Méthode BEM pour la simulation numérique en éolien

1 Information générale

Contact :	Antoine Tonnoir, LMI - INSA Rouen Normandie antoine.tonnoir@insa-rouen.fr
Stage :	“Méthode BEM pour la simulation numérique en éolien" Durée 6 mois Rémunération : 550 euros / mois
Collaboration :	Norbert Warncke
Mots clés :	*Simulation numérique, Méthode de Galerkin, Boundary Element Method (BEM)* *Intégration exacte pour les méthodes BEM.*

2 Description du projet

Introduction

Ce stage s'inscrit dans le contexte du développement de l'*éolien offshore en Normandie* et du projet M2NUM porté par le LMI - INSA Rouen Normandie. Ce thème engendre de fort besoin en outils de *simulation numérique* afin de pouvoir analyser et effectuer des tests de validation des éoliennes. Dans ce contexte, l'objectif de ce stage est d'étudier les performances d'une méthode BEM pour la simulation.

M2NUM is co-financed by the European Union with the European regional development fund (ERDF, HN0002137) and by the Normandie Regional Council.

Présentation du projet

On s'intéresse dans ce projet à la simulation numérique du flux d'air autour des pales d'une éolienne. Afin de pouvoir considérer des effets réalistes (comme un champ de vent incident non uniforme), on ne peut pas utiliser des approches “classiques” comme la *Balde Momentum Theory* ou les méthodes de *Computational Fluid Dynamics*. En effet, ces méthodes sont soit trop imprécise (elle ne permet pas de prendre en compte un champ de vent non uniforme), soit beaucoup trop couteuse. Récemment, il y a eu un regain d'intérêt pour les *Boundary Element Method* [3] qui permettent de prendre en compte ces effets réalistes tout en conservant un coût de calcul raisonnable.

Afin de présenter les idées, considérons le cas simple d'un flux uniforme autour d'une pale de géométrie Ω. On peut alors considérer que le flux dérive d'un potentiel u solution de l'équation de

Poisson :

$$-\Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \quad + \text{Conditions au bord } \partial\Omega$$

Afin de résoudre ce problème, on souhaite utiliser une méthode BEM [3]. Grâce au théorème de représentation , on a $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$:

$$u(\underline{x}) = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu G(\underline{x}-\underline{y})u(\underline{y}) - G(\underline{x}-\underline{y})\partial_\nu u(\underline{y})d\underline{y} \quad \text{où} \ G(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\|\underline{x}\|}$$

est le noyau de Green. Les conditions aux bords nous permettent d'écrire le problème linéaire du type $Au = f$ qu'on a finalement à résoudre (où A est un opérateur intégrale définie à l'aide de G). Afin de discrétiser cette équation intégrale, il existe deux approches classiques :

1. soit par une *méthode de collocation* : cette approche simple à mettre en oeuvre consiste simplement à imposer l'équation $Au = f$ en certains points. Son défaut est que le choix des points a une forte influence sur les résultats numériques.
2. soit par une *méthode de Galerkin* : cette approche présente l'avantage d'assurer la convergence et d'être stable numériquement [4]. Néanmoins, elle nécessite le calcul de termes intégraux du type

$$\mathcal{T}(T,S) = \int_{T\times S} G(\underline{x}-\underline{y})d\underline{x}d\underline{y}$$

   où S et T sont deux triangles de $\partial\Omega$ (on considère ci-dessus une discrétisation constante par morceau). En général, ces calculs sont effectués numériquement via des formules de quadrature. Le souci est qu'afin d'être précis, on doit utiliser des formules de quadrature coûteuses. De plus, lorsque les triangles S et T sont adjacents ou identiques, le calcul de $\mathcal{T}(T,S)$ est plus délicat car l'intégrande $G(\cdot)$ est alors singulière.

Notre objectif est, en utilisant les récents travaux de M. Lenoir & N. Salles [1, 2], d'implémenter une méthode BEM en effectuant un calcul analytique des termes intégraux $\mathcal{T}(T,S)$. Cette approche permet d'éviter la difficulté de la quadrature et de gagner également en précision numérique.

Objectifs visés

— Mise en oeuvre et test numérique de la méthode sur des cas 3D réalistes (en C++ ou Python).
— Comparaison des méthodes de collocation et de Galerkin.
— Si le temps le permet, on pourra s'intéressera à des techniques itératives de résolution type *Fast Multipole Method*.

Bibliographie

[1] Lenoir M. *Influence coefficients for variational integral equations*. Comptes Rendus Mathematique, 343(8), 561-564. (2006)

[2] Lenoir M. & Salles N. *Evaluation of 3-d singular and nearly singular integrals in Galerkin BEM for thin layers*. SIAM Journal on Scientific Computing, 34(6), A3057-A3078. (2012)

[3] Sauter S. A. & Schwab C. *Boundary element methods*. In Boundary Element Methods (pp. 183-287). Springer Berlin Heidelberg. (2010)

[4] Sauter S. A. & Schwab C. *Quadrature for hp-Galerkin BEM*. Numerische Mathematik (pp. 211-258). Springer Berlin Heidelberg. (1997)