; (\varepsilon^n, v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

où $\varepsilon^n = \partial_{tt}^2 u(t^n, \cdot) - \Big(u(t^{n+1}, \cdot) - 2u(t^n, \cdot) + u(t^{n-1}, \cdot) \Big) / \Delta t^2$

III.b) Propriétés des schémas

Idée de la preuve (suite) :

Si la solution est suffisamment régulière, on peut alors montrer que $\varepsilon^n = O(\Delta t^2)$.

Pour obtenir une estimation sur l'erreur dans

$$m\left(\frac{e^{n+1} - 2e^n + e^{n-1}}{\Delta t^2}, v_h\right) + k\left(e^n_\theta, v_h\right) = (\varepsilon^n, v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

on aimerait procéder comme précédemment pour l'énergie en prenant $v_h = (e^{n+1} - e^{n-1})/(2\Delta t)$.

Seulement c'est impossible car $e^n \notin V_h$. L'idée est alors décomposer l'erreur en deux parties :

$$e^n = u^n - \mathscr{P}_h u(t^n, \cdot) + \mathscr{P}_h u(t^n, \cdot) - u(t^n, \cdot)$$

où $\mathscr{P}_h$ est un opérateur de projection de V sur V_h.

III.b) Propriétés des schémas

Idée de la preuve (suite 2) :

En posant $\mathbf{e}^n = \underbrace{\mathbf{u}^n - \mathscr{P}_h \mathbf{u}(t^n,\cdot)}_{=\,\delta^n} + \underbrace{\mathscr{P}_h \mathbf{u}(t^n,\cdot) - \mathbf{u}(t^n,\cdot)}_{=\,\mathbf{r}^n}$

on déduit en prenant $v_h = (\delta^{n+1} - \delta^{n-1})/\Delta t$ (+proj. ortho.) :

$$E_\theta^{n+1/2}(\delta) - E_\theta^{n-1/2}(\delta) = (\varepsilon^n, \frac{\delta^{n+1} - \delta^{n-1}}{2\Delta t}) + (\frac{\mathbf{r}^{n+1} - 2\mathbf{r}^n + \mathbf{r}^{n-1}}{\Delta t^2}, \frac{\delta^{n+1} - \delta^{n-1}}{\Delta t})$$

On peut alors obtenir l'inégalité suivante (C.S. + Young) :

$$E_\theta^{n+1/2}(\delta) - E_\theta^{n-1/2}(\delta) \leq \Delta t(O(\Delta t^2) + O(h^p))\left(\sqrt{E_\theta^{n+1/2}(\delta)} + \sqrt{E_\theta^{n-1/2}(\delta)}\right)$$

d'où on obtient : $\sqrt{E_\theta^{n+1/2}(\delta)} \leq \sqrt{E_\theta^{n-1/2}(\delta)} + \Delta t\left(O(\Delta t^2) + O(h^p)\right)$

ce qui conduit au résultat annoncé.

Plan détaillé du cours 1

Plan :

I. Introduction

II. Aspects théoriques

a) Le Théorème de Hille-Yosida

b) Propriétés de la solution

III. Méthodes de discrétisation

a) Les θ-schémas

b) Propriétés des schémas

Pour aller un peu plus loin…

Le théorème de Hille-Yosida s'applique également pour des équations comme l'équation de la chaleur ou de réaction diffusion.
Pour certaines équations non linéaire, il existe également des extensions (Thm. de Crandall-Liggett).

Sur l'aspect numérique, on peut également étudier les schémas à l'aide de relation de dispersion numérique dans le cas de maillages réguliers et de milieux homogènes. Cela revient à se demander si le schéma satisfait bien la relation de dispersion continue.