

MMSN

Analyse numérique 2

Chapitre 3 :

Résolution numérique d'EDO

Cours 10-11-12-13-14

GM 3 Année 2022 - 2023

Contact : A. Tonnoir

antoine.tonnoir@insa-touen.fr

Au programme (Chapitre 3)

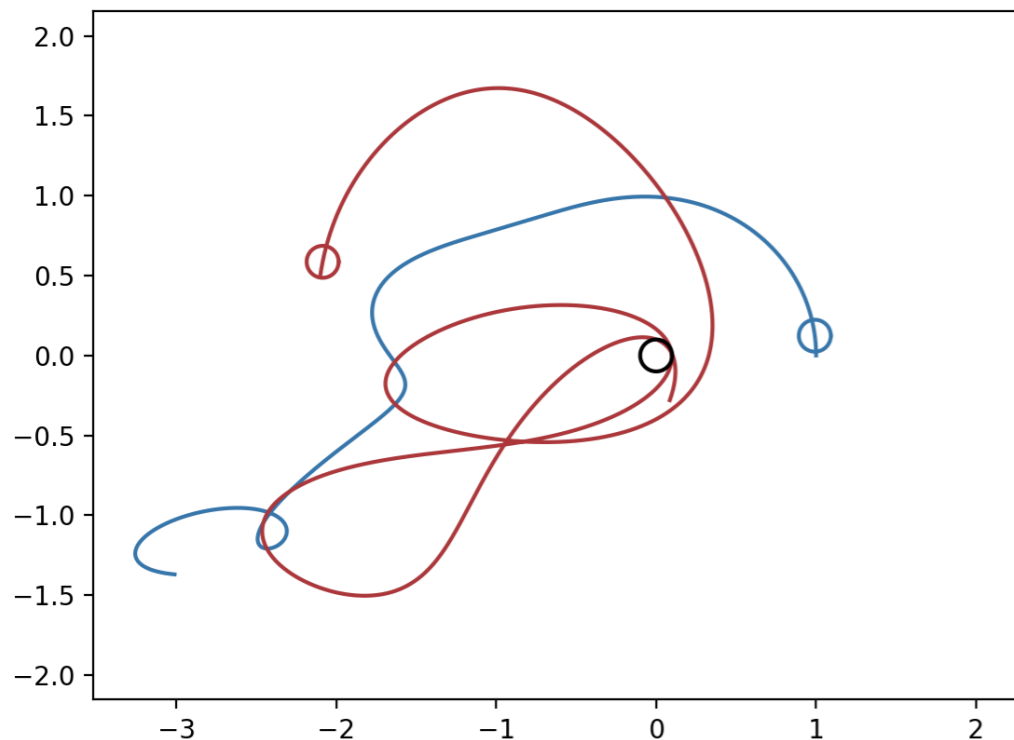
Objectif :

Étant donné $t_0 \in [a, b]$, déterminer numériquement la solution d'un système d'EDO :

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

Exemples d'application :  Mécanique (céleste)

$$m \underline{x}''(t) = \underline{F}$$




Au programme (Chapitre 3)

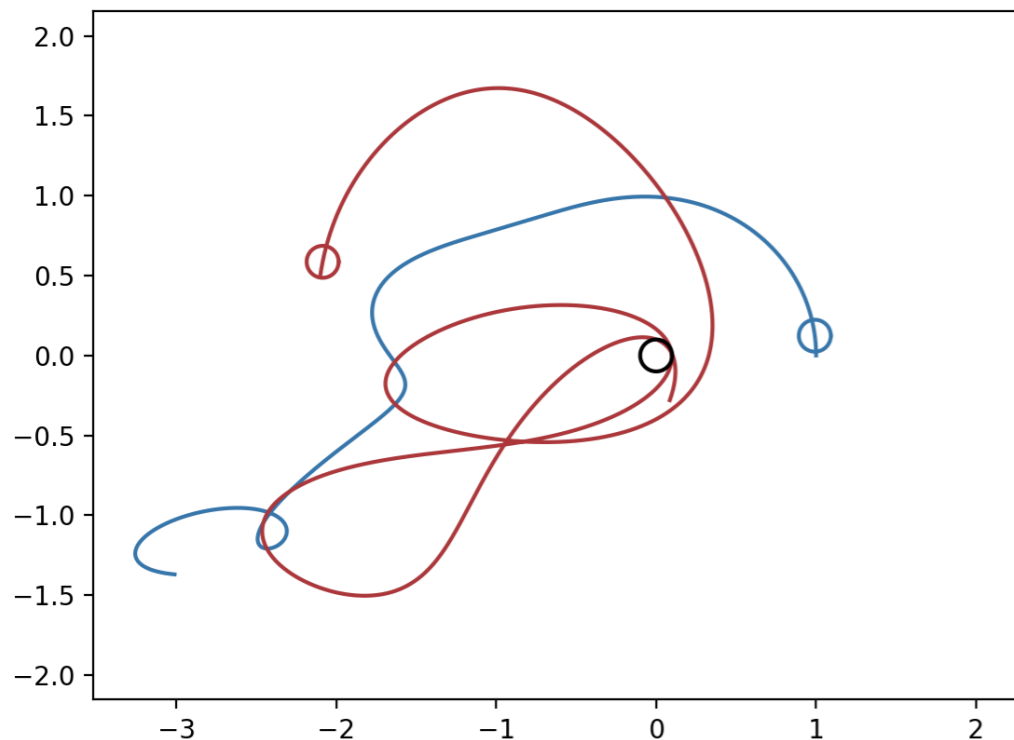
Objectif :

Étant donné $t_0 \in [a, b]$, déterminer numériquement la solution d'un système d'EDO :

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

Exemples d'application :  Mécanique (céleste)

$$m \underline{x}''(t) = \underline{F}$$



Au programme (Chapitre 3)

Objectif :

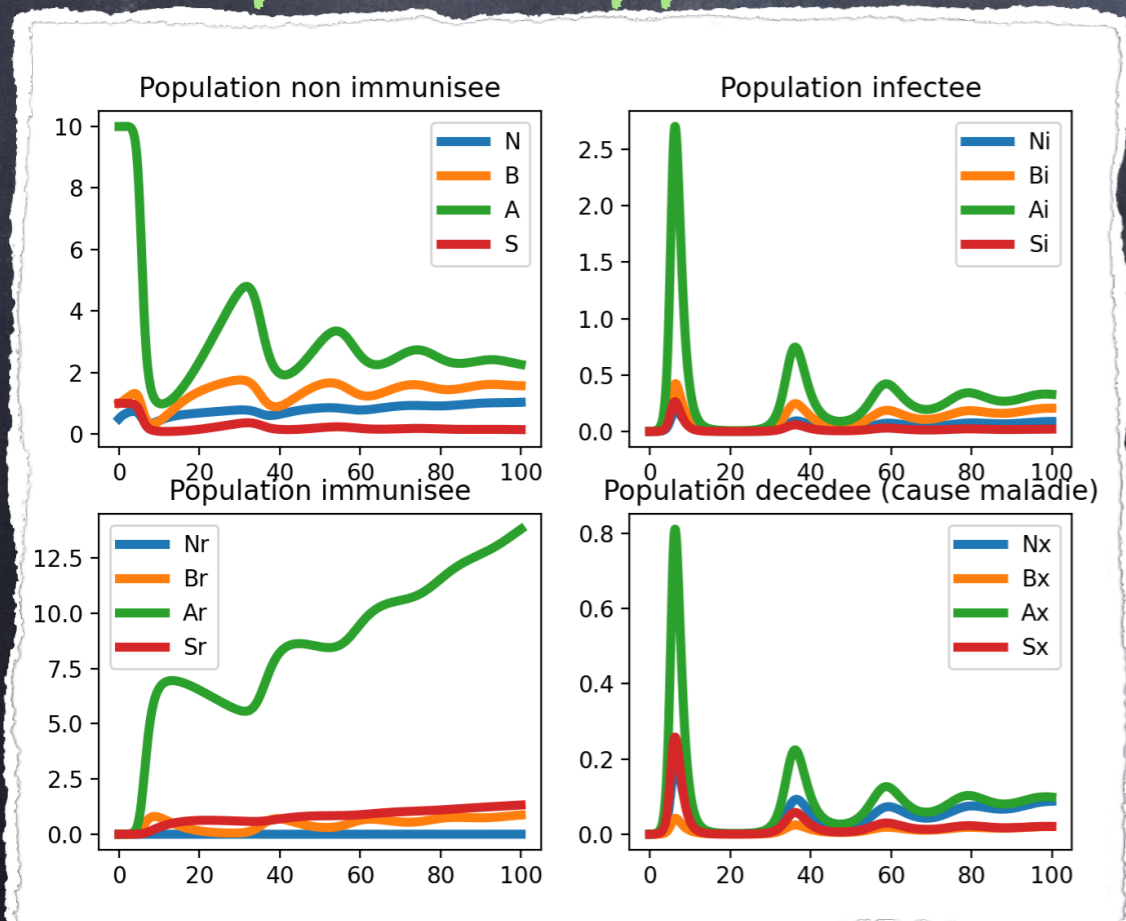
Étant donné $t_0 \in [a, b]$, déterminer numériquement la solution d'un système d'EDO :

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

Exemples d'application : Mécanique

Modèle en épidémiologie

$$\begin{bmatrix} S' \\ I \\ R' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta SI \\ \beta SI - \gamma I \\ \gamma I \end{bmatrix}$$



Au programme (Chapitre 3)

Objectif :

Étant donné $t_0 \in [a, b]$, déterminer numériquement la solution d'un système d'EDO :

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

Plan :

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

II. Les méthodes à 1-pas

III. Les méthodes multi-pas

IV. Quelques extensions

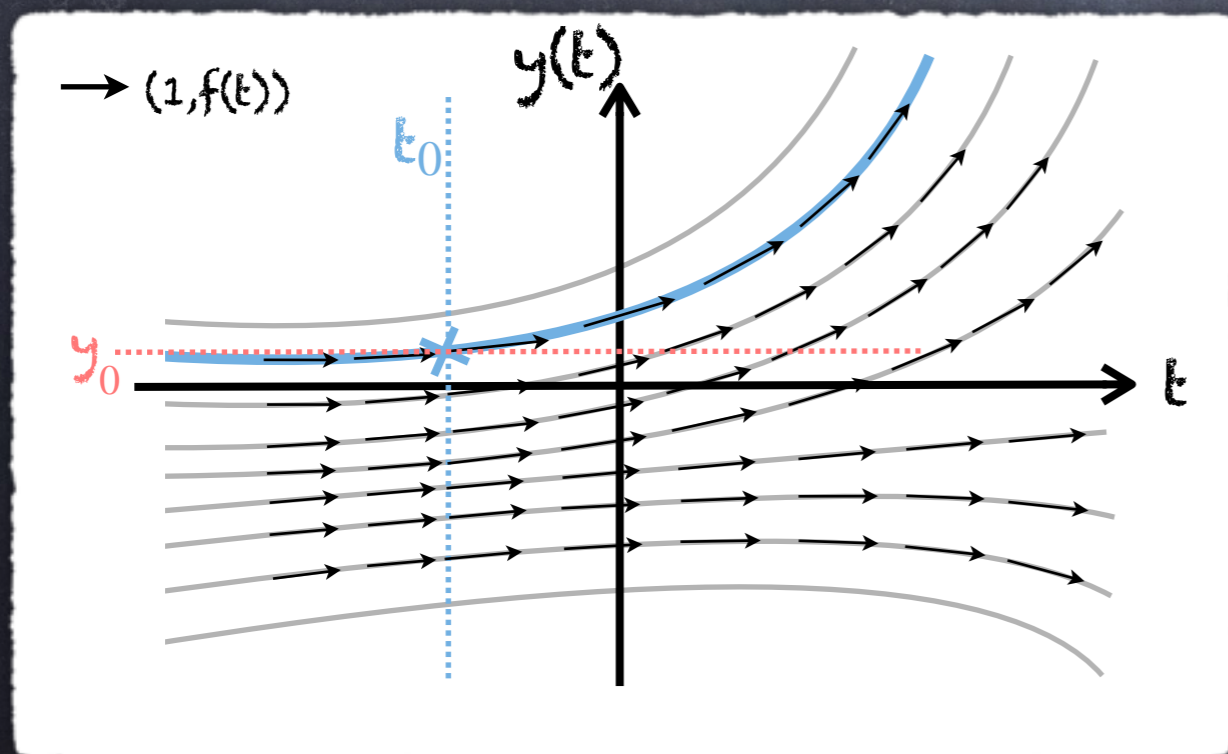
I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

1.1 Définition (pb. de Cauchy)

Étant donné $t_0 \in [a, b]$, $\underline{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, trouver $\underline{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction C^1 t.q.

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

Illustration dans le cas $n=1$:



I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

1.1 Définition (pb. de Cauchy)

Étant donné $t_0 \in [a, b]$, $\underline{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, trouver $\underline{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction C^1 t.q.

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

1.3 Définition (Fonction Lipschitz)

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est (globalement) **Lipschitzienne** par rapport à sa deuxième variable s'il existe $L > 0$ t.q. :

$$\forall t \in [a, b], \forall (\underline{y}, \underline{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \|\underline{f}(t, \underline{y}) - \underline{f}(t, \underline{z})\| \leq L \|\underline{y} - \underline{z}\|$$

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

1.3 Théorème (de Cauchy-Lipschitz)

Si f est continue et Lipschitzienne par rapport à sa 2ème variable alors le problème de Cauchy admet une unique solution.

(Rappel de la) Preuve (dans le cas $n=1$) :

Point de départ : y sol. ssi $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

Unicité : Soient y_1 et y_2 deux solutions du problème de Cauchy, alors on a :

$$\left| y_1(t) - y_2(t) \right| \leq \int_{t_0}^t \left| f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) \right| ds$$

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

1.3 Théorème (de Cauchy-Lipschitz)

Si f est continue et Lipschitzienne par rapport à sa 2ème variable alors le problème de Cauchy admet une unique solution.

(Rappel de la) Preuve (dans le cas $n=1$) :

Point de départ : y sol. ssi $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

Unicité : Soient y_1 et y_2 deux solutions du problème de Cauchy, alors on a :

$$\left| y_1(t) - y_2(t) \right| \leq L \int_{t_0}^t \left| y_1(s) - y_2(s) \right| ds$$

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Suite de la preuve :

Unicité : Soient y_1 et y_2 deux solutions du problème de Cauchy, alors on a :

$$\left| y_1(t) - y_2(t) \right| \leq L \int_{t_0}^t \left| y_1(s) - y_2(s) \right| ds$$

1.3 Lemme de Grönwall (admis)

Soient Φ et Ψ de $[t_0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives vérifiant :

$$\Phi(t) \leq K + L \int_{t_0}^t \Psi(s) \Phi(s) ds \quad \text{alors} \quad \Phi(t) \leq K e^{L \int_{t_0}^t \Psi(s) ds}$$

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Suite de la preuve :

Unicité : Soient y_1 et y_2 deux solutions du problème de Cauchy, alors on a :

$$\left| y_1(t) - y_2(t) \right| \leq L \int_{t_0}^t \left| y_1(s) - y_2(s) \right| ds$$

1.3 Lemme de Grönwall (admis)

Soient Φ et Ψ de $[t_0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives vérifiant :

$$\Phi(t) \leq K + L \int_{t_0}^t \Psi(s) \Phi(s) ds \quad \text{alors} \quad \Phi(t) \leq K e^{L \int_{t_0}^t \Psi(s) ds}$$

$$\Rightarrow \left| y_1(t) - y_2(t) \right| \leq 0 \Rightarrow y_1 = y_2$$

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Suite de la preuve :

Existence : y sol. ssi $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une équation de point fixe

$$\mathcal{L}y = y$$

où l'opérateur $\mathcal{L} : B(a, b) = (C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow B(a, b)$.

Remarque : On rappelle que B est un espace de Banach.

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Suite de la preuve :

Existence : y sol. ssi $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une équation de point fixe

$$Ly = y$$

où l'opérateur $L : B(a, b) = (C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow B(a, b)$.

$$\text{Or, on a : } \|Ly_1 - Ly_2\|_{L^\infty(a, b)} \leq \sup_{t \in [a, b]} \int_{t_0}^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds$$

$$\leq \sup_{s \in [a, b]} L \int_{t_0}^t |y_1(s) - y_2(s)| ds$$

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Suite de la preuve :

Existence : y sol. ssi $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une équation de point fixe

$$Ly = y$$

où l'opérateur $L : B(a, b) = (C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow B(a, b)$.

$$\text{Or, on a : } \|Ly_1 - Ly_2\|_{L^\infty(a, b)} \leq \sup_{t \in [a, b]} \int_{t_0}^t \left| f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) \right| ds$$

$$\leq L(b - a) \|y_1 - y_2\|_{L^\infty(a, b)}$$

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Suite de la preuve :

Existence : y sol. ssi $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une équation de point fixe

$$Ly = y$$

où l'opérateur $L : B(a, b) = (C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow B(a, b)$.

Or, on a : $\|Ly_1 - Ly_2\|_{L^\infty(a, b)} \leq L(b-a) \|y_1 - y_2\|_{L^\infty(a, b)}$

Si $L(b-a) < 1$, on a alors une contraction, et on en déduit qu'il existe une unique solution en appliquant le Thm. de point fixe.

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

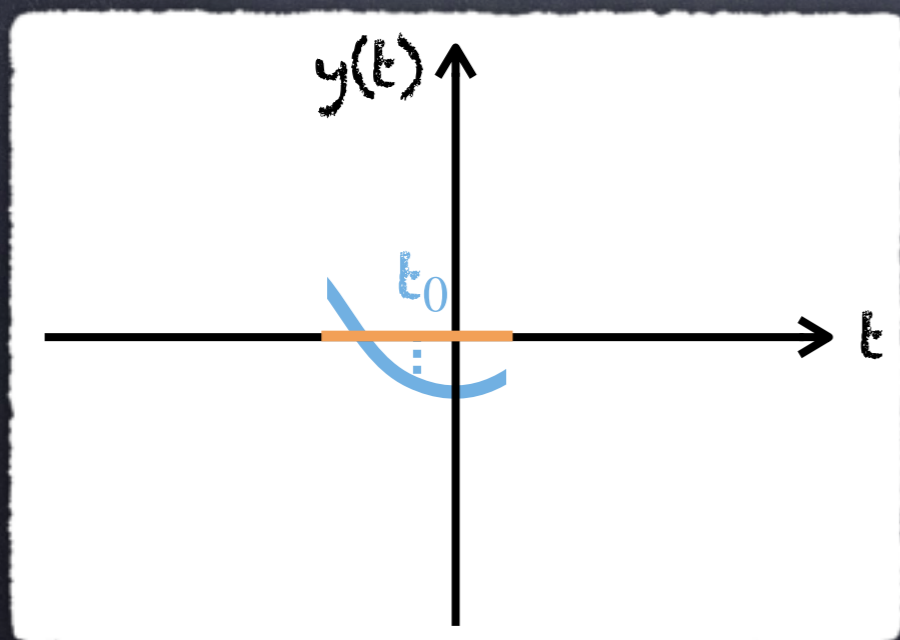
Suite de la preuve :

Existence : y sol. ssi $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une **équation de point fixe** $\mathcal{L}y = y$ où l'opérateur

$\mathcal{L} : B(a, b) = (C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow B(a, b)$.

Si $L(b-a) > 1$, l'idée est alors d'appliquer la même méthode sur un intervalle $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ avec $2\varepsilon L < 1$.



I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

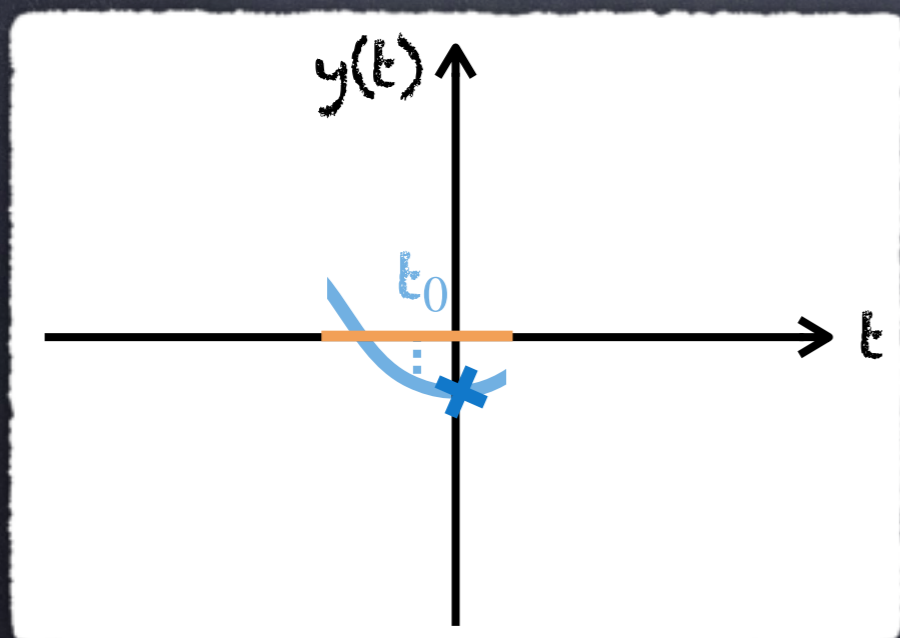
Suite de la preuve :

Existence : y sol. ssi $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une **équation de point fixe** $\mathcal{L}y = y$ où l'opérateur

$\mathcal{L} : B(a, b) = (C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow B(a, b)$.

Si $L(b-a) > 1$, l'idée est alors d'appliquer la même méthode sur un intervalle $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ avec $2\varepsilon L < 1$.



On applique le même résultat sur $[t_0, t_0 + 2\varepsilon]$ avec comme **condition de Cauchy** $y^1(t_0 + \frac{\varepsilon}{2}) = y(t_0 + \frac{\varepsilon}{2})$ pour construire y_1 .

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

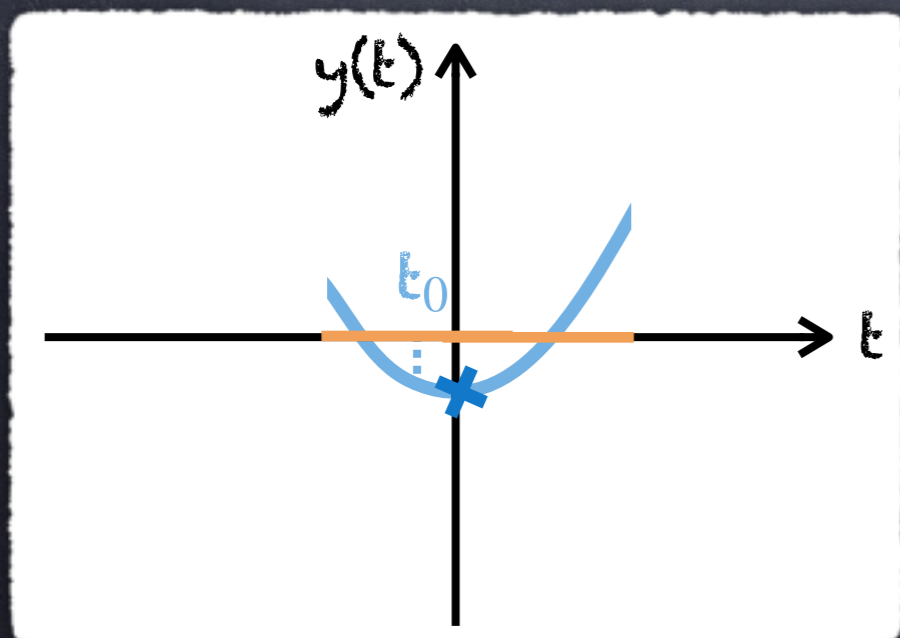
Suite de la preuve :

Existence : y sol. ssi $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une **équation de point fixe** $\mathcal{L}y = y$ où l'opérateur

$\mathcal{L} : B(a, b) = (C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow B(a, b)$.

Si $L(b-a) > 1$, l'idée est alors d'appliquer la même méthode sur un intervalle $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ avec $2\varepsilon L < 1$.



On applique le même résultat sur $[t_0, t_0 + 2\varepsilon]$ avec comme **condition de Cauchy** $y^1(t_0 + \frac{\varepsilon}{2}) = y(t_0 + \frac{\varepsilon}{2})$ pour construire y_1 .

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

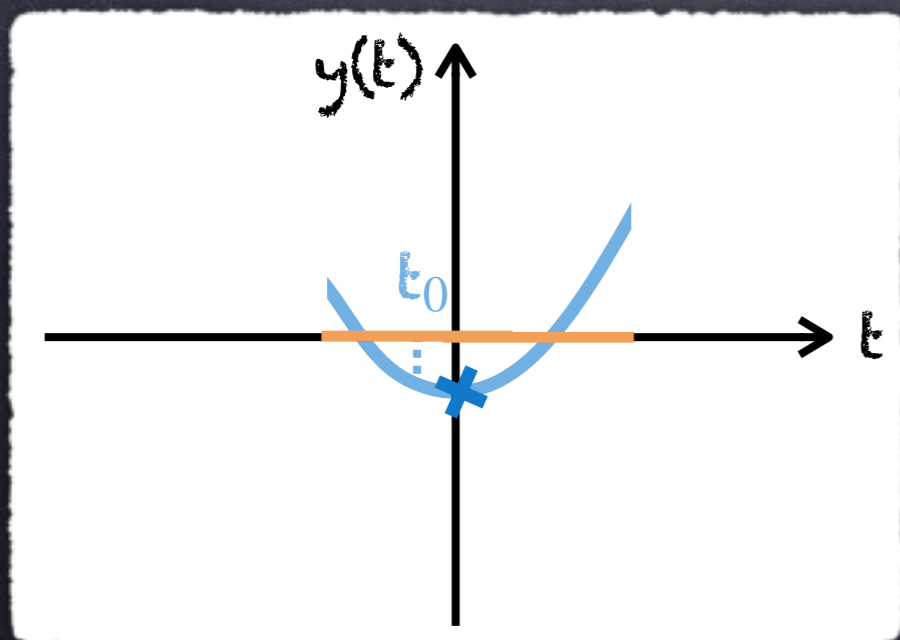
Suite de la preuve :

Existence : y sol. ssi $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une **équation de point fixe** $\mathcal{L}y = y$ où l'opérateur

$\mathcal{L} : B(a, b) = (C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow B(a, b)$.

Si $L(b-a) > 1$, l'idée est alors d'appliquer la même méthode sur un intervalle $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ avec $2\varepsilon L < 1$.



I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

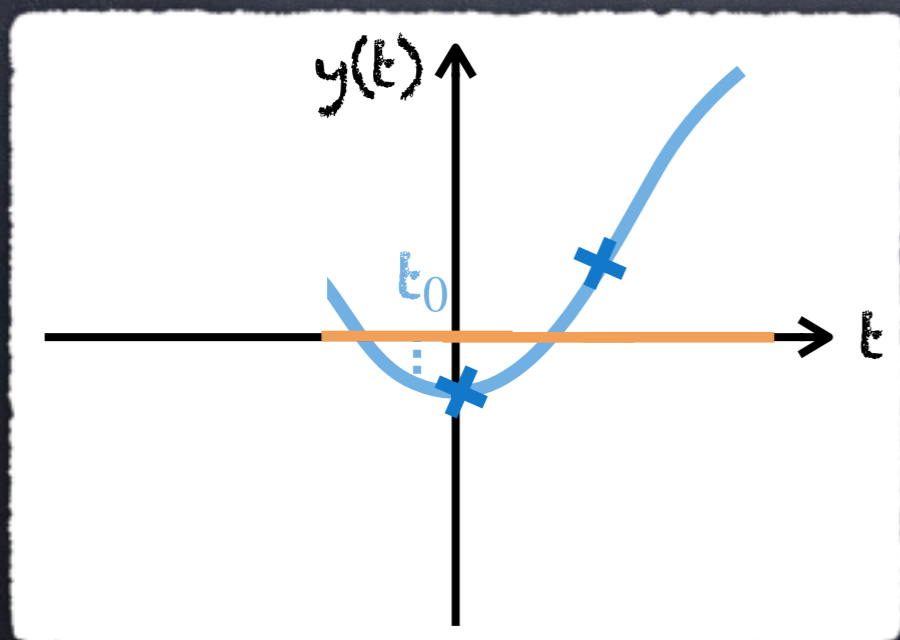
Suite de la preuve :

Existence : y sol. ssi $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une **équation de point fixe** $\mathcal{L}y = y$ où l'opérateur

$\mathcal{L} : B(a, b) = (C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow B(a, b)$.

Si $L(b-a) > 1$, l'idée est alors d'appliquer la même méthode sur un intervalle $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ avec $2\varepsilon L < 1$.



Et ainsi de suite : $y^2(t_0 + \frac{3\varepsilon}{2}) = y^1(t_0 + \frac{3\varepsilon}{2})$

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

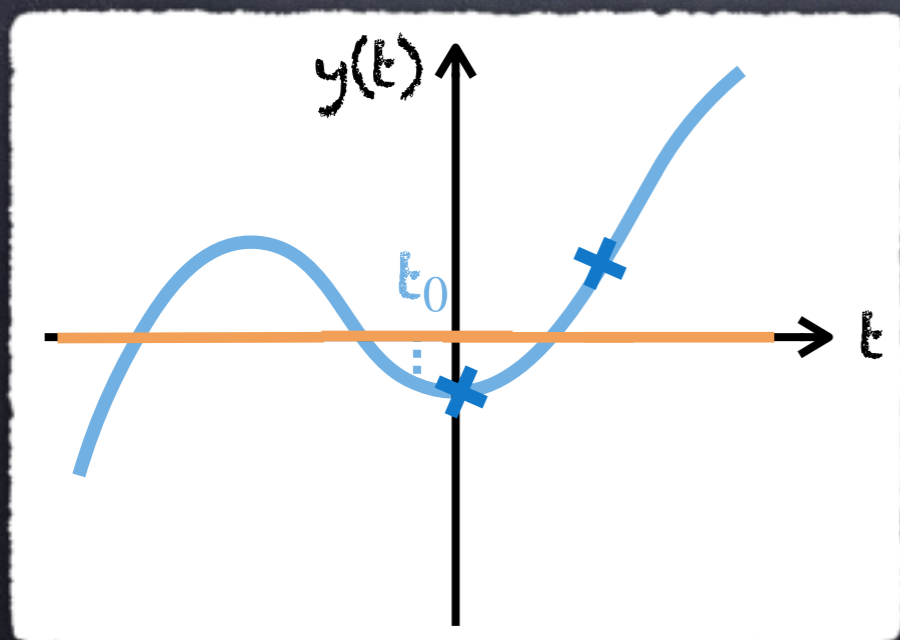
Suite de la preuve :

Existence : y sol. ssi $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une **équation de point fixe** $\mathcal{L}y = y$ où l'opérateur

$\mathcal{L} : B(a, b) = (C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow B(a, b)$.

Si $L(b-a) > 1$, l'idée est alors d'appliquer la même méthode sur un intervalle $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ avec $2\varepsilon L < 1$.



Et ainsi de suite : $y^2(t_0 + \frac{3\varepsilon}{2}) = y^1(t_0 + \frac{3\varepsilon}{2})$

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

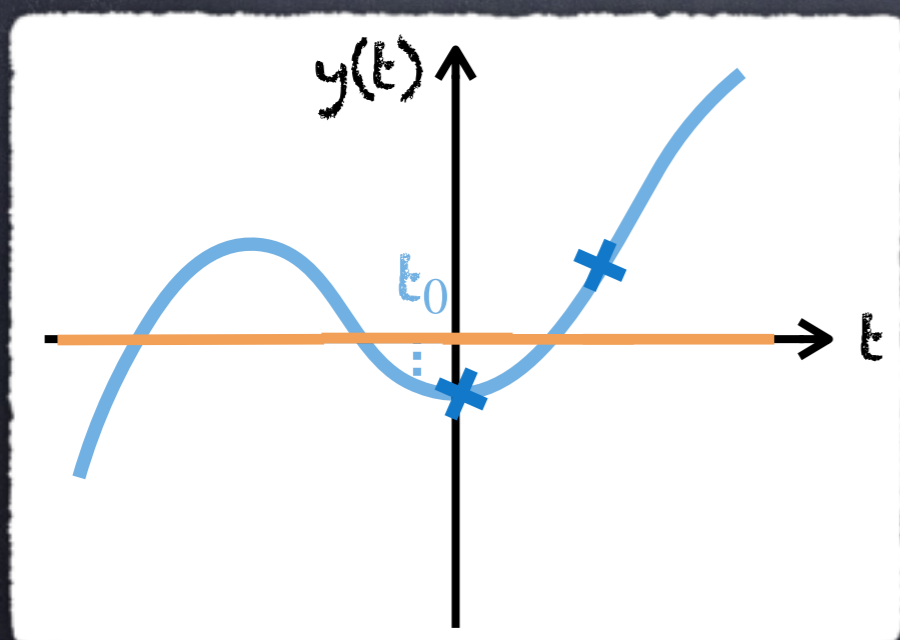
Suite de la preuve :

Existence : y sol. ssi $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une **équation de point fixe** $\mathcal{L}y = y$ où l'opérateur

$\mathcal{L} : B(a, b) = (C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow B(a, b)$.

Si $L(b-a) > 1$, l'idée est alors d'appliquer la même méthode sur un intervalle $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ avec $2\varepsilon L < 1$.



Et ainsi de suite : $y^2(t_0 + \frac{3\varepsilon}{2}) = y^1(t_0 + \frac{3\varepsilon}{2})$

Remarque : La solution étant unique sur $[a, b]$, on déduit aisément que $y^1 = y^2 = \dots = y$.

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

1.3 Théorème (de Cauchy-Lipschitz)

Si f est continue et Lipschitzienne par rapport à sa 2ème variable alors le problème de Cauchy admet une unique solution.

Remarques :

- ① En appliquant la démarche de prolongement précédente, on peut construire une solution sur \mathbb{R}
- ② Si f n'est que **localement Lip.** (i.e. la constante L dépend de y_0) alors il existe **une unique solution locale** (maximale).

Au programme (Chapitre 3)

Objectif :

Étant donné $t_0 \in [a, b]$, déterminer numériquement la solution d'un système d'EDO :

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

Plan :

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

II. Les méthodes à 1-pas

a) Définition et analyse

b) Les méthodes de Runge Kutta

III. Les méthodes multi-pas

IV. Quelques extensions

II. a) Définition et analyse

Dans la suite de ce chapitre, on considèrera que f est Lipschitzienne, ce qui nous garantit qu'il existe une unique solution globale.

Pour rappel, \underline{y} est solution ssi : $\underline{y}(t) = \underline{y}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$

Considérons la discrétisation $t_i = t_0 + i\Delta t$, t.q. $t_N = T$, alors

$$\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

II. a) Définition et analyse

Dans la suite de ce chapitre, on considèrera que f est Lipschitzienne, ce qui nous garantit qu'il existe une unique solution globale.

Pour rappel, \underline{y} est solution ssi : $\underline{y}(t) = \underline{y}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$

Considérons la discrétisation $t_i = t_0 + i\Delta t$, t.q. $t_N = T$, alors

$$\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

Idée : Appliquer une formule de quadrature pour calculer \underline{y}_i un approximation de $\underline{y}(t_i)$.

II. a) Définition et analyse

Dans la suite de ce chapitre, on considèrera que f est Lipschitzienne, ce qui nous garantit qu'il existe une unique solution globale.

Pour rappel, \underline{y} est solution ssi : $\underline{y}(t) = \underline{y}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$

Considérons la discrétisation $t_i = t_0 + i\Delta t$, t.q. $t_N = T$, alors

$$\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

Idée : Appliquer une formule de quadrature pour calculer \underline{y}_i un approximation de $\underline{y}(t_i)$.

Remarque :

Avec une méthode numérique, on ne détermine pas (une approximation de) la solution pour tout instant t .

II. a) Définition et analyse

Dans la suite de ce chapitre, on considèrera que f est Lipschitzienne, ce qui nous garantit qu'il existe une unique solution globale.

Pour rappel, \underline{y} est solution ssi : $\underline{y}(t) = \underline{y}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$

Considérons la discrétisation $t_i = t_0 + i\Delta t$, t.q. $t_N = T$, alors

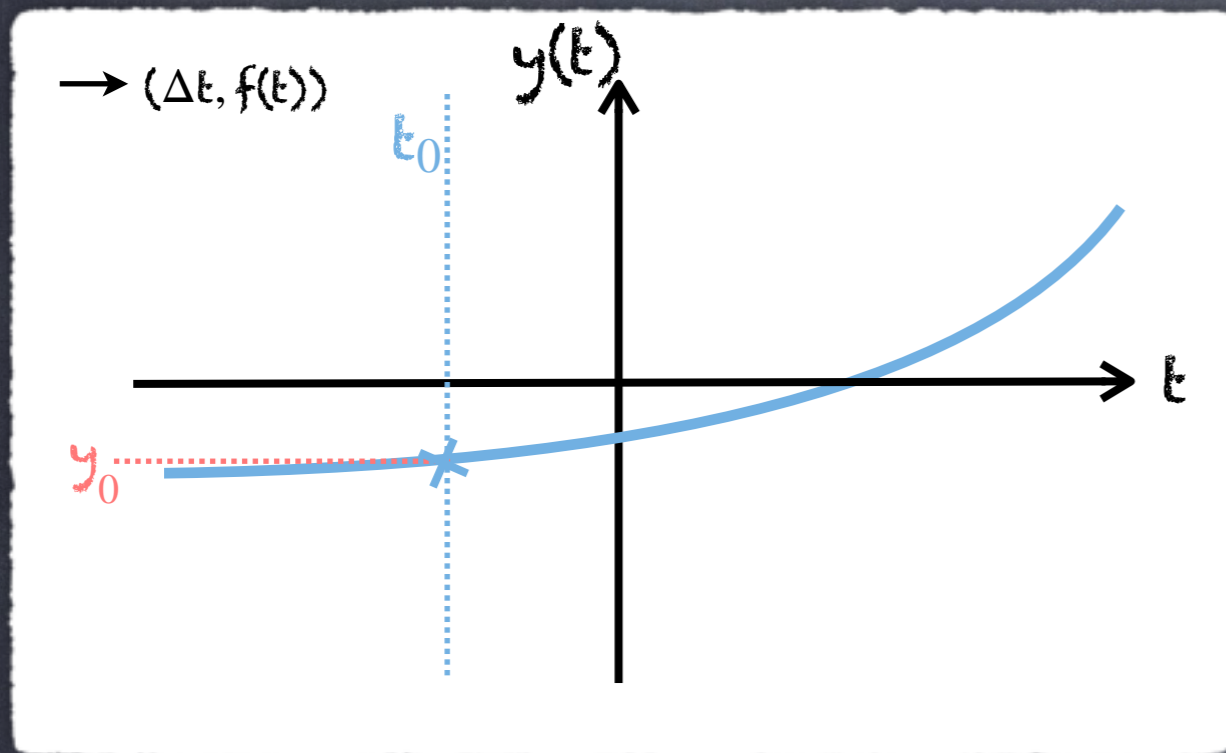
$$\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

Idée : Appliquer une formule de quadrature pour calculer \underline{y}_{i+1} un approximation de $\underline{y}(t_{i+1})$.

- ① Méthode à 1-pas : Calculer \underline{y}_{i+1} à partir de \underline{y}_i .
- ② Méthode multi-pas : Calculer \underline{y}_{i+1} avec $\underline{y}_i, \underline{y}_{i-1}, \dots, \underline{y}_{i-r}$.

II. a) Définition et analyse

Un premier exemple : la méthode d'Euler



Approcher l'intégrale

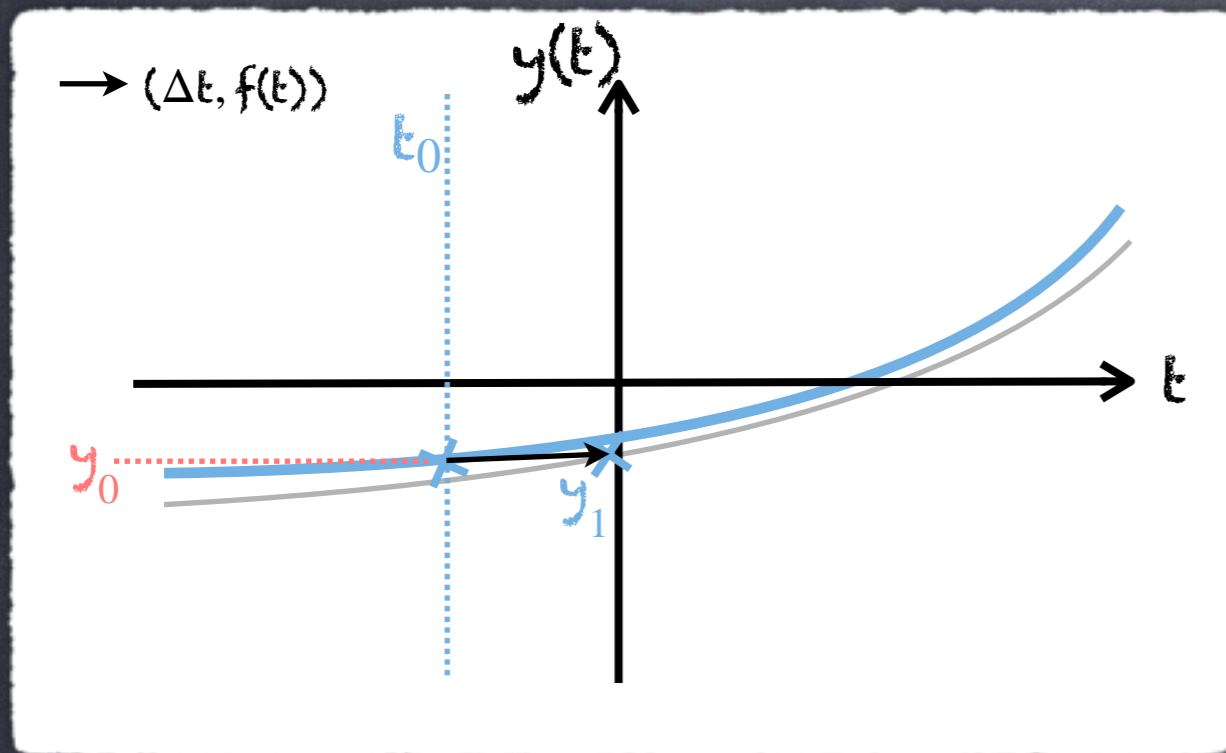
$$\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

par la formule :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t \underline{f}(t_i, \underline{y}_{-i})$$

II. a) Définition et analyse

Un premier exemple : la méthode d'Euler



Approcher l'intégrale

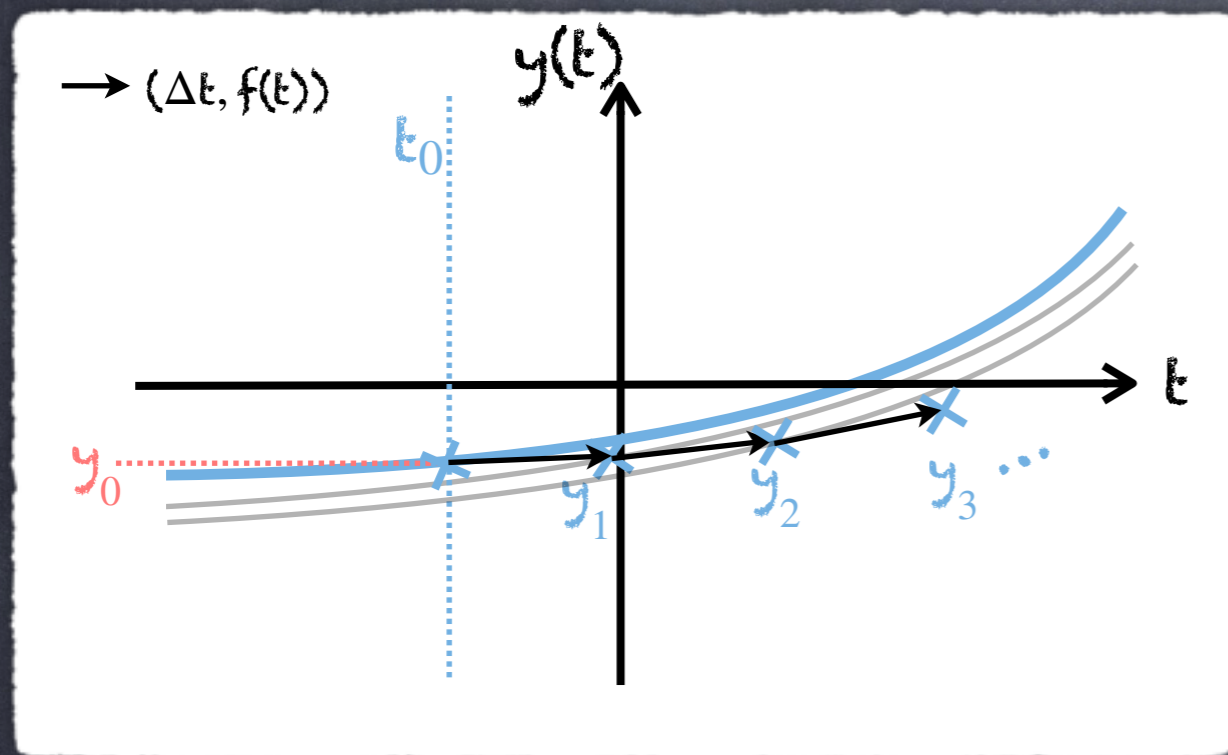
$$\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

par la formule :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t \underline{f}(t_i, \underline{y}_{-i})$$

II. a) Définition et analyse

Un premier exemple : La méthode d'Euler



Approcher l'intégrale

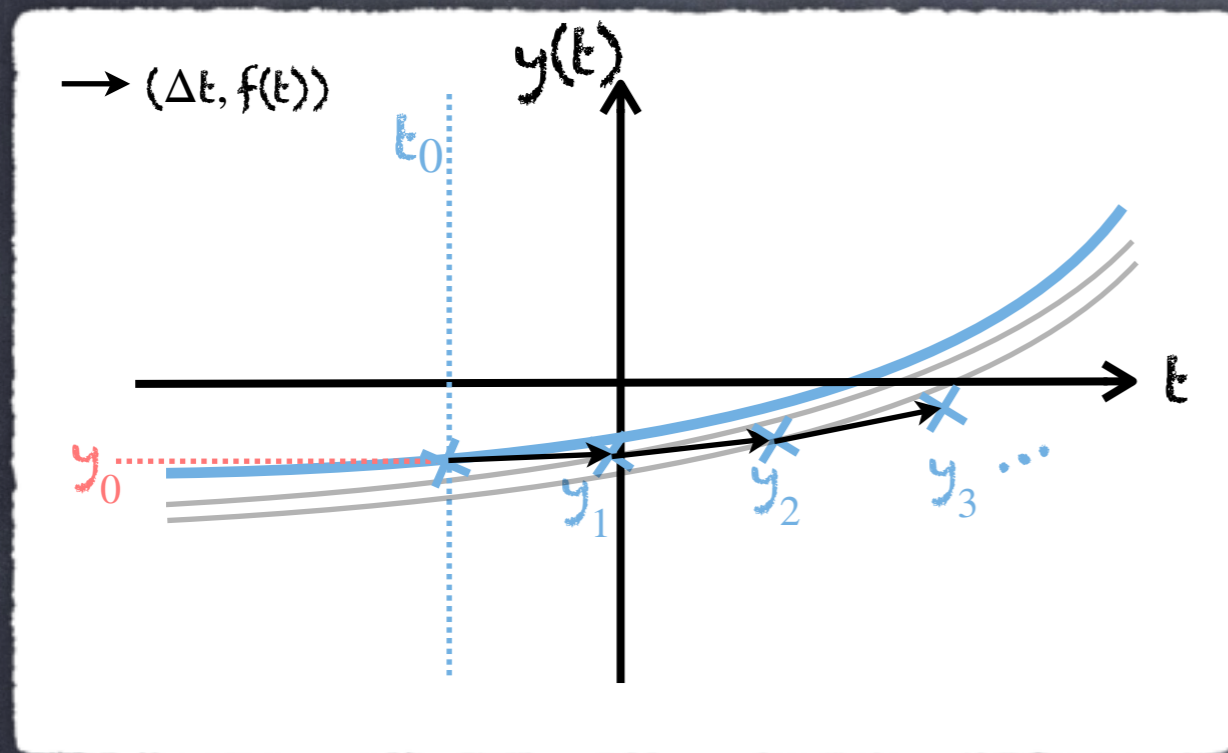
$$\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

par la formule :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t \underline{f}(t_i, \underline{y}_{-i})$$

II. a) Définition et analyse

Un premier exemple : La méthode d'Euler



Approcher l'intégrale

$$\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

par la formule :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t \underline{f}(t_i, \underline{y}_{-i})$$

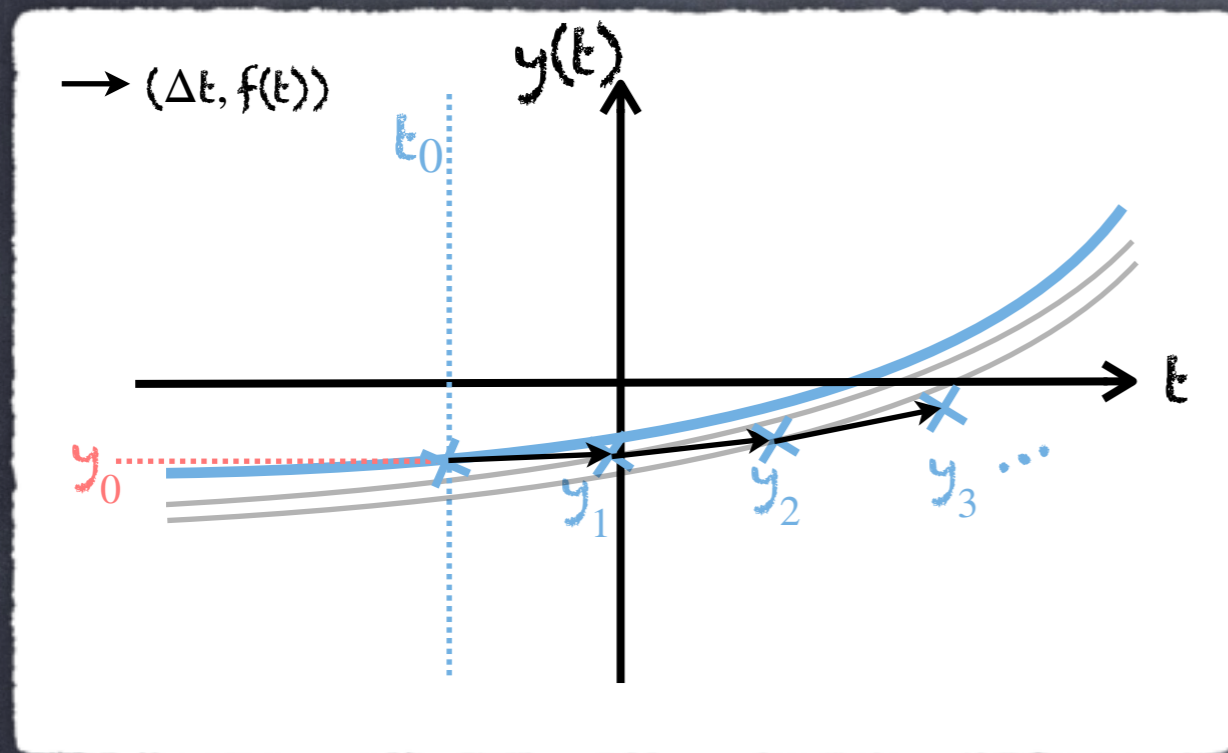
Les questions naturelles qui se posent alors sont :

① Si $\Delta t \rightarrow 0$, a t'on $y_i \rightarrow y(t_i)$? (Convergence)

② Peut-on concevoir des schémas plus précis ?

II. a) Définition et analyse

Un premier exemple : La méthode d'Euler



Approcher l'intégrale

$$\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

par la formule :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t \underline{f}(t_i, \underline{y}_{-i})$$

Remarque :

En choisissant la formule de quadrature

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t \underline{f}(t_{i+1}, \underline{y}_{-i+1})$$

on déduit le schéma d'Euler implicite.

II. a) Définition et analyse

2.1 Définition (méthode à 1-pas)

Soit $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On définit une méthode à 1 pas par la relation suivante :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \underline{\Phi}(t_i, \underline{y}_{-i}, \Delta t_i)$$

II. a) Définition et analyse

2.1 Définition (méthode à 1-pas)

Soit $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On définit une méthode à 1 pas par la relation suivante :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \underline{\Phi}(t_i, \underline{y}_{-i}, \Delta t_i)$$

Remarques :

- La méthode d'Euler correspond à $\underline{\Phi}(t, \underline{y}, \Delta t) = \underline{f}(t, \underline{y})$.

II. a) Définition et analyse

2.1 Définition (méthode à 1-pas)

Soit $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On définit une méthode à 1 pas par la relation suivante :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \underline{\Phi}(t_i, \underline{y}_{-i}, \Delta t_i)$$

Remarques :

- ① La méthode d'Euler correspond à $\underline{\Phi}(t, \underline{y}, \Delta t) = \underline{f}(t, \underline{y})$.
- ② Le pas de discrétisation Δt_i peut a priori varier d'une itération à l'autre

II. a) Définition et analyse

2.1 Définition (méthode à 1-pas)

Soit $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On définit une méthode à 1 pas par la relation suivante :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \underline{\Phi}(t_i, \underline{y}_{-i}, \Delta t_i)$$

Remarques :

- ① La méthode d'Euler correspond à $\underline{\Phi}(t, \underline{y}, \Delta t) = \underline{f}(t, \underline{y})$.
- ② Le pas de discrétisation Δt_i peut a priori varier d'une itération à l'autre
- ③ Le choix de la fonction $\underline{\Phi}$ est déterminant dans la qualité de la méthode numérique.

II. a) Définition et analyse

2.1 Définition (méthode à 1-pas)

Soit $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On définit une méthode à 1 pas par la relation suivante :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \underline{\Phi}(t_i, \underline{y}_{-i}, \Delta t_i)$$

2.2 Définition (consistance)

Une méthode à 1-pas est dite **consistante** ssi l'erreur

$$\underline{\varepsilon}_i = \underline{y}(t_{i+1}) - \underline{y}(t_i) - \Delta t_i \underline{\Phi}(t_i, \underline{y}(t_i), \Delta t_i)$$

vérifie $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \|\underline{\varepsilon}_i\| = 0$, où \underline{y} est la solution du pb de

Cauchy.

Remarque : On rappelle que la solution approchée $\underline{y}_{-i} \neq \underline{y}(t_i)$.

II. a) Définition et analyse

2.3 Définition (stabilité)

Soient $\tilde{\underline{\varepsilon}}_i$ une suite de perturbation et la suite \underline{z}_i définie par :

$$\underline{z}_{i+1} = \underline{z}_i + \Delta t_i \underline{\Phi}(t_i, \underline{z}_i, \Delta t_i) + \tilde{\underline{\varepsilon}}_i$$

La méthode à 1-pas est dite **stable** ssi $\exists M > 0$ t.q.

$$\max_{0 \leq i \leq N} \|\underline{z}_i - \underline{y}_{-i}\| \leq M \left(\|\underline{z}_0 - \underline{y}_{-0}\| + \sum_{i=0}^{N-1} \|\tilde{\underline{\varepsilon}}_i\| \right)$$

II. a) Définition et analyse

2.4 Définition (convergence)

Une méthode est dite **convergente** ssi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq N} \|\underline{y}(t_i) - \underline{y}_i\| = 0 \quad \text{où} \quad \Delta t = \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta t_i$$

II. a) Définition et analyse

2.4 Définition (convergence)

Une méthode est dite **convergente** ssi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq N} \| \underset{-}{y}(t_i) - \underset{-}{y}_i \| = 0 \quad \text{où} \quad \Delta t = \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta t_i$$

2.5 Théorème

Si la méthode à 1-pas est stable et consistante, alors elle est convergente.

Preuve : au (vrai) tableau !

II. a) Définition et analyse

2.4 Définition (convergence)

Une méthode est dite **convergente** ssi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq N} \| \underline{y}(t_i) - \underline{y}_i \| = 0 \quad \text{où} \quad \Delta t = \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta t_i$$

2.5 Théorème

Si la méthode à 1-pas est stable et consistante, alors elle est convergente.

Remarque :

Ce résultat est important car il nous donne la démarche à suivre. Pour montrer la convergence, on montrera que la méthode est consistante et stable.

II. a) Définition et analyse

2.4 Définition (convergence)

Une méthode est dite **convergente** ssi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq N} \| \underline{y}(t_i) - \underline{y}_i \| = 0 \quad \text{où} \quad \Delta t = \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta t_i$$

2.5 Théorème

Si la méthode à 1-pas est stable et consistante, alors elle est convergente.

Remarque 2 :

Notons également que SANS connaître la solution exacte, on pourra justifier que la solution approchée est proche de la solution exacte grâce à la notion de convergence.

II. a) Définition et analyse

Voyons maintenant des théorèmes pratiques pour prouver la consistance et la stabilité d'une méthode à 1-pas.

2.6 Proposition

Une méthode est consistante ssi $\underline{\Phi}(t, y(t), h) |_{h=0} = \underline{f}(t, y(t))$

Preuve : au (vrai) tableau ! □

II. a) Définition et analyse

Voyons maintenant des théorèmes pratiques pour prouver la consistance et la stabilité d'une méthode à 1-pas.

2.6 Proposition

Une méthode est consistante ssi $\underline{\Phi}(t, y(t), h) |_{h=0} = \underline{f}(t, y(t))$

2.7 Proposition

Si la fonction $\underline{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est Lipschitzienne par rapport à sa 2ème variable, alors la méthode est stable.

Preuve : au (vrai) tableau !



II. a) Définition et analyse

2.8 Définition (ordre)

Une méthode à 1-pas est d'ordre p ssi il existe une constante K indépendante de Δt t.q. :

$$\sum_{i=0}^{N-1} \|\underline{\varepsilon}_i\| \leq K \Delta t^p \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{N-1} \|\underline{\varepsilon}_i\| = \mathcal{O}(\Delta t^p)$$

II. a) Définition et analyse

2.8 Définition (ordre)

Une méthode à 1-pas est d'ordre p ssi il existe une constante K indépendante de Δt t.q. :

$$\sum_{i=0}^{N-1} \|\underline{\varepsilon}_i\| \leq K \Delta t^p \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{N-1} \|\underline{\varepsilon}_i\| = \mathcal{O}(\Delta t^p)$$

Remarque :

Une méthode d'ordre 1 au moins est consistante.

II. a) Définition et analyse

2.8 Définition (ordre)

Une méthode à 1-pas est d'ordre p ssi il existe une constante K indépendante de Δt t.q. :

$$\sum_{i=0}^{N-1} \|\underline{\varepsilon}_i\| \leq K \Delta t^p \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{N-1} \|\underline{\varepsilon}_i\| = \mathcal{O}(\Delta t^p)$$

2.9 Corollaire (direct du Thm. 2.5)

Si une méthode est stable et d'ordre p , alors

$$\max_{0 \leq i \leq N} \|\underline{y}(t_i) - \underline{y}_i\| = \mathcal{O}(\Delta t^p)$$

II. a) Définition et analyse

2.10 Théorème (ordre)

Si \underline{f} est de classe C^p par rapport à ses 2 variables, et $\underline{\Phi}$ de classe C^p par rapport à sa dernière variable, alors la méthode est d'ordre p ssi :

$$\frac{1}{j+1} \frac{d^j}{dt^j} \underline{f}(t, \underline{y}(t)) = \frac{\partial^j}{\partial \Delta t^j} \underline{\Phi}(t, \underline{y}(t), \Delta t) \Big|_{\Delta t=0} \quad \forall j \in \{0, \dots, p-1\}$$

Preuve : au (vrai) tableau ! □

II. a) Définition et analyse

Retour sur la méthode d'Euler

$$\text{Schéma d'Euler : } y_{-i+1} = y_{-i} + \Delta t f(t_{-i}, y_{-i})$$

La méthode est convergente et d'ordre 1
(détails au (vrai) tableau)

II. a) Définition et analyse

Retour sur la méthode d'Euler

$$\text{Schéma d'Euler : } y_{-i+1} = y_{-i} + \Delta t f(t_{-i}, y_{-i})$$

La méthode est convergente et d'ordre 1
(détails au (vrai) tableau)

Exemple :

Appliquons ce schéma au pb :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), & t \in [0, T] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

pour lequel la sol. exacte est
connu : $y(t) = e^t$.

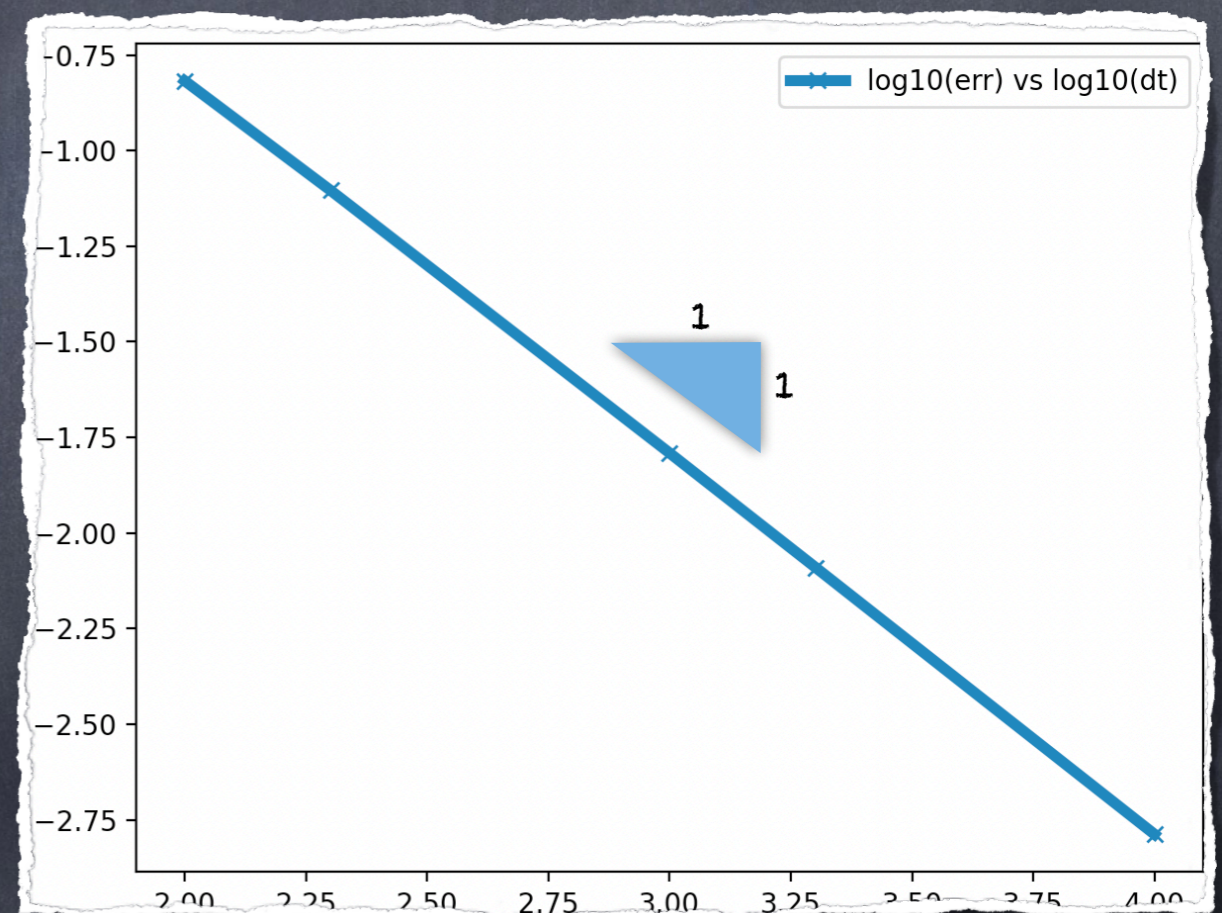


Illustration ordre
convergence

II. a) Définition et analyse

Retour sur la méthode d'Euler

$$\text{Schéma d'Euler : } y_{-i+1} = y_{-i} + \Delta t f(t_{-i}, y_{-i})$$

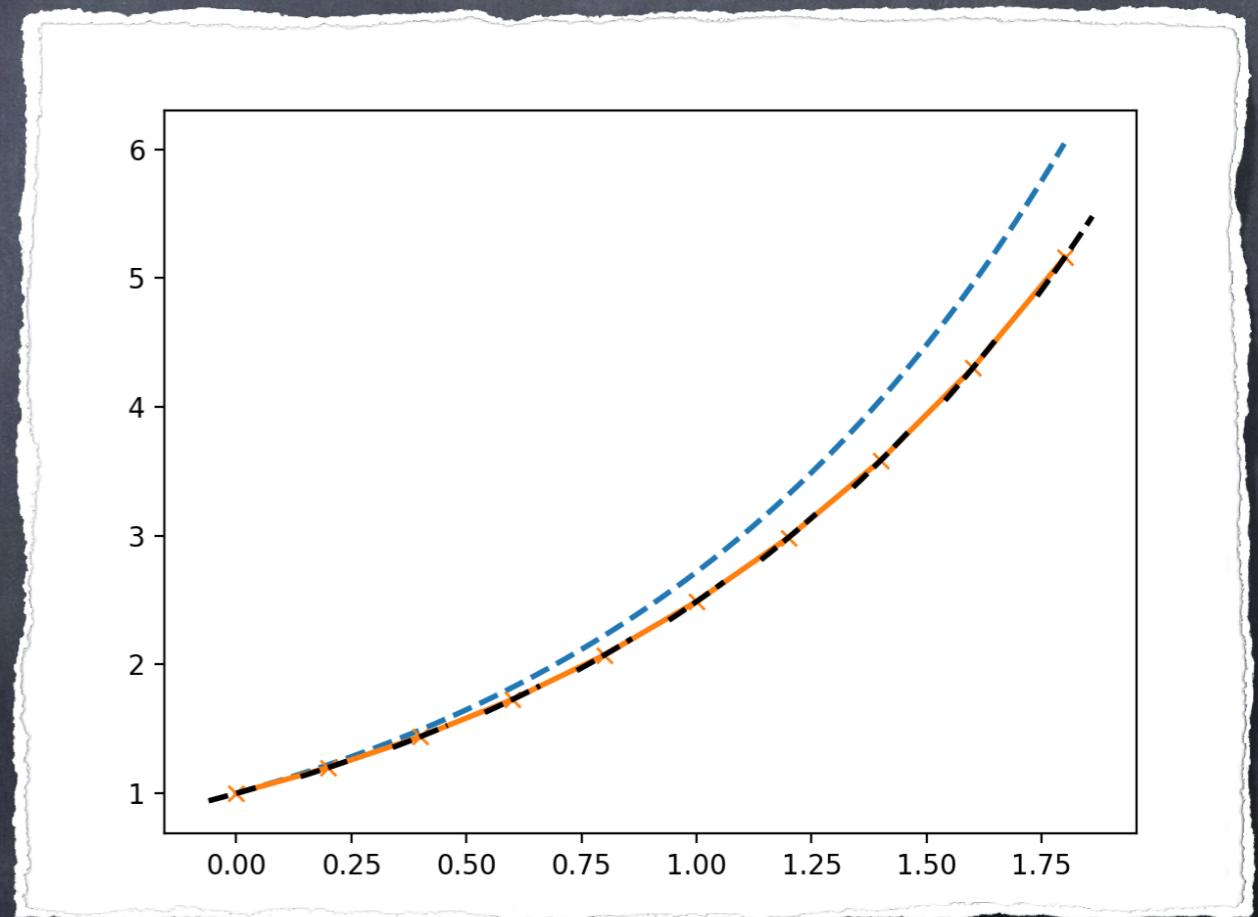
La méthode est convergente et d'ordre 1
(détails au (vrai) tableau)

Exemple :

Appliquons ce schéma au pb :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), & t \in [0, T] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

pour lequel la sol. exacte est
connue : $y(t) = e^t$.



$$\Delta t = \{0.2, 0.1, \dots, 0.0125\}$$

II. a) Définition et analyse

Retour sur la méthode d'Euler

$$\text{Schéma d'Euler : } y_{-i+1} = y_{-i} + \Delta t f(t_{-i}, y_{-i})$$

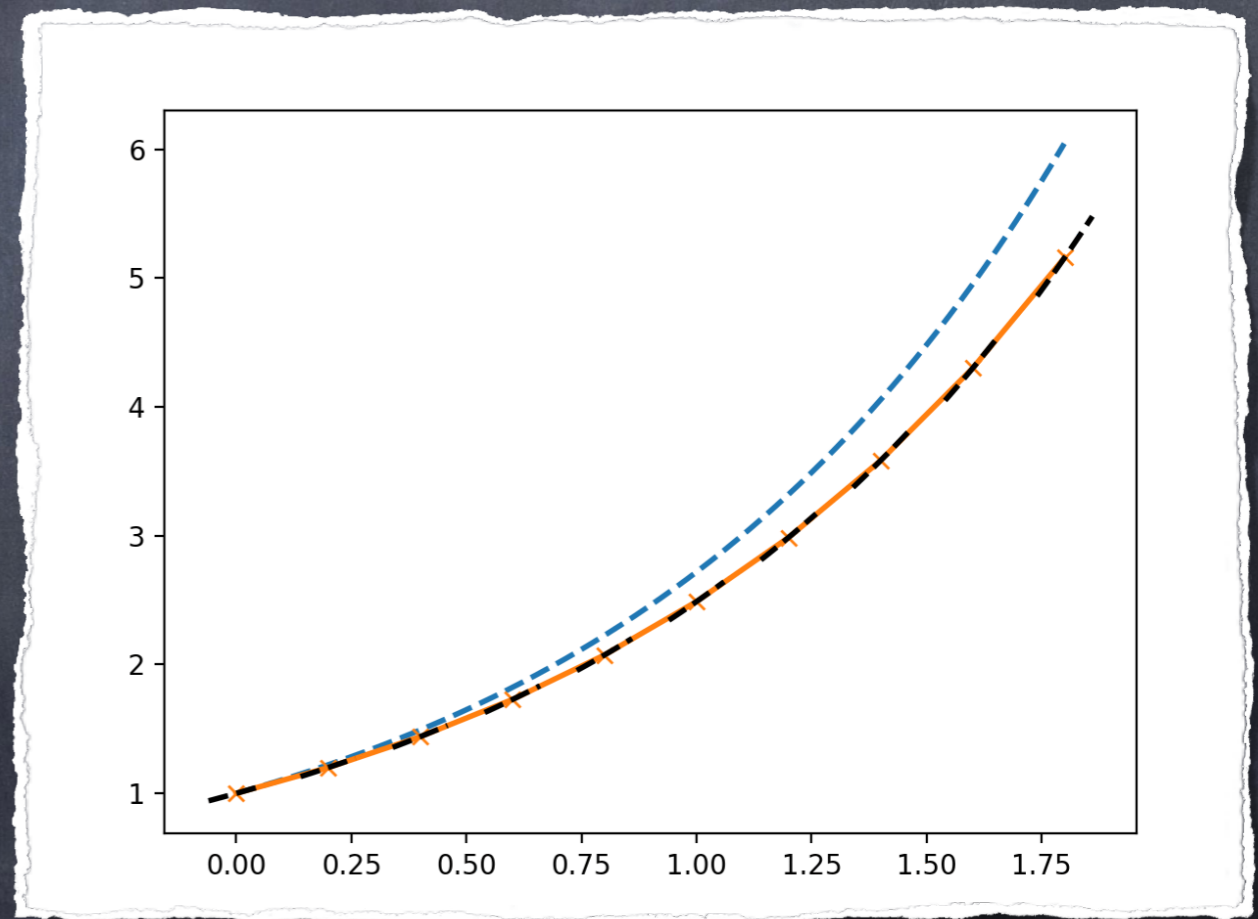
La méthode est convergente et d'ordre 1
(détails au (vrai) tableau)

Exemple :

Appliquons ce schéma au pb :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), & t \in [0, T] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

pour lequel la sol. exacte est
connue : $y(t) = e^t$.



$$\Delta t = \{0.2, 0.1, \dots, 0.0125\}$$

II. a) Définition et analyse

Peut-on proposer des schémas d'ordre plus élevé ?

Idée 1 : Exploiter le Thm. 2.10.

Par exemple, pour une méthode d'ordre 2 on aurait :

$$y_{-i+1} = y_{-i} + \Delta t f_{-i} + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\partial_t f_{-i} + \partial_y f_{-i} f_{-i} \right)$$

(détails au (vrai) tableau)

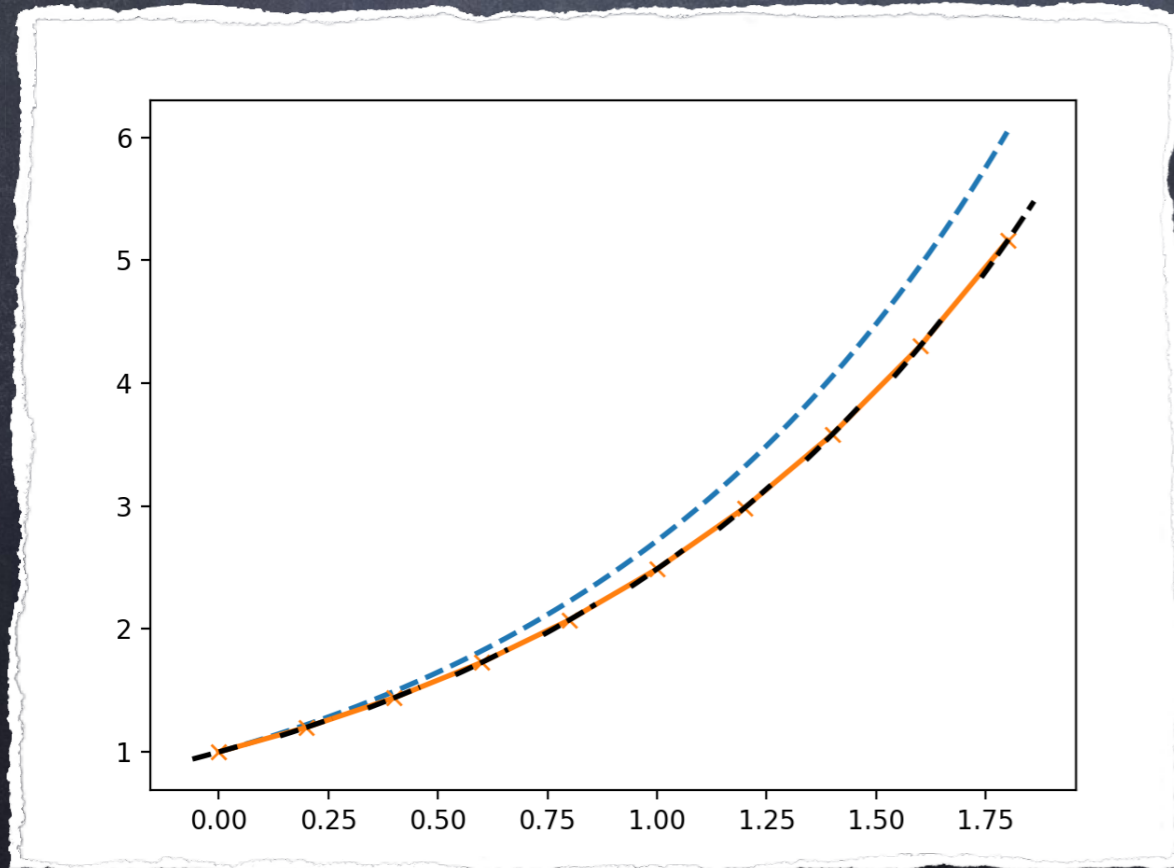
II. a) Définition et analyse

Peut-on proposer des schémas d'ordre plus élevé ?

Idée 1 : Exploiter le Thm. 2.10.

Par exemple, pour une méthode d'ordre 2 on aurait :

$$y_{-i+1} = y_{-i} + \Delta t f_{-i} + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\partial_t f_{-i} + \partial_y f_{-i} f_{-i} \right)$$



Euler $\Delta t = 0.2$

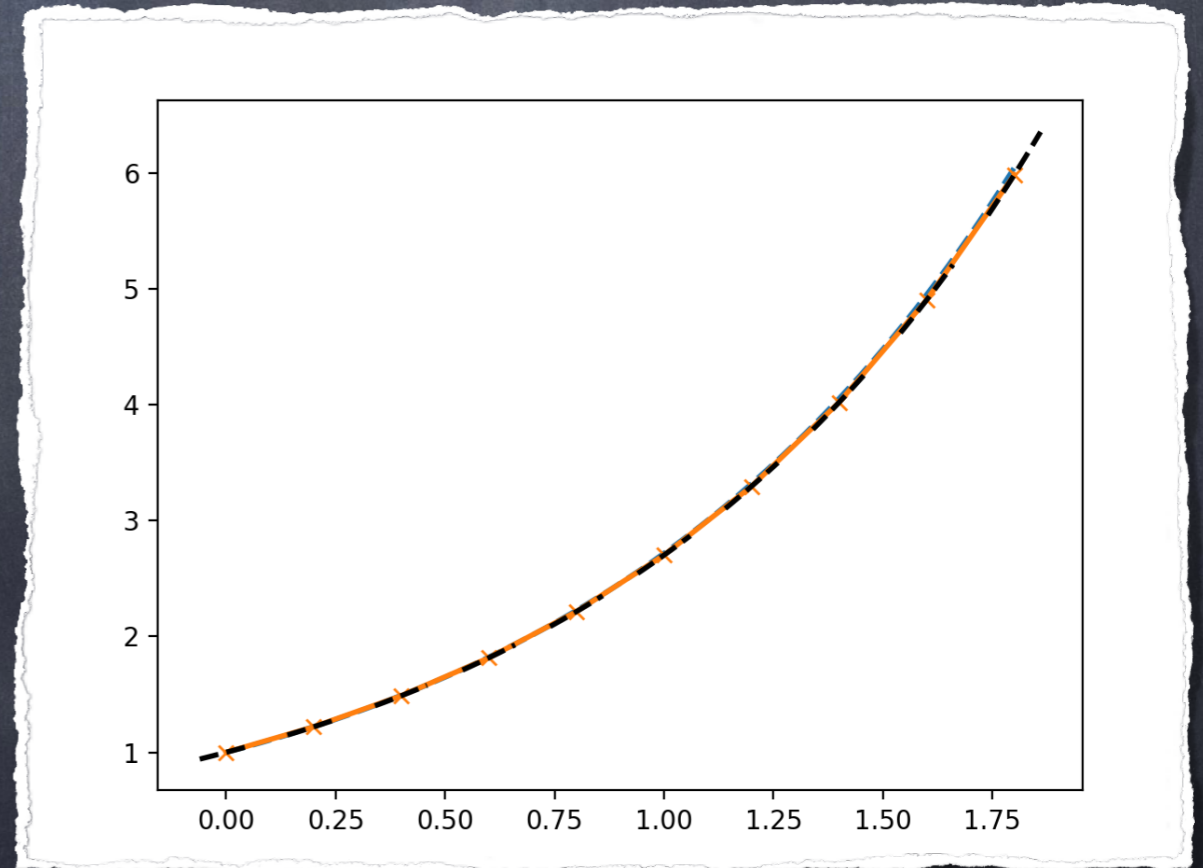


Schéma o_2 $\Delta t = 0.2$

II. a) Définition et analyse

Peut-on proposer des schémas d'ordre plus élevé ?

Idée 1 : Exploiter le Thm. 2.10.

Par exemple, pour une méthode d'ordre 2 on aurait :

$$y_{-i+1} = y_{-i} + \Delta t f_{-i}(t_i, y_{-i}) + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\partial_t f_{-i}(t_i, y_{-i}) + \partial_y f_{-i}(t_i, y_{-i}) f_{-i}(t_i, y_{-i}) \right)$$

Cette approche pose plusieurs problèmes :

II. a) Définition et analyse

Peut-on proposer des schémas d'ordre plus élevé ?

Idée 1 : Exploiter le Thm. 2.10.

Par exemple, pour une méthode d'ordre 2 on aurait :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t \underline{f}(t_i, \underline{y}_{-i}) + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\partial_t \underline{f}(t_i, \underline{y}_{-i}) + \partial_y \underline{f}(t_i, \underline{y}_{-i}) \underline{f}(t_i, \underline{y}_{-i}) \right)$$

Cette approche pose plusieurs problèmes :

- ① L'augmentation de l'ordre devient rapidement très compliqué et nécessite la connaissance et le calcul des dérivées partielles de f .
- ② La stabilité de la méthode nécessite des hypothèses de plus en plus forte sur f pour être prouvée.

II. a) Définition et analyse

Peut-on proposer des schémas d'ordre plus élevé ?

Idée 1 : Exploiter le Thm. 2.10.

Par exemple, pour une méthode d'ordre 2 on aurait :

$$y_{-i+1} = y_{-i} + \Delta t f_{-i} + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\partial_t f_{-i} + \partial_y f_{-i} f_{-i} \right)$$

Idée 2 : Introduire des pas intermédiaire

II. a) Définition et analyse

Peut-on proposer des schémas d'ordre plus élevé ?

Idée 1 : Exploiter le Thm. 2.10.

Par exemple, pour une méthode d'ordre 2 on aurait :

$$y_{-i+1} = y_{-i} + \Delta t f(t_i, y_{-i}) + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\partial_t f(t_i, y_{-i}) + \partial_y f(t_i, y_{-i}) f(t_i, y_{-i}) \right)$$

Idée 2 : Introduire des pas intermédiaire

→ Méthodes de Runge-Kutta

II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Revenons un instant à la formule

$$\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

et considérons r points intermédiaires $t_{ij} = t_i + \theta_j \Delta t_i$ avec $\theta_j \in [0, 1]$. L'idée est alors d'appliquer une formule de quadrature plus précises exploitant ces r points :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds \simeq \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j \underline{f}(t_{ij}, \underline{y}(t_{ij}))$$

II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Revenons un instant à la formule

$$\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

et considérons r points intermédiaires $t_{ij} = t_i + \theta_j \Delta t_i$ avec $\theta_j \in [0, 1]$. L'idée est alors d'appliquer une formule de quadrature plus précises exploitant ces r points :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds \simeq \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j \underline{f}(t_{ij}, \underline{y}(t_{ij}))$$

Intuitivement, cela conduit au schéma :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j \underline{f}(t_{ij}, \underline{y}_{-ij})$$

II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Revenons un instant à la formule

$$\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

et considérons r points intermédiaires $t_{ij} = t_i + \theta_j \Delta t_i$ avec $\theta_j \in [0, 1]$. L'idée est alors d'appliquer une formule de quadrature plus précises exploitant ces r points :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds \simeq \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j \underline{f}(t_{ij}, \underline{y}(t_{ij}))$$

Intuitivement, cela conduit au schéma :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j \underline{f}(t_{ij}, \underline{y}_{-ij})$$

Comment évaluer \underline{y}_{-ij} ?

II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Partant du schéma :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j f(t_{ij}, \underline{y}_{-ij})$$

on appliquera la même idée que précédemment pour évaluer \underline{y}_{-ij} (l'approximation de $\underline{y}(t_{ij})$) :

$$\underline{y}(t_{ij}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{ij}} f(s, \underline{y}(s)) ds$$

II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Partant du schéma :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j \underline{f}(t_{ij}, \underline{y}_{-ij})$$

on appliquera la même idée que précédemment pour évaluer \underline{y}_{-ij} (l'approximation de $\underline{y}(t_{ij})$) :

$$\underline{y}(t_{ij}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{ij}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

On utilise alors une formule « de quadrature » :

$$\underline{y}_{-ij} = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \sum_{k=1}^r a_{jk} \underline{f}(t_{ik}, \underline{y}_{-ik})$$

II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Partant du schéma :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j \underline{f}_{-ij}(t_{ij}, \underline{y}_{-ij})$$

on appliquera la même idée que précédemment pour évaluer \underline{y}_{-ij} (l'approximation de $\underline{y}(t_{ij})$) :

$$\underline{y}(t_{ij}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{ij}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

On utilise alors une formule « de quadrature » :

$$\underline{y}_{-ij} = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \sum_{k=1}^r a_{jk} \underline{f}_{-ik}(t_{ik}, \underline{y}_{-ik})$$

Remarque :

La formule utilisée est a priori différente pour chaque j. 32

II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Partant du schéma :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j f(\underline{t}_{ij}, \underline{y}_{-ij})$$

on appliquera la même idée que précédemment pour évaluer \underline{y}_{-ij} (l'approximation de $\underline{y}(t_{ij})$) :

$$\underline{y}(t_{ij}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{ij}} f(s, \underline{y}(s)) ds$$

On utilise alors une formule « de quadrature » :

$$\underline{y}_{-ij} = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \sum_{k=1}^r a_{jk} f(\underline{t}_{ik}, \underline{y}_{-ik})$$

Remarque :

La formule utilisée est a priori différente pour chaque j . 32

II. b) Les méthodes de Runge Kutta

2.11 Définition (méthode de Runge-Kutta)

Étant donné les coefficients $(c_j)_{j=1, \dots, r}$, $(a_{jk})_{j,k=1, \dots, r}$, $(\theta_j)_{j=1, \dots, r}$
une méthode de RK est définie par :

$$\begin{cases} y_{-i+1} = y_{-i} + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j f(t_{ij}, y_{-ij}) \\ y_{-ij} = y_{-i} + \Delta t_i \sum_{k=1}^r a_{jk} f(t_{ik}, y_{-ik}) \end{cases}$$

$$\text{et } t_{ij} = t_i + \theta_j \Delta t_i.$$

II. b) Les méthodes de Runge Kutta

2.11 Définition (méthode de Runge-Kutta)

Étant donné les coefficients $(c_j)_{j=1, \dots, r}$, $(a_{jk})_{j,k=1, \dots, r}$, $(\theta_j)_{j=1, \dots, r}$ une méthode de RK est définie par :

$$\begin{cases} y_{-i+1} = y_{-i} + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j f(t_{ij}, y_{-ij}) \\ y_{-ij} = y_{-i} + \Delta t_i \sum_{k=1}^r a_{jk} f(t_{ik}, y_{-ik}) \end{cases} \quad \text{et } t_{ij} = t_i + \theta_j \Delta t_i.$$

De manière plus condensée, on peut reformuler ainsi :

$$\begin{bmatrix} y_{-i1} \\ \vdots \\ y_{-ir} \\ y_{-i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{-i} \\ \vdots \\ y_{-i} \\ y_{-i} \end{bmatrix} + \Delta t_i \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & & a_{rr} \\ c_1 & \cdots & c_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t_{i1}, y_{-i1}) \\ \vdots \\ f(t_{ir}, y_{-ir}) \end{bmatrix}$$

II. b) Les méthodes de Runge Kutta

2.11 Définition (méthode de Runge-Kutta)

Étant donné les coefficients $(c_j)_{j=1, \dots, r}$, $(a_{jk})_{j,k=1, \dots, r}$, $(\theta_j)_{j=1, \dots, r}$ une méthode de RK est définie par :

$$\begin{cases} y_{-i+1} = y_{-i} + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j f(t_{ij}, y_{-ij}) \\ y_{-ij} = y_{-i} + \Delta t_i \sum_{k=1}^r a_{jk} f(t_{ik}, y_{-ik}) \end{cases} \quad \text{et } t_{ij} = t_i + \theta_j \Delta t_i.$$

Remarque :

On résume généralement une méthode de RK à l'aide du tableau de Butcher :

θ_1	a_{11}	\dots	a_{1r}
\vdots	\vdots		\vdots
θ_r	a_{r1}	\dots	a_{rr}
	c_1	\dots	c_r

II. b) Les méthodes de Runge Kutta

2.11 Définition (méthode de Runge-Kutta)

Étant donné les coefficients $(c_j)_{j=1, \dots, r}$, $(a_{jk})_{j,k=1, \dots, r}$, $(\theta_j)_{j=1, \dots, r}$
une méthode de RK est définie par :

$$\begin{cases} y_{-i+1} = y_{-i} + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j f(t_{ij}, y_{-ij}) \\ y_{-ij} = y_{-i} + \Delta t_i \sum_{k=1}^r a_{jk} f(t_{ik}, y_{-ik}) \end{cases} \quad \text{et } t_{ij} = t_i + \theta_j \Delta t_i.$$

Remarque 2 :

Il s'agit bien d'une méthode à 1-pas car on calcule y_{-i+1} à

l'aide uniquement de y_{-i} .

II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Quelques exemples :

① Méthode de Euler :

$$y_{-i+1} = y_{-i} + \Delta t_i \underset{-}{f}(t_i, \underset{-}{y}_i)$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Quelques exemples :

① Méthode de Euler :

$$y_{-i+1} = y_{-i} + \Delta t_i \underline{f(t_i, y_{-i})}$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

② Méthode de Euler Implicite

$$y_{-i+1} = y_{-i} + \Delta t_i \underline{f(t_{i+1}, y_{-i+1})}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Remarque :

On a ici une **équation non linéaire** à résoudre à chaque pas de temps. A priori, rien ne nous garantit l'existence et l'unicité de la solution. On peut en fait le prouver pour un Δt_i suffisamment petit avec l'hypothèse de f Lip.

II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Quelques exemples :

① Méthode de Euler :

$$y_{-i+1} = y_{-i} + \Delta t_i \underline{f(t_i, y_{-i})}$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

② Méthode de Euler Implicite

$$y_{-i+1} = y_{-i} + \Delta t_i \underline{f(t_{i+1}, y_{-i+1})}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

③ Méthode de Heun

$$y_{-i+1} = y_{-i} + \frac{\Delta t_i}{2} \left(\underline{f(t_{i1}, y_{-i1})} + \underline{f(t_{i2}, y_{-i2})} \right)$$

$$y_{-i1} = y_{-i}$$

$$y_{-i2} = y_{-i} + \Delta t_i \underline{f(t_{i1}, y_{-i1})}$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

II. b) Les méthodes de Runge Kutta

2.12 Théorème

Une méthode de RK est consistante ssi $\sum_{j=1}^r c_j = 1$.

Preuve : au (vrai) tableau !



II. b) Les méthodes de Runge Kutta

2.12 Théorème

Une méthode de RK est consistante ssi $\sum_{j=1}^r c_j = 1$.

2.13 Théorème

En notant A la matrice de coefficients a_{ij} , une méthode de RK est stable si $\Delta t_i \leq h^*$ pour tout i avec $h^* L \rho(A) < 1$ où L est la constante de Lipschitz de f .

Idée de la preuve : au (vrai) tableau !



II. b) Les méthodes de Runge Kutta

2.12 Théorème

Une méthode de RK est consistante ssi $\sum_{j=1}^r c_j = 1$.

2.13 Théorème

En notant A la matrice de coefficients a_{ij} , une méthode de RK est stable si $\Delta t_i \leq h^*$ pour tout i avec $h^* L \rho(A) < 1$ où L est la constante de Lipschitz de f .

Remarque :

Pour une méthode de RK explicite, on a $\rho(A) = 0$ et donc la méthode est toujours stable.

II. b) Les méthodes de Runge Kutta

2.12 Corollaire (du Thm. 2.10)

Une méthode de RK est d'ordre p ssi elle vérifie les conditions $j = 1, \dots, p$ du tableau ci-dessous :

$j=1$	$\underline{c} \cdot \underline{1} = 1$
$j=2$	$\underline{c}^t \Theta \underline{1} = \underline{c}^t A \underline{1} = \frac{1}{2}$
$j=3$	$\underline{c}^t \Theta^2 \underline{1} = \underline{c}^t \Theta A \underline{1} = \underline{c}^t (A \underline{1})^2 = \frac{1}{3}$ et $\underline{c}^t A \Theta \underline{1} = \underline{c}^t A^2 \underline{1} = \frac{1}{6}$

où Θ est la matrice diagonale formée des θ_i et $\underline{1}$ le vecteur de composantes 1 de \mathbb{R}^r .

Idée de la preuve : au (vrai) tableau !

II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Conditions pour une méthode d'ordre élevé :

Les conditions précédentes ont le défaut de devenir rapidement inextricables ! On a souvent recourt à des conditions simplificatrices.

Typiquement, en imposant $\underline{A}\underline{1} = \underline{\Theta}\underline{1}$, le tableau devient :

$j=1$	$\underline{c} \cdot \underline{1} = 1$
$j=2$	$\underline{c}^t \underline{\Theta} \underline{1} = \frac{1}{2}$
$j=3$	$\underline{c}^t \underline{\Theta}^2 \underline{1} = \frac{1}{3}$ et $\underline{c}^t \underline{A} \underline{\Theta} \underline{1} = \frac{1}{6}$

Au programme (Chapitre 3)

Objectif :

Étant donné $t_0 \in [a, b]$, déterminer numériquement la solution d'un système d'EDO :

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

Plan :

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

II. Les méthodes à 1-pas

III. Les méthodes multi-pas

a) Définition et analyse

b) Les méthodes prédiction-corrrection

IV. Quelques extensions

III. a) Définition et analyse

L'idée de départ pour construire une **méthode multi-pas** est la remarque suivante :

$$\underline{y}(t_{i+k}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+k}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

On utilisera alors une formule de quadrature pour évaluer l'intégrale exploitant les points $\underline{y}(t_{i+j})$:

$$\int_{t_i}^{t_{i+k}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds \simeq \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{f}(t_{i+j}, \underline{y}(t_{i+j}))$$

ce qui conduit au schéma suivant :

$$\underline{y}_{-i+k} = \underline{y}_{-i} + \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{f}(t_{-i+j}, \underline{y}_{-i+j})$$

III. a) Définition et analyse

L'idée de départ pour construire une **méthode multi-pas** est la remarque suivante :

$$\underline{y}(t_{i+k}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+k}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

On utilisera alors une formule de quadrature pour évaluer l'intégrale exploitant les points $\underline{y}(t_{i+j})$:

$$\int_{t_i}^{t_{i+k}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds \simeq \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{f}(t_{i+j}, \underline{y}(t_{i+j}))$$

ce qui conduit au schéma suivant :

$$\underline{y}_{-i+k} = \underline{y}_{-i} + \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{f}(t_{-i+j}, \underline{y}_{-i+j})$$

Remarque : Pour les méthodes multi-pas, on se limitera au cas Δt constant.

III. a) Définition et analyse

3.1 Définition (méthode multi-pas)

Étant donné α_j et β_j , avec $\alpha_k \neq 0$, on définit la méthode multi-pas comme suit :

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{-i+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j f(t_{i+j}, y_{-i+j})$$

III. a) Définition et analyse

3.1 Définition (méthode multi-pas)

Étant donné α_j et β_j , avec $\alpha_k \neq 0$, on définit la méthode multi-pas comme suit :

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{-i+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j f(t_{i+j}, y_{-i+j})$$

Remarques :

- ① Pour initialiser la méthode, i.e. calculer y_{-1}, \dots, y_{-k-1} , il faut utiliser une méthode à 1 pas.

III. a) Définition et analyse

3.1 Définition (méthode multi-pas)

Étant donné α_j et β_j , avec $\alpha_k \neq 0$, on définit la méthode multi-pas comme suit :

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{-i+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j f(t_{i+j}, y_{-i+j})$$

Remarques :

- ① Pour initialiser la méthode, i.e. calculer y_{-1}, \dots, y_{-k-1} , il faut utiliser une méthode à 1 pas.
- ② Le calcul de y_{-i+k+1} ne nécessite qu'une évaluation de f ce qui permet un gain en coût de calculs.

III. a) Définition et analyse

3.1 Définition (méthode multi-pas)

Étant donné α_j et β_j , avec $\alpha_k \neq 0$, on définit la méthode multi-pas comme suit :

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{-i+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j f(t_{i+j}, y_{-i+j})$$

Pour l'analyse de ces méthodes, il sera utile d'introduire deux polynômes :

$$\alpha(t) = \sum_{j=0}^k \alpha_j t^j$$

$$\beta(t) = \sum_{j=0}^k \beta_j t^j$$

III. a) Définition et analyse

3.2 Définition (consistance)

Une méthode multi-pas est dite **consistante** ssi l'erreur de consistance :

$$\underline{\varepsilon}_i = \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^k \alpha_j \underline{y}(t_{i+j}) - \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{f}(t_{i+j}, \underline{y}(t_{i+j}))$$

vérifie $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{i \in \{0, \dots, N-k\}} \|\underline{\varepsilon}_i\| = 0$

III. a) Définition et analyse

3.2 Définition (consistance)

Une méthode multi-pas est dite **consistante** ssi l'erreur de consistance :

$$\underline{\varepsilon}_i = \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^k \alpha_j \underline{y}(t_{i+j}) - \sum_{j=0}^k \beta_j f(t_{i+j}, \underline{y}(t_{i+j}))$$

vérifie $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{i \in \{0, \dots, N-k\}} \|\underline{\varepsilon}_i\| = 0$

3.3 Théorème (admis, cf démo. Thm.)

Une méthode multi-pas est consistante ssi $\alpha(1) = 0$ et $\alpha'(1) = \beta(1)$.

III. a) Définition et analyse

3.4 Définition (stabilité)

Soit $\tilde{\underline{\varepsilon}}_i$ une suite et \underline{z}_i définie par

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \underline{z}_{i+j} = \Delta t \left[\tilde{\underline{\varepsilon}}_i + \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{f}(t_{i+j}, \underline{z}_{i+j}) \right]$$

alors la méthode est dite **stable** ssi il existe $M > 0$ t.q.

$$\max_{0 \leq i \leq N} \|\underline{y}_{-i} - \underline{z}_i\| \leq M \left(\max_{0 \leq i \leq k-1} \|\underline{y}_{-i} - \underline{z}_i\| + \max_{0 \leq i \leq N-k} \|\tilde{\underline{\varepsilon}}_i\| \right)$$

III. a) Définition et analyse

3.4 Définition (stabilité)

Soit $\tilde{\varepsilon}_i$ une suite et \underline{z}_i définie par

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \underline{z}_{i+j} = \Delta t \left[\tilde{\varepsilon}_i + \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{f}(t_{i+j}, \underline{z}_{i+j}) \right]$$

alors la méthode est dite **stable** ssi il existe $M > 0$ t.q.

$$\max_{0 \leq i \leq N} \|\underline{y}_i - \underline{z}_i\| \leq M \left(\max_{0 \leq i \leq k-1} \|\underline{y}_i - \underline{z}_i\| + \max_{0 \leq i \leq N-k} \|\tilde{\varepsilon}_i\| \right)$$

3.5 Théorème (admis)

Une méthode multi-pas est stable ssi les racines de $\alpha(t)$ sont de module inférieure à 1, et celle de module 1 de multiplicité simple.

III. a) Définition et analyse

3.6 Définition (convergence)

Une méthode multi-pas est dite **convergente** ssi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq N} \|\underline{y}(t_i) - \underline{y}_i\| = 0$$

III. a) Définition et analyse

3.6 Définition (convergence)

Une méthode multi-pas est dite **convergente** ssi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq N} \|\underline{y}(t_i) - \underline{y}_i\| = 0$$

3.7 Théorème

Si une méthode multi-pas est stable et consistante et vérifie

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq k-1} \|\underline{y}(t_i) - \underline{y}_i\| = 0$$

alors elle est convergente.

Preuve : au (vrai) tableau !

III. a) Définition et analyse

3.8 Définition (ordre)

Une méthode multi-pas est d'ordre p ssi

$$\max_{0 \leq i \leq N-k} \|\underline{\varepsilon}_i\| = O(\Delta t^p)$$

III. a) Définition et analyse

3.8 Définition (ordre)

Une méthode multi-pas est d'ordre p ssi

$$\max_{0 \leq i \leq N-k} \|\underline{\varepsilon}_i\| = O(\Delta t^p)$$

3.9 Corollaire

Si une méthode est convergente et d'ordre p alors

$$\max_{0 \leq i \leq N} \|\underline{y}(t_i) - \underline{y}_i\| = O(\Delta t^p)$$

III. a) Définition et analyse

3.8 Définition (ordre)

Une méthode multi-pas est d'ordre p ssi

$$\max_{0 \leq i \leq N-k} \|\underline{\varepsilon}_i\| = O(\Delta t^p)$$

3.9 Corollaire

Si une méthode est convergente et d'ordre p alors

$$\max_{0 \leq i \leq N} \|\underline{y}(t_i) - \underline{y}_i\| = O(\Delta t^p)$$

Remarque :

Ce résultat n'est vrai que si on initialise la méthode multi-pas avec un méthode d'ordre p au moins !

III. a) Définition et analyse

3.10 Théorème

Une méthode multi-pas est d'ordre p ssi $C_l = 0, \forall l \in \{0, \dots, p\}$ où :

$$C_0 = \sum_{i=0}^k \alpha_i \quad \text{et} \quad C_l = \sum_{j=0}^k \alpha_j \frac{j^l}{l!} - \beta_j \frac{j^{l-1}}{(l-1)!}$$

Preuve : au (vrai) tableau ! □

Remarque :

Ce résultat n'est vrai que si on initialise la méthode multi-pas avec un méthode d'ordre p au moins !

III. b) Méthode de prédiction correction

Méthode implicite

Dans le cas où $\beta_k \neq 0$, la méthode multi-pas est **implicite** :

$$\alpha_k \underset{-i+k}{y} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \underset{-i+j}{y} = \Delta t \beta_k \underset{-i+k}{f(t_{i+k}, y)} + \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \underset{-i+j}{f(t_{i+j}, y)}$$

ce qui conduit à résoudre une **équation non linéaire**.

III. b) Méthode de prédiction correction

Méthode implicite

Dans le cas où $\beta_k \neq 0$, la méthode multi-pas est **implicite** :

$$\alpha_k \underline{y}_{-i+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \underline{y}_{-i+j} = \Delta t \beta_k f(\underline{t}_{i+k}, \underline{y}_{-i+k}) + \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(\underline{t}_{i+j}, \underline{y}_{-i+j})$$

ce qui conduit à résoudre une **équation non linéaire**.

Deux difficultés apparaissent alors :

- ① Comment initialiser la méthode de Newton pour résoudre le problème non linéaire ?
- ② Quel critère choisir pour stopper les itérations ?

III. b) Méthode de prédiction correction

Méthode implicite

Dans le cas où $\beta_k \neq 0$, la méthode multi-pas est **implicite** :

$$\alpha_k \underline{y}_{-i+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \underline{y}_{-i+j} = \Delta t \beta_k \underline{f}(t_{i+k}, \underline{y}_{-i+k}) + \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \underline{f}(t_{i+j}, \underline{y}_{-i+j})$$

ce qui conduit à résoudre une **équation non linéaire**.

Pour palier ces deux difficultés, l'idée est d'utiliser une méthode de **prédiction-corrrection** :

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{j=0}^k \alpha_j \underline{y}_{-i+j} = \Delta t \beta_k \underline{f}(t_{i+k}, \underline{y}'_{-i+k}) + \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \underline{f}(t_{i+j}, \underline{y}_{-i+j}) \quad (\text{Correcteur}) \\ \alpha'_k \underline{y}'_{-i+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha'_j \underline{y}_{-i+j} = \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} \beta'_j \underline{f}(t_{i+j}, \underline{y}_{-i+j}) \quad (\text{Prédicteur}) \end{array} \right.$$

III. b) Méthode de prédiction correction

Méthode prédiction-corrrection :

On considère la méthode de prédiction-corrrection :

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{-i+j} = \Delta t \beta_k f(t_{i+k}, y_{-i+k}') + \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(t_{i+j}, y_{-i+j}) \quad (\text{Correcteur})$$

$$\alpha_k' y_{-i+k}' + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j' y_{-i+j} = \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j' f(t_{i+j}, y_{-i+j}) \quad (\text{Prédicteur})$$

3.11 Théorème

Si la méthode du prédicteur est d'ordre $q \geq p - 1$ où p est l'ordre du correcteur, alors la méthode de prédiction correction est d'ordre p .

Preuve : au (vrai) tableau !

Au programme (Chapitre 3)

Objectif :

Étant donné $t_0 \in [a, b]$, déterminer numériquement la solution d'un système d'EDO :

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

Plan :

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

II. Les méthodes à 1-pas

III. Les méthodes multi-pas

IV. Quelques extensions

a) Adaptation du pas

b) Méthode parallèle

IV. a) Adaptation du pas

Revenons sur les méthodes à 1-pas :

$$y_{-i+1} = y_{-i} + \Delta t_i \underline{\Phi}(t_i, y_{-i}, \Delta t_i)$$

Si on connaissait l'erreur de consistance $\underline{\varepsilon}_i$, on pourrait adapter le pas Δt_i à chaque itération.

Idée :

Utiliser une seconde méthode pour approcher l'erreur de consistance :

$$y'_{-i+1} = y'_{-i} + \Delta t_i \underline{\Phi}'(t_i, y'_{-i}, \Delta t_i)$$

On supposera que la première méthode est d'ordre p et la deuxième d'ordre $p' > p$.

IV. a) Adaptation du pas

On rappelle que l'on a :

$$\underline{\varepsilon}_i = \underline{y}(t_{i+1}) - \underline{y}(t_i) - \Delta t_i \underline{\Phi}(t_i, \underline{y}(t_i), \Delta t_i)$$

et

$$\underline{\varepsilon}'_i = \underline{y}(t_{i+1}) - \underline{y}(t_i) - \Delta t_i \underline{\Phi}'(t_i, \underline{y}(t_i), \Delta t_i)$$

4.1 Proposition (cf TD)

L'erreur de consistance $\underline{\varepsilon}_i$ vérifie :

$$\underline{\varepsilon}_i = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \underline{\Phi}'(t_i, \underline{y}_{-i}, \Delta t_i) - \underline{y}_{-i+1} + \mathcal{O}(\Delta t_i^{p+2})$$

IV. a) Adaptation du pas

On rappelle que l'on a :

$$\underline{\varepsilon}_i = \underline{y}(t_{i+1}) - \underline{y}(t_i) - \Delta t_i \underline{\Phi}(t_i, \underline{y}(t_i), \Delta t_i)$$

et

$$\underline{\varepsilon}'_i = \underline{y}(t_{i+1}) - \underline{y}(t_i) - \Delta t_i \underline{\Phi}'(t_i, \underline{y}(t_i), \Delta t_i)$$

4.1 Proposition (cf TD)

L'erreur de consistance $\underline{\varepsilon}_i$ vérifie :

$$\underline{\varepsilon}_i = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \underline{\Phi}'(t_i, \underline{y}_{-i}, \Delta t_i) - \underline{y}_{-i+1} + \mathcal{O}(\Delta t_i^{p+2})$$

Idée : Choisir le « plus grand » pas Δt_i t.q. l'estimation de $\|\underline{\varepsilon}_i\|$ soit inférieure à une tolérance fixée !

IV. a) Adaptation du pas

Algorithme d'adaptation du pas à chaque pas de tps :

Tant que $\|e_i\| > \text{tol}$ et $\|ep_i\| < \text{tol}$:

$$ep_i \leftarrow e_i$$

$$y_{i+1} \leftarrow y_i + \Delta t_i \Phi(t_i, y_i, \Delta t_i)$$

$$\tilde{y}_{i+1} \leftarrow y_i + \Delta t_i \Phi'(t_i, y_i, \Delta t_i)$$

$$e_i \leftarrow y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}$$

Si $\|e_i\| < \text{tol}$ alors

$$\Delta t_i \leftarrow \Delta t_i \times 0.8$$

Si $\|e_i\| > \text{tol}$ alors

$$\Delta t_i \leftarrow \Delta t_i \times 1.2$$

IV. a) Adaptation du pas

Algorithme d'adaptation du pas à chaque pas de tps :

Tant que $\|e_i\| > \text{tol}$ et $\|ep_i\| < \text{tol}$:

$$ep_i \leftarrow e_i$$

$$y_{i+1} \leftarrow y_i + \Delta t_i \Phi(t_i, y_i, \Delta t_i)$$

$$\tilde{y}_{i+1} \leftarrow y_i + \Delta t_i \Phi'(t_i, y_i, \Delta t_i)$$

$$e_i \leftarrow y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}$$

Si $\|e_i\| < \text{tol}$ alors

$$\Delta t_i \leftarrow \Delta t_i \times 0.8$$

Si $\|e_i\| > \text{tol}$ alors

$$\Delta t_i \leftarrow \Delta t_i \times 1.2$$

A priori coûteux !

IV. a) Adaptation du pas

4.1 Définition (Runge-Kutta emboîtée)

Un couple de méthode de RK respectivement d'ordre p et $p' > p$ et impliquant r et $r' = r + 1$ pas intermédiaire est dite **emboîtée** ssi les tableaux de Butcher vérifient :

θ_1	a_{11}	\dots	a_{1r}	0
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
θ_r	a_{r1}	\dots	a_{rr}	0
1	c_1	\dots	c_r	0
	c'_1	\dots	c'_r	c'_{r+1}

IV. a) Adaptation du pas

4.1 Définition (Runge-Kutta emboîtée)

Un couple de méthode de RK respectivement d'ordre p et $p' > p$ et impliquant r et $r' = r + 1$ pas intermédiaire est dite **emboîtée** ssi les tableaux de Butcher vérifient :

θ_1	a_{11}	\dots	a_{1r}	0
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
θ_r	a_{r1}	\dots	a_{rr}	0
1	c_1	\dots	c_r	0
	c'_1	\dots	c'_r	c'_{r+1}



$$\begin{aligned}
 y_{-i+1} &= y_{-i} + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j f(t_{ij}, y_{-ij}) \\
 y_{-ij} &= y_{-i} + \Delta t_i \sum_{k=1}^r a_{jk} f(t_{jk}, y_{-jk})
 \end{aligned}$$

IV. a) Adaptation du pas

4.1 Définition (Runge-Kutta emboîtée)

Un couple de méthode de RK respectivement d'ordre p et $p' > p$ et impliquant r et $r' = r + 1$ pas intermédiaire est dite **emboîtée** ssi les tableaux de Butcher vérifient :

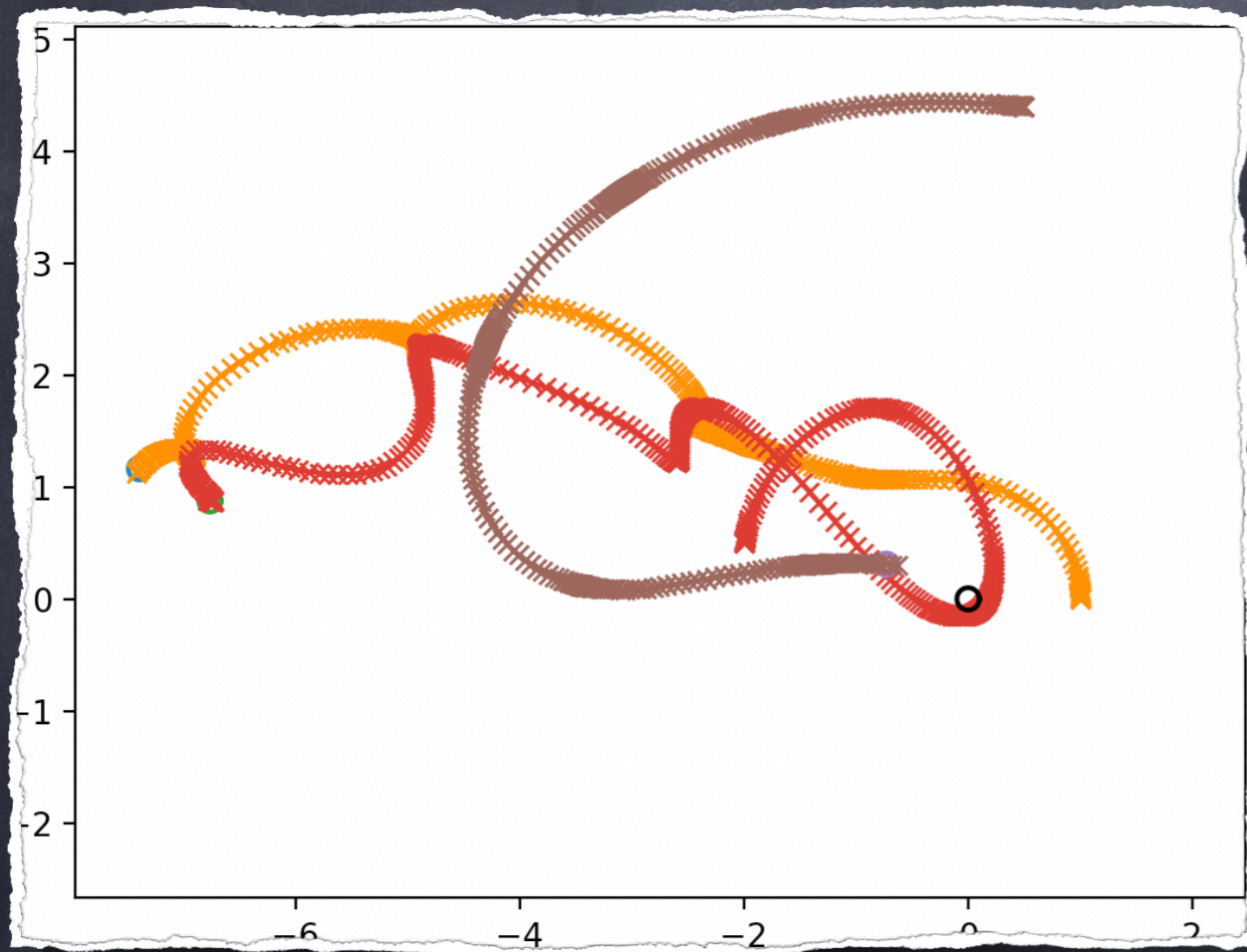
θ_1	a_{11}	\dots	a_{1r}	0
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
θ_r	a_{r1}	\dots	a_{rr}	0
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
1	c_1	\dots	c_r	0
	c'_1	\dots	c'_r	c'_{r+1}



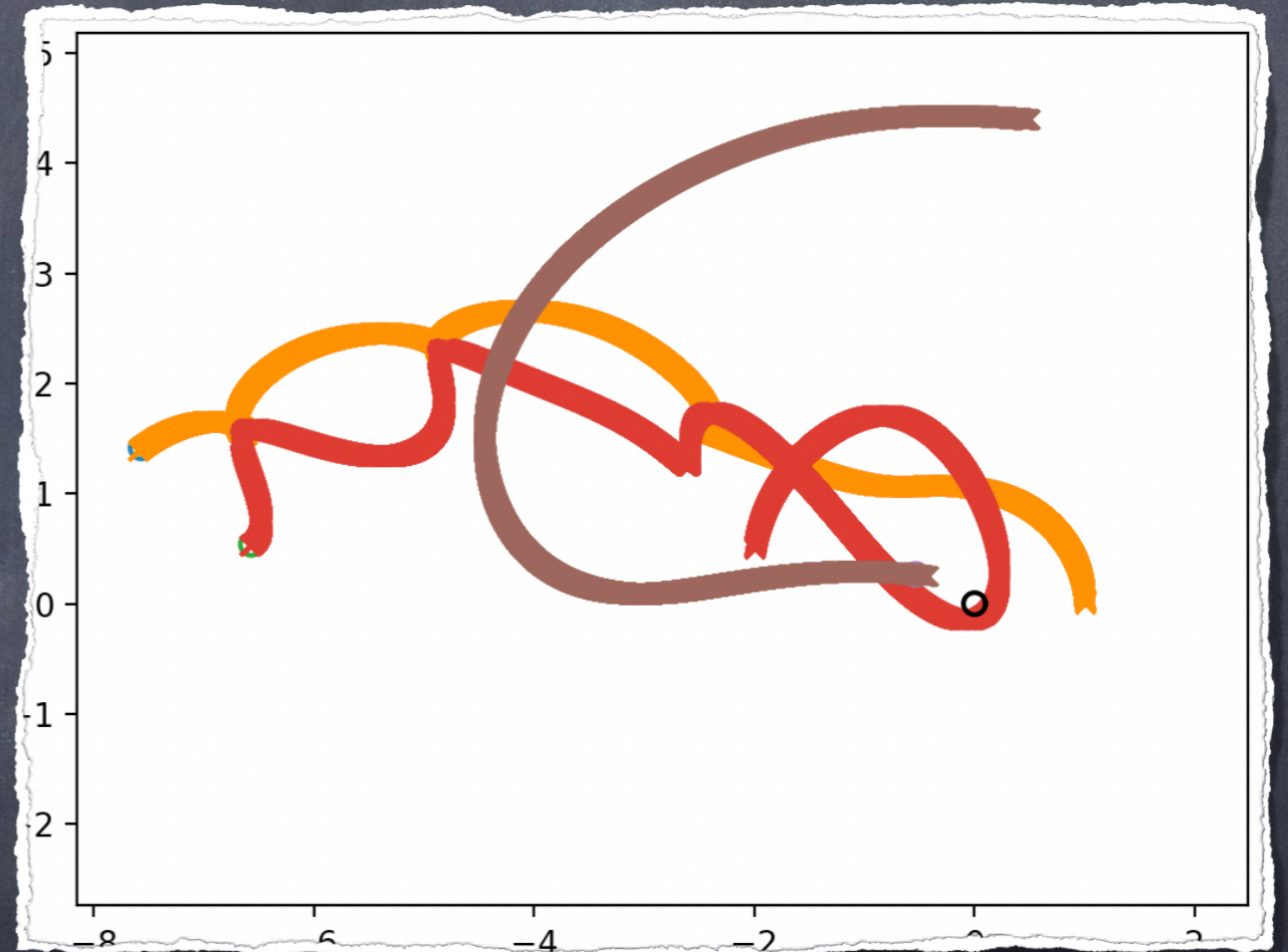
$$\begin{aligned}
 \begin{array}{|l} y \\ \hline y \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{l} -i+1 \\ -ij \end{array}
 &= y_{-i} + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j f(t_{ij}, y_{-ij}) \\
 &= y_{-i} + \Delta t_i \sum_{k=1}^r a_{jk} f(t_{jk}, y_{-jk}) \\
 \tilde{y}_{-i+1}
 &= y_{-i} + \Delta t_i \sum_{j=1}^{r+1} c'_j f(t_{ij}, y_{-ij})
 \end{aligned}$$

IV. a) Adaptation du pas

Illustration méthode de Runge-Kutta emboîtée
Simulation du mouvement de trois planètes.



Méthode de RK 24
(Tps ~ 0.1s)



Méthode de RK 4
(Tps ~ 1s)

IV. b) Méthode pararéel

Considérons une série d'instant $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$ et notons y_n l'approximation de la solution à ces instants.

Remarque : On aura $t_{n+1} - t_n > \Delta t$

IV. b) Méthode pararéel

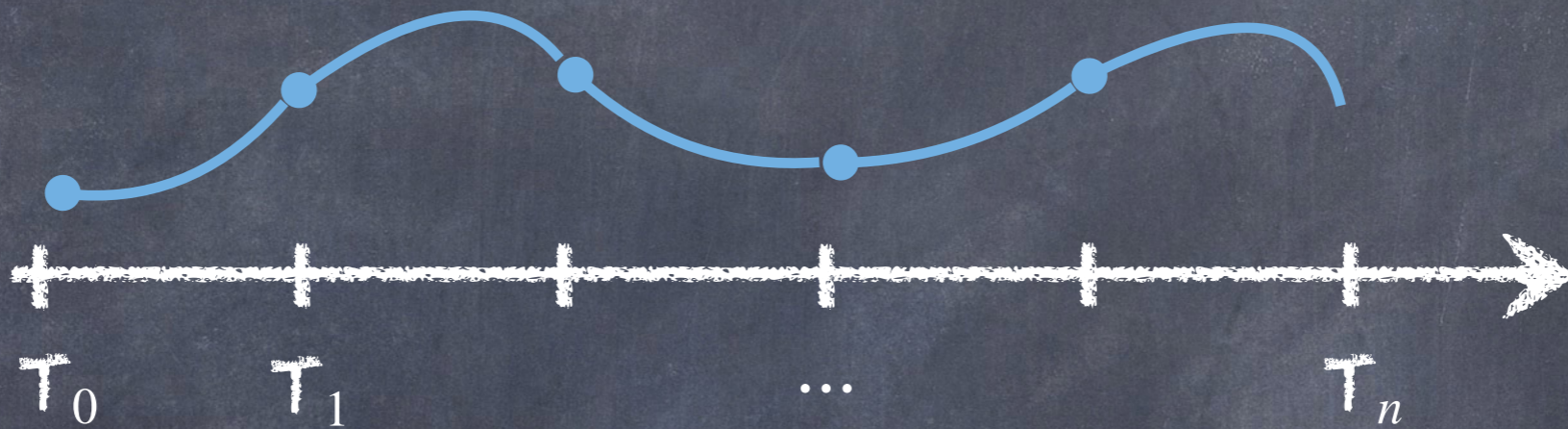
Considérons une série d'instant $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$ et notons y l'approximation de la solution à ces instants.



Remarque : On aura $t_{n+1} - t_n > \Delta t$

IV. b) Méthode pararéal

Considérons une série d'instant $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$ et notons y_{-n} l'approximation de la solution à ces instants.

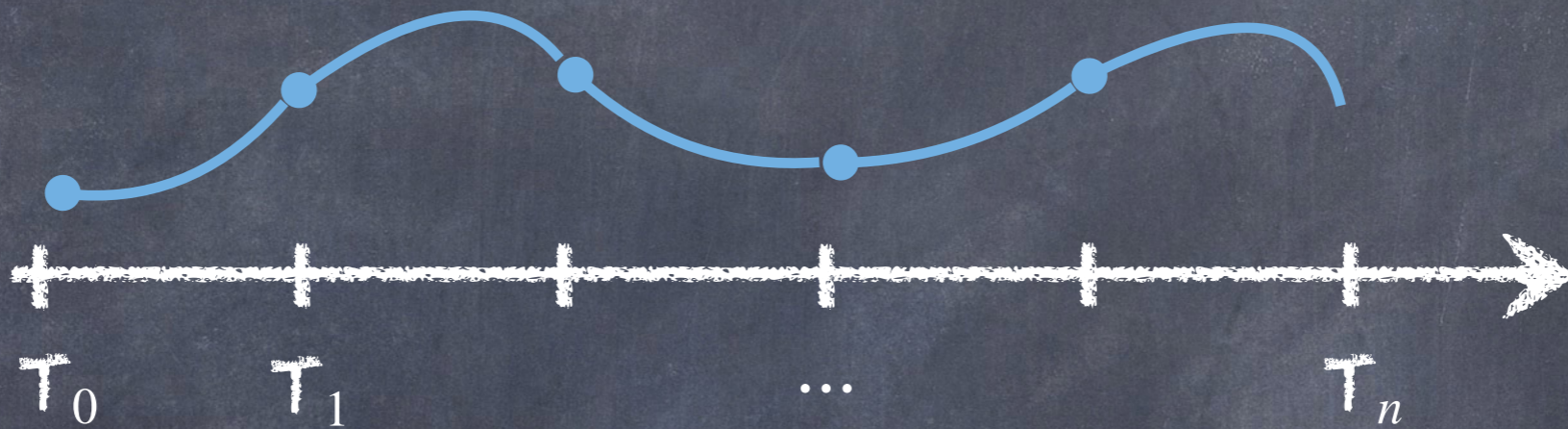


Idée / Objectif : Calculer en parallèle la solution dans chaque intervalle $[t_n, t_{n+1}]$.

Remarque : On aura $t_{n+1} - t_n > \Delta t$

IV. b) Méthode pararéel

Considérons une série d'instant $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$ et notons y_{-n} l'approximation de la solution à ces instants.



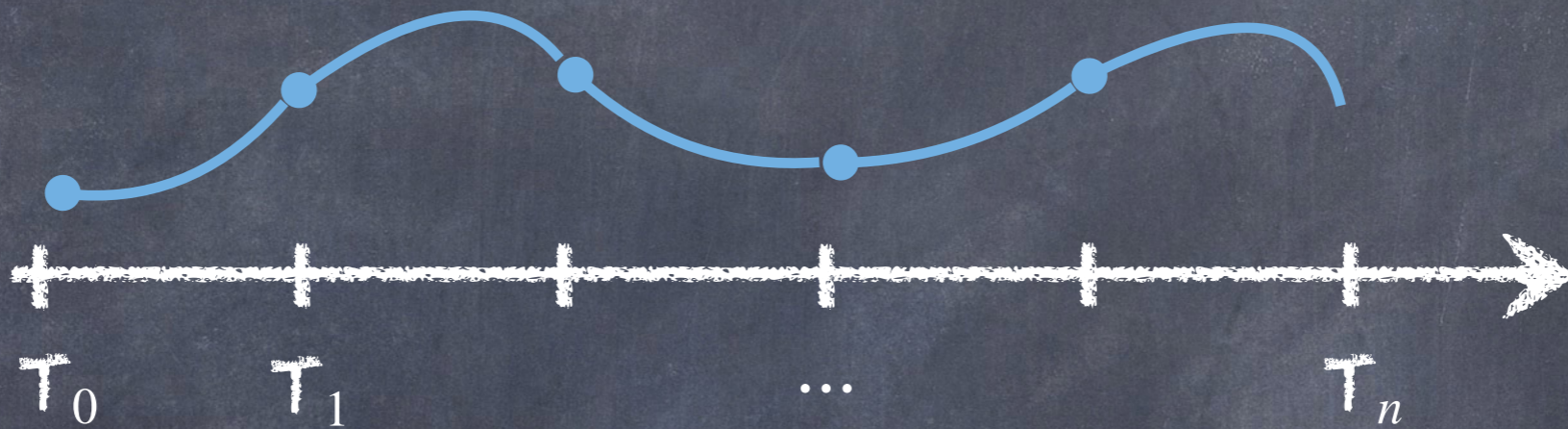
Idée / Objectif : Calculer en parallèle la solution dans chaque intervalle $[t_n, t_{n+1}]$.

Problème : Connaître l'approximation y_{-n} .

Remarque : On aura $t_{n+1} - t_n > \Delta t$

IV. b) Méthode pararéal

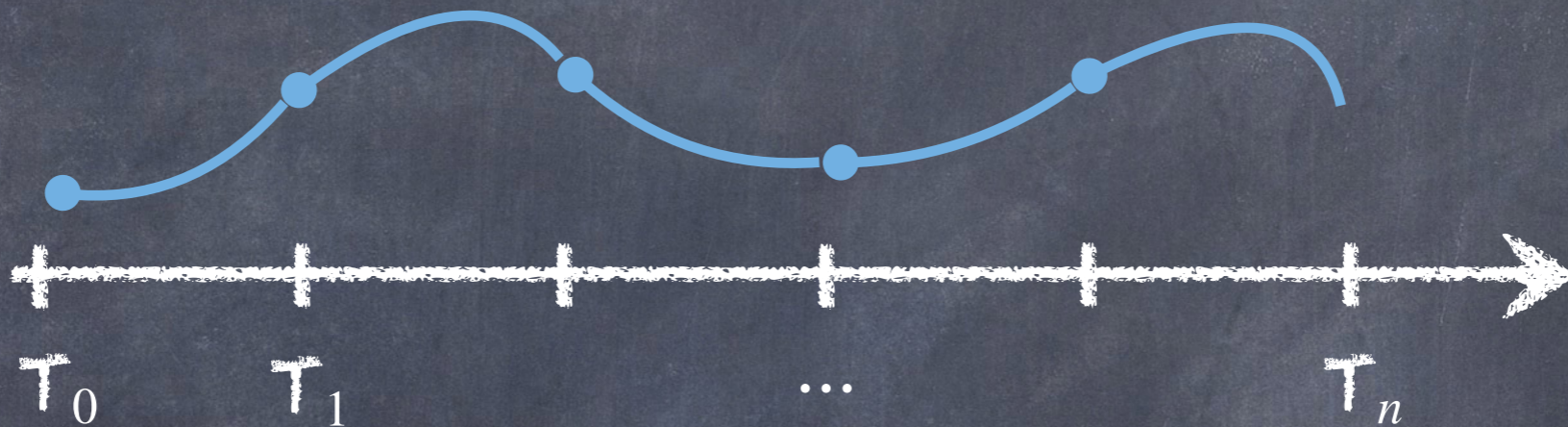
Considérons une série d'instant $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$ et notons y_{-n} l'approximation de la solution à ces instants.



Introduisons également deux méthodes de résolution :

IV. b) Méthode pararéal

Considérons une série d'instant $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$ et notons y_{-n} l'approximation de la solution à ces instants.

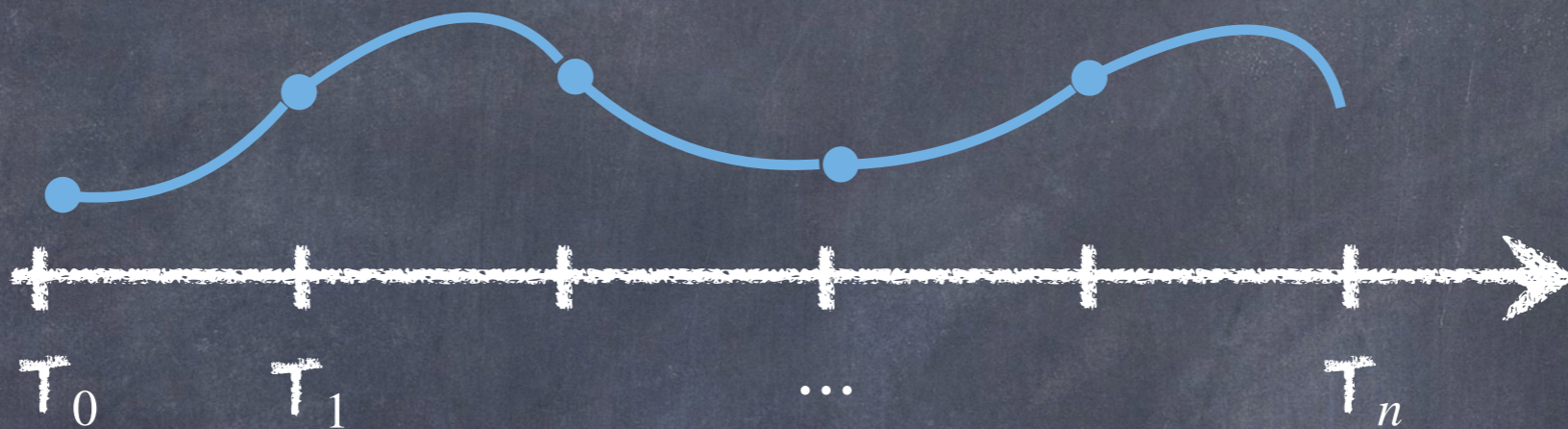


Introduisons également deux méthodes de résolution :

- ① Une **précise et coûteuse** \mathcal{F} . On notera $\mathcal{F}(y_{-n}, t_n, t_{n+1})$ l'approximation obtenue avec en t_{n+1} partant de (t_n, y_{-n})
- ② Une **grossière et peu coûteuse** \mathcal{G} . On notera $\mathcal{G}(y_{-n}, t_n, t_{n+1})$ l'approximation obtenue avec en t_{n+1} partant de (t_n, y_{-n})

IV. b) Méthode pararéal

Considérons une série d'instant $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$ et notons y_{-n} l'approximation de la solution à ces instants.

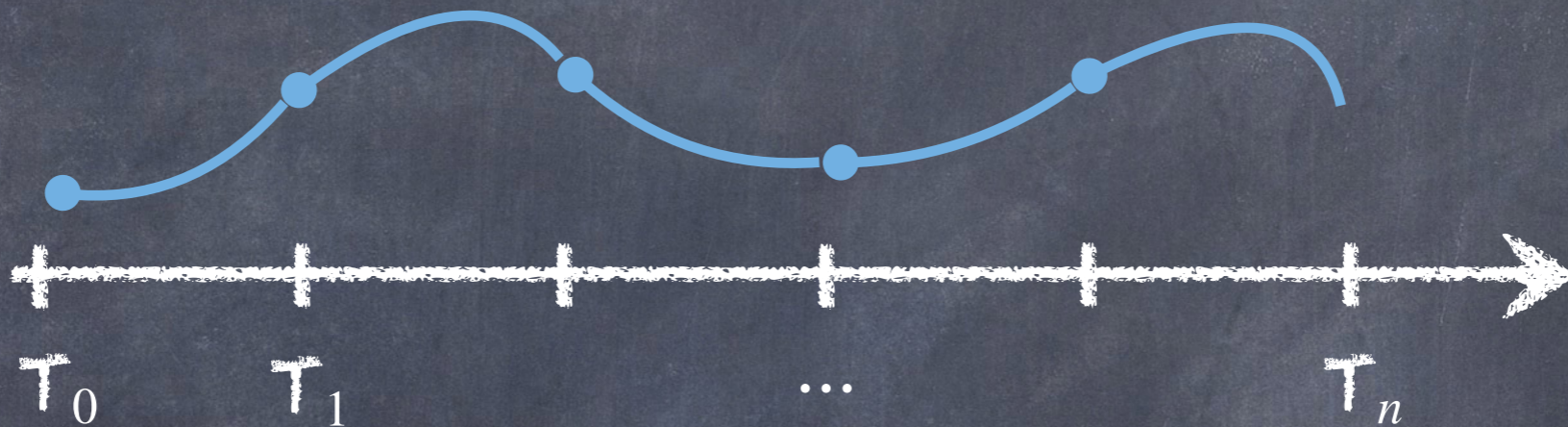


Idée : Calculer itérativement les approximations y_{-n} :

$$y_{-n+1}^{k+1} = \mathcal{F}(y_{-n}^k, t_n, t_{n+1}) + \mathcal{G}(y_{-n}^{k+1}, t_n, t_{n+1}) - \mathcal{G}(y_{-n}^k, t_n, t_{n+1})$$

IV. b) Méthode pararéal

Considérons une série d'instant $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$ et notons y_{-n} l'approximation de la solution à ces instants.



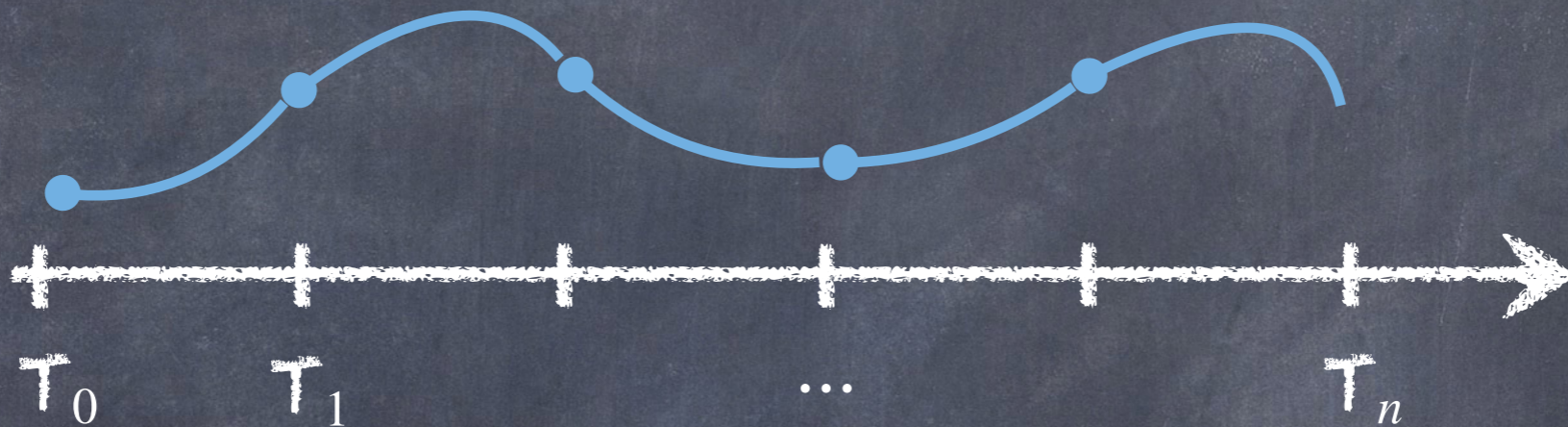
Idée : Calculer itérativement les approximations y_{-n} :

$$y_{-n+1}^{k+1} = \mathcal{F}(y_{-n}^k, t_n, t_{n+1}) + \mathcal{G}(y_{-n}^{k+1}, t_n, t_{n+1}) - \mathcal{G}(y_{-n}^k, t_n, t_{n+1})$$

Séquentiel

IV. b) Méthode pararéel

Considérons une série d'instant $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$ et notons y_{-n} l'approximation de la solution à ces instants.



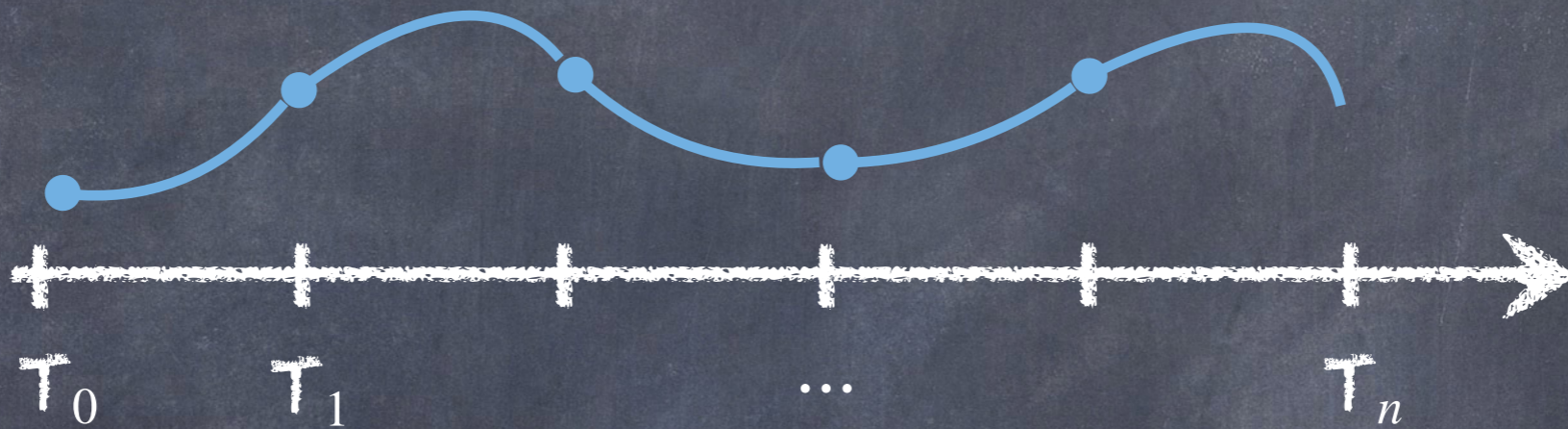
Idée : Calculer itérativement les approximations y_{-n} :

$$y_{-n+1}^{k+1} = \mathcal{F}(y_{-n}^k, t_n, t_{n+1}) + \mathcal{G}(y_{-n}^{k+1}, t_n, t_{n+1}) - \mathcal{G}(y_{-n}^k, t_n, t_{n+1})$$

Parallèle ! Séquentiel Parallèle !

IV. b) Méthode pararéal

Considérons une série d'instant $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$ et notons y_{-n} l'approximation de la solution à ces instants.



Idée : Calculer itérativement les approximations y_{-n} :

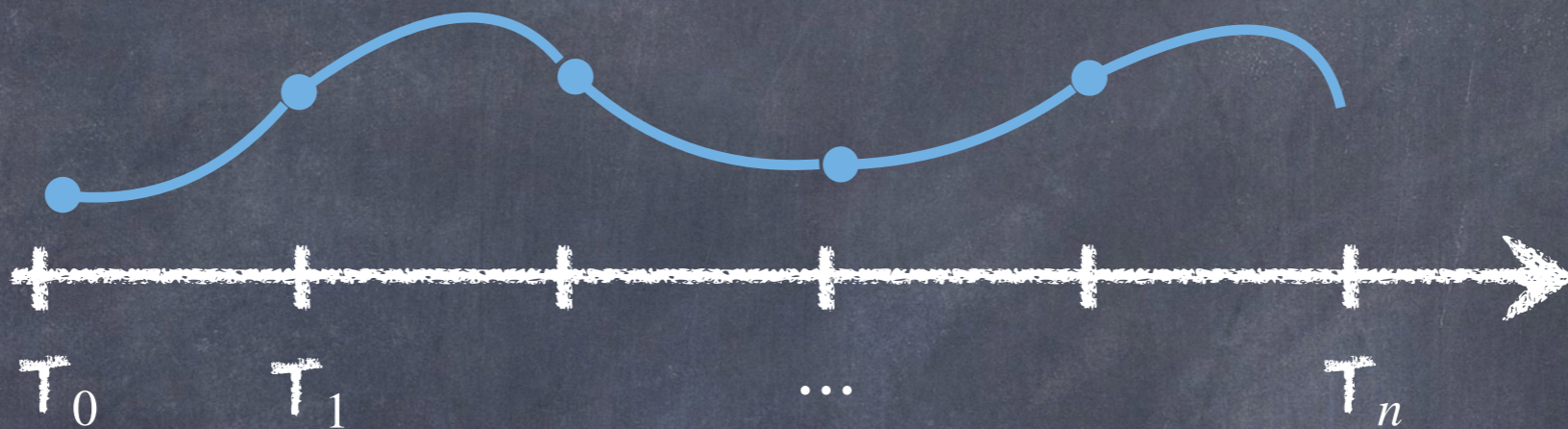
$$y_{-n+1}^{k+1} = \mathcal{F}(y_{-n}^k, t_n, t_{n+1}) + \mathcal{G}(y_{-n}^{k+1}, t_n, t_{n+1}) - \mathcal{G}(y_{-n}^k, t_n, t_{n+1})$$



$$y_{-n+1} = \mathcal{F}(y_{-n}, t_n, t_{n+1}) + \mathcal{G}(y_{-n}, t_n, t_{n+1}) - \mathcal{G}(y_{-n}, t_n, t_{n+1})$$

IV. b) Méthode pararéal

Considérons une série d'instant $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$ et notons y_{-n} l'approximation de la solution à ces instants.



Idée : Calculer itérativement les approximations y_{-n} :

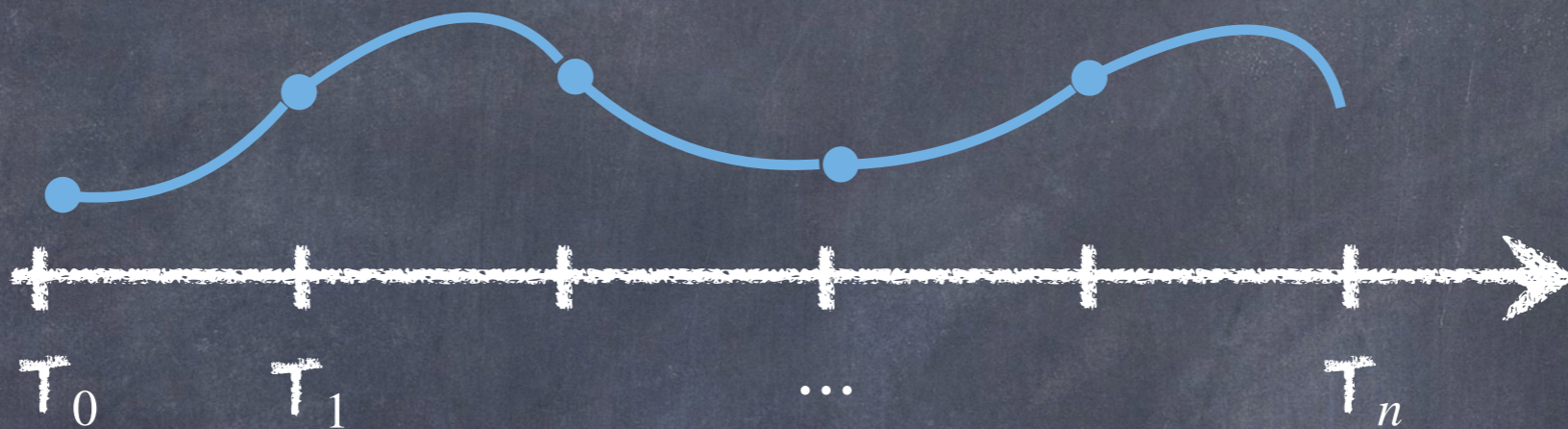
$$y_{-n+1}^{k+1} = \mathcal{F}(y_{-n}^k, t_n, t_{n+1}) + \mathcal{G}(y_{-n}^{k+1}, t_n, t_{n+1}) - \mathcal{G}(y_{-n}^k, t_n, t_{n+1})$$



$$y_{-n+1} = \mathcal{F}(y_{-n}, t_n, t_{n+1}) + \cancel{\mathcal{G}(y_{-n}, t_n, t_{n+1})} - \cancel{\mathcal{G}(y_{-n}, t_n, t_{n+1})}$$

IV. b) Méthode pararéel

Considérons une série d'instant $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$ et notons y_{-n} l'approximation de la solution à ces instants.



Idée : Calculer itérativement les approximations y_{-n} :

$$y_{-n+1}^{k+1} = \mathcal{F}(y_{-n}^k, t_n, t_{n+1}) + \mathcal{G}(y_{-n}^{k+1}, t_n, t_{n+1}) - \mathcal{G}(y_{-n}^k, t_n, t_{n+1})$$

Remarque :

Une méthode pararéel sera efficace seulement si on converge rapidement en k .

IV. b) Méthode pararéel

Illustration méthode pararéel :

Résolution du systeme de Lotka-Volterra

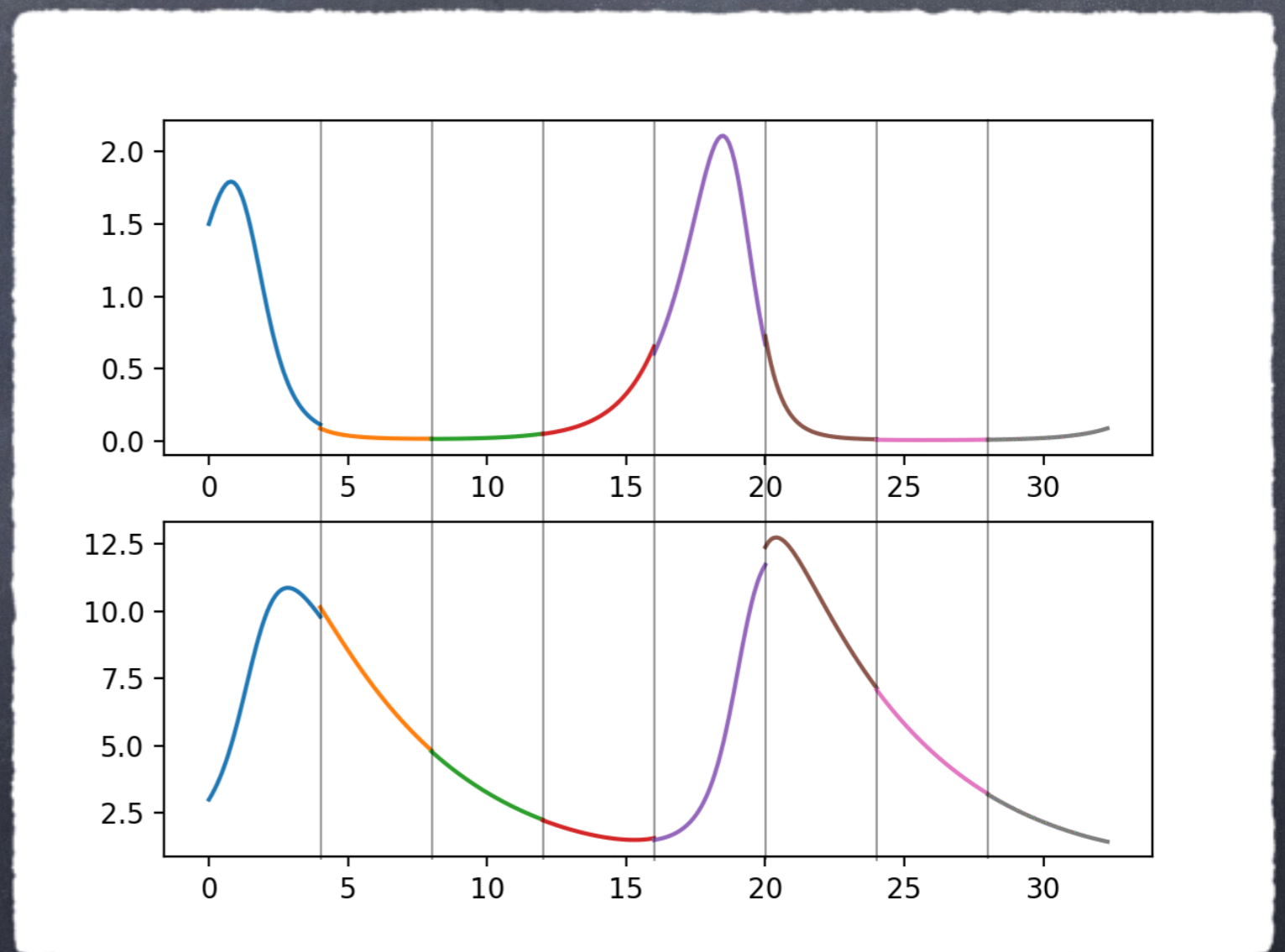
$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ y'(t) = \delta x(t)y(t) - \gamma y(t) \end{cases}$$

Paramètres :

$$\Delta t = 0.1$$

Euler / RK4

8 sous domaines



IV. b) Méthode pararéel

Illustration méthode pararéel :

Résolution du systeme de Lotka-Volterra

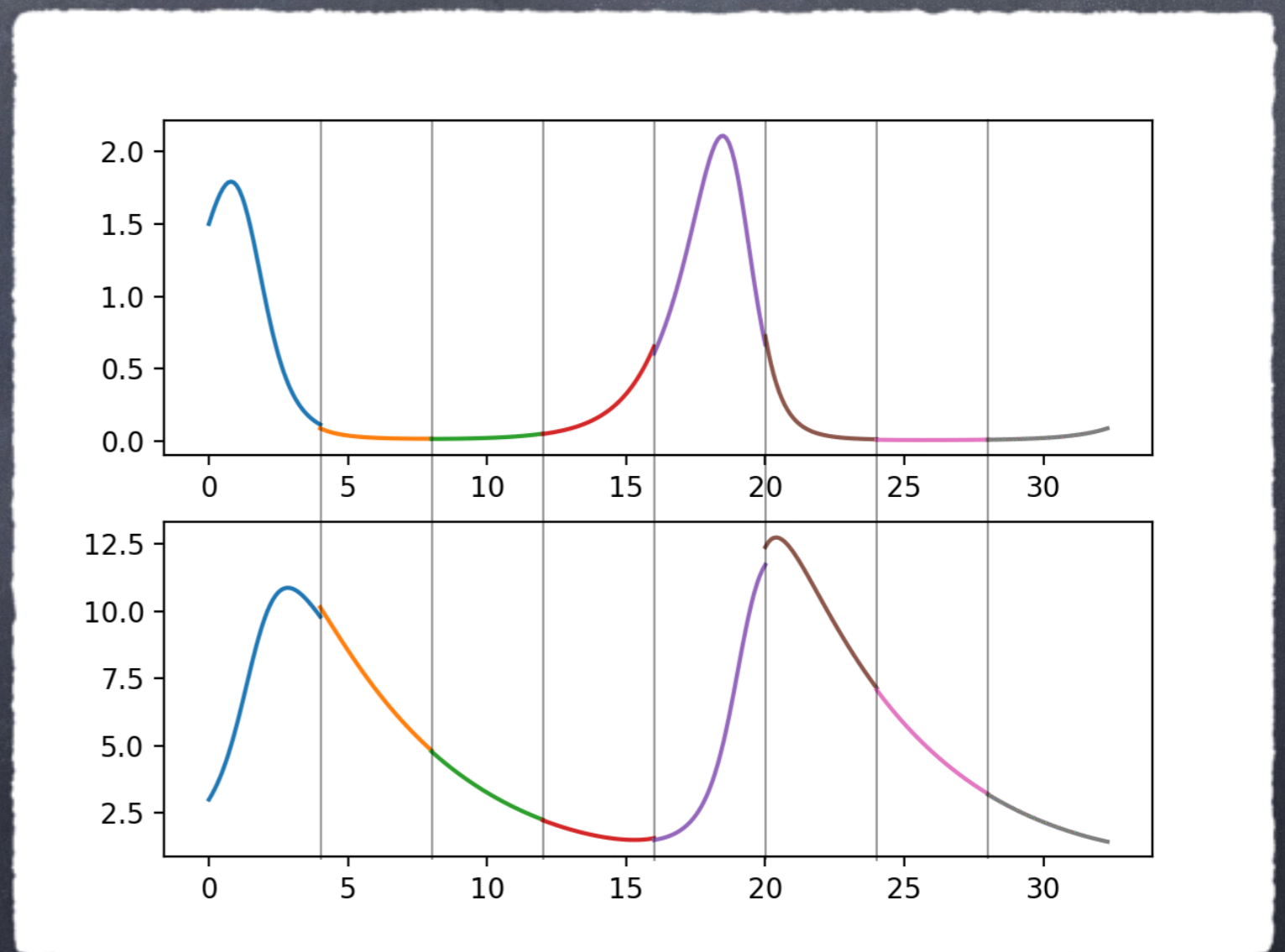
$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ y'(t) = \delta x(t)y(t) - \gamma y(t) \end{cases}$$

Paramètres :

$$\Delta t = 0.1$$

Euler / RK4

8 sous domaines



IV. b) Méthode pararéel

Illustration méthode pararéel :

Résolution du systeme de Lorentz (chaotique !)

$$x'(t) = \sigma(y(t) - x(t))$$

$$y'(t) = \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t)$$

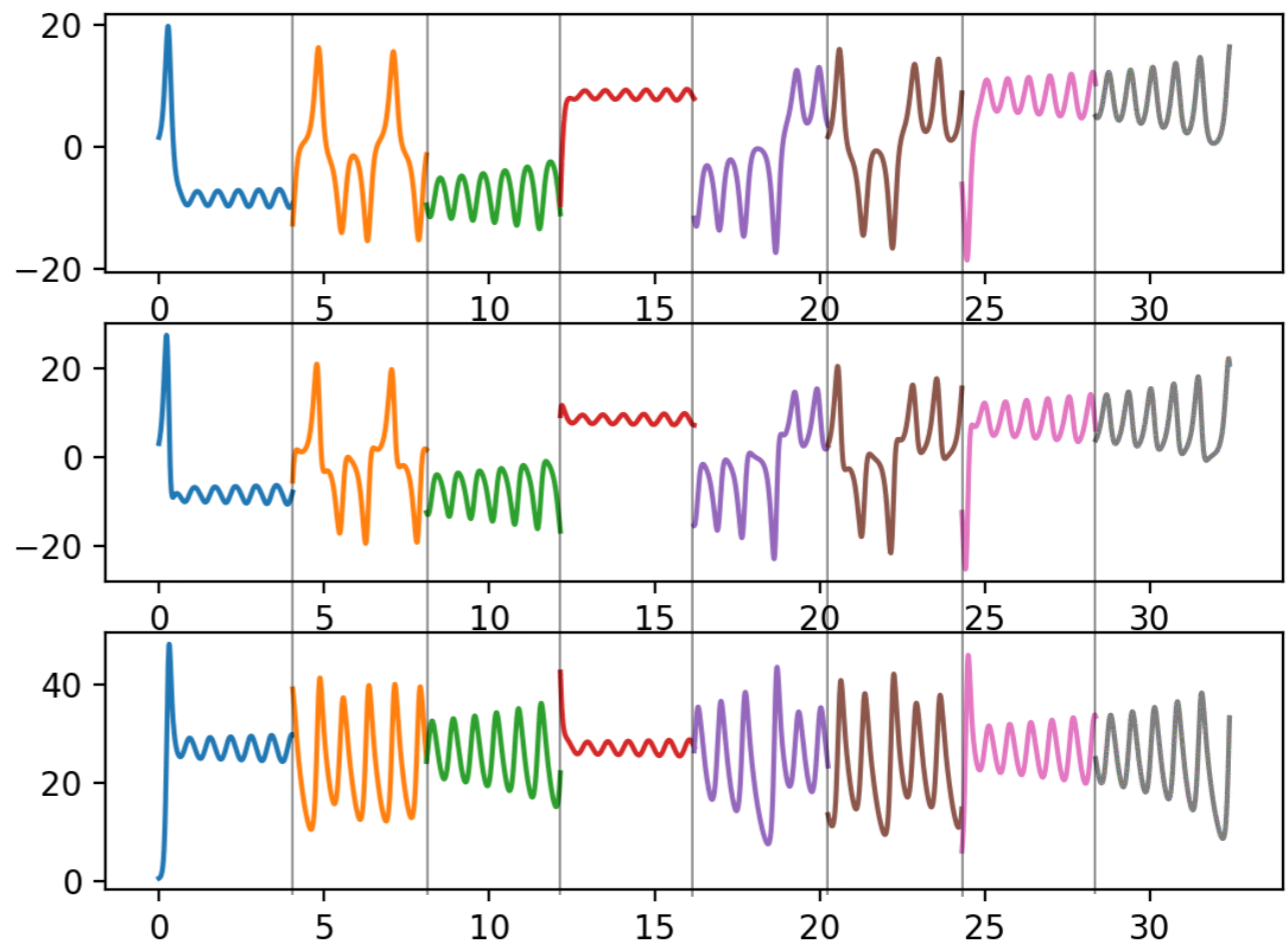
$$z'(t) = x(t)y(t) - \beta z(t)$$

Paramètres :

$$\Delta t = 0.1$$

Euler / RK4

8 sous domaines



IV. b) Méthode pararéel

Illustration méthode pararéel :

Résolution du systeme de Lorentz (chaotique !)

$$x'(t) = \sigma(y(t) - x(t))$$

$$y'(t) = \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t)$$

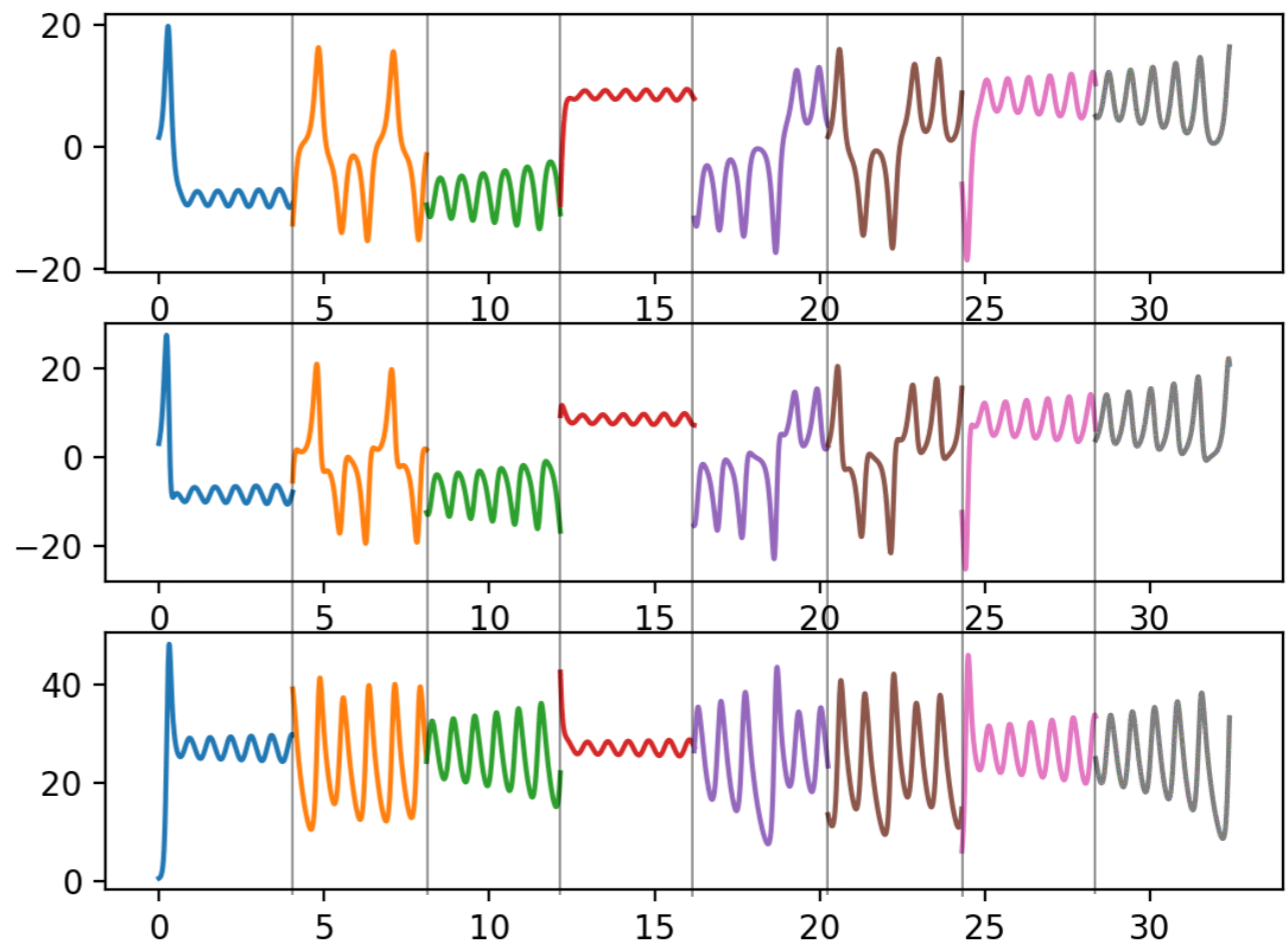
$$z'(t) = x(t)y(t) - \beta z(t)$$

Paramètres :

$$\Delta t = 0.1$$

Euler / RK4

8 sous domaines



Plan détaillé du chapitre 3

Plan :

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

II. Les méthodes à 1-pas

a) Définition et analyse

b) Les méthodes de Runge Kutta

III. Les méthodes multi-pas

a) Définition et analyse

b) Les méthodes prédiction-corrrection

IV. Quelques extensions

a) Adaptation du pas

b) Méthode parallèle